ТИХОНЕНКО А. В. САРІЄНКО В. К.
САРІЄНКО В. В. ЛЯШОВА Н. М.
ЧАЙЧЕНКО В. Ф.

ВЕЛИЧИНИ
У ПОЧАТКОВІЙ ШКОЛІ

на допомогу вчителю початкової школи

Навчально-методичний посібник

Частина 3

Слов’янськ
2018

УДК 373.3.016:51(07)

Л69

Тихоненко А. В.
Величини у початковій школі : навчально-методичний посібник, Ч. 3. / А. В. Тихоненко, В. К. Сарієнко, В. В. Сарієнко, Н. М. Ляшова, В. Ф. Чайченко [за заг. ред. доц. Сарієнка В. К.]. – Слов'янськ: ДВНЗ «ДДПУ», 2018. – 152 с.

Рецензенти**: Чайченко С. О.** – доктор фізико-математичних наук, проректор з науково-педагогічної роботи Донбаського державного педагогічного університету (м. Слов'янськ).

Митник О. Я. – доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри психології Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова (м. Київ).

Макаренко С. І. – кандидат педагогічних наук, доцент, проректор з навчально-педагогічної роботи Донецького обласного інституту післядипломної педагогічної освіти.

У навчальному посібнику розглянуті теоретичний і методичний аспекти формування загальнонаукового поняття величини відповідно до вимог освітньо-професійної програми підготовки учителя початкових класів.

Посібник містить у собі теоретичні відомості про величини та методичні поради щодо впровадження їх у навчальний процес з математики у початковій школі.

Посібник призначений для вчителів початкової школи, методистів, слухачів курсів підвищення кваліфікації, студентів факультетів підготовки вчителів початкових класів вищих педагогічних навчальних закладів, учнів педагогічних коледжів.

Рекомендовано вченою радою Донбаського державного педагогічного університету як навчально-методичний посібник зі спеціальності «Початкова освіта» (на допомогу вчителю початкової школи) (Протокол №8 від 24.04.2018 р.).

Рекомендовано вченою радою Донецького обласного інституту післядипломної педагогічної освіти як навчально-методичний посібник (на допомогу вчителю початкової школи) (Протокол № 4 від 12.04. 2018 р.).

В С Т У П

Модернізація системи освіти на засадах компетентнісного підходу, трансформація структури професійно-педагогічних знань, якими має оволодіти вчитель, спонукає до пошуку сучасних форм неперервного підвищення кваліфікації вчителя протягом життя з тим, щоб зберігати відповідність зростаючому рівню вимог.

На наш погляд, саме **науково-методична** робота найбільш повно відповідає вимогам, що висуваються до системи професійного розвитку вчителів, визначеним у програмному документі Міністерства освіти і науки України «Концептуальні засади реформування середньої освіти» – «Нова українська школа», які визначаються у наступному: орієнтація на того, хто навчається (педагог вільно обирає відповідні можливості професійного розвитку або бере участь у їх формуванні); орієнтація на досвід і знання (фундаментальну та методичну інформацію подають у контексті наявних досвіду і знань та з урахуванням потреб власне учителів початкових класів, зокрема, впровадження нових ідей щодо навчальної діяльності); орієнтація на оцінювання, що дає можливість учителям отримати якісний зворотний зв’язок.

У процесі сучасної науково-методичної роботи велика увага звертається на теоретико-методологічні основи викладання математики за науково-педагогічним спрямуванням «Інтелект України», що формує в учителів теоретичну готовність до імплементації в практичній роботі початкової школи основних фундаментальних та методичних положень на компетентнісній основі.

Системоутворювальною лінією курсу математики початкової школи є арифметика і тісно з нею пов’язані такі змістові лінії, як «Величини», «Просторові відношення та геометричні фігури». Розвиток молодших школярів під час навчання математики в значній мірі залежить від засвоєння ними таких понять, як поняття числа і величини, поняття геометричної фігури, суті арифметичних дій тощо. Вони є основними для формування сучасних уявлень про світ. Аналіз існуючих програм різних освітніх ліній початкової школи показує, що поняття величини є, з одного боку, сполучною ланкою між абстрактними уявленнями учнів і реальним світом, а з іншого – загальнонауковим поняттям, і тому може бути покладено в основу науково-методичної професійної підготовки вчителів початкової школи. Формування загальнонаукових понять є складним процесом послідовного розкриття якісних і кількісних особливостей предметів і явищ навколишнього світу. Учні не відразу опановують поняттям, а поступово засвоюють його зміст, обсяг, зв'язки і відношення з іншими поняттями.

Традиційно в практиці навчання математики в початковій школі матеріал змістової лінії «Величини» вважається найбільш важким для засвоєння учнями. Причиною такого явища є, перш за все, високий рівень абстрактності цього поняття. Тому в навчальному процесі поняття величини у свідомості учнів формується без визначення, а в процесі виконання ними практичних завдань, пов'язаних з вимірюванням і заснованих на спостереженнях, на особистому життєвому досвіді. Тому й учитель на початкових етапах формування поняття величини спирається на інтуїцію учнів.

Формування уявлень, а потім і понять про величини та їх обчислення практично виходить за межі курсу математики і має загальнонаукове значення, оскільки дані уявлення та поняття широко використовуються при вивченні й інших навчальних предметів, при ознайомленні дитини з навколишнім світом, а далі – й у практичній діяльності дорослої людини. Цей факт є причиною багатозначності цього поняття, що в свою чергу є витоком різних варіантів його визначення. Природно, це створює значні труднощі як в усвідомленні та засвоєнні поняття величини, так і в методах його викладання учням.

Даний посібник має на меті ознайомлення фахівців галузі початкової освіти і, перш за все вчителів, з суто фундаментальним осмисленням та математичним тлумаченням поняття величини, його властивостями і взаємозв'язком з іншими математичними поняттями й на цій основі будування ефективних методичних підходів до його вивчення в початковій школі.

Вивчення величин у початковій школі та їх обчислення на основі вимірювання має велике значення в розвитку молодших школярів. Це обумовлено тим, що через поняття величини описуються реальні властивості предметів і явищ оточуючої дійсності, а знайомство з залежностями між величинами допомагає створити у дітей цілісне уявлення про навколишній світ. Вивчення процесу вимірювання та знаходження значення величини сприяє формуванню практичних умінь та навичок, які необхідні в повсякденному житті. Крім того, знання та уміння, пов'язані з величинами, які діти отримали в початкових класах, є основою для подальшого вивчення математики в середній ланці школи.

Пропонований навчально-методичний посібник призначений для вчителів початкових класів як засіб для фундаментального й методичного підвищення свого професійного рівня, для слухачів курсів підвищення кваліфікації, а також для студентів педагогічних навчальних закладів зі спеціальності «Початкова освіта».

Матеріали посібника можуть бути використані вчителями початкових класів у процесі підготовки навчально-методичних робіт для підвищення кваліфікаційної категорії, методистами, слухачами курсів підвищення кваліфікації, викладачами і студентами педагогічних навчальних закладів.

РОЗДІЛ І

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ВЕЛИЧИН У ПРОФЕСІЙНІЙ ПІДГОТОВЦІ ВЧИТЕЛЯ ПОЧАТКОВОЇ ШКОЛИ

1.1. Історичний шлях розвитку поняття величини

Поняття «величина» здавна вважалося одним з основних понять математики, зміст якого зазнавав змін, уточнень і узагальнень. Уперше воно виникло у філософській літературі й пов’язувалося з дійсними числами. Виявлення теоретичних аспектів змісту поняття «величина» неможливе без розгляду логіки розвитку людського пізнання поняття величини.

Історично першим кроком до пізнання людиною кількісних відносин між об’єктами навколишньої дійсності стало запровадження критеріїв порівняння відношень «більше», «менше», «дорівнює», «вище», «нижче», «коротше», «довше» тощо. Практична діяльність людини привела до необхідності виділення об’єктів, які найбільш часто зустрічаються, як еталони порівняння, що в подальшому призвело до лічби предметів і формування натурального ряду чисел. Однак для застосування математики в практичній діяльності, пов’язаної з вимірюванням об’єктів, натуральних чисел виявилося недостатньо: не завжди одиниця виміру укладається ціле число раз у вимірюваному об’єкті. Щоб у такій ситуації точно висловити результат вимірювання, виникає необхідність розширення множини натуральних чисел до множини раціональних чисел. На етапі введення поняття раціонального числа виникає нове поняття – «величина», що є проміжною ланкою між реальними геометричними та фізичними об’єктами і результатом їх вимірювання.

У знаменитих «Началах» Евкліда, (ІІІ ст. до н. е.), було чітко сформульовано аксіоми, що описують загальні властивості величин. Для Евкліда «відношення» не є число – це є величина, яку він визначає критеріями порівняння. Евклід розглядає досить широкий спектр питань, пов’язаних з поняттям величини, що є свідченням того, що «Начала» –

основа теорії величин. Визначення поняття величини, дане Евклідом у III ст. до н.е., є узагальненням уявлень про конкретні поняття: довжини, площі, маси тощо.

У геометричному обчисленні, викладеному в праці Евкліда «Начала» (15 книг), додавання і віднімання величин зводилося до додавання і віднімання відрізків, а множення – до побудови прямокутників на відрізках, відповідних довжинам множників. Протягом багатьох століть робота Евкліда була прикладом побудови строгої дедуктивної системи, а геометричні обчислення стали витоками розвитку теорії векторів.

Витоки обчислення відрізків виникли в далекому минулому. У Стародавній Греції піфагорійці, відкривши ірраціональні числа, не наважувалися ввести більш широке тлумачення числа і звели питання арифметики і алгебри до розв'язування завдань геометричним шляхом, поклавши, таким чином, початок геометричній теорії відношень Евдокса (408 – 355 рр до н.е.), згідно якої числа є тільки понятійною фіксацією величин. Створена Евдоксом теорія величин, відповідно до якої математика є наукою про величини, об'єднала всі математичні дисципліни і, як результат, розширила діапазон даного поняття.

Побудова теорії призвела до узагальнення поняття величини за допомогою підпорядкування його системі аксіом:

– рівні одному і тому самому – рівні між собою;
– якщо до рівних додати рівні, то й отримані будуть рівні;
– якщо від рівних відняти рівні, то і залишки будуть рівні;
– ті, що суміщаються один із одним – рівні між собою;
– ціле більше частини та ін.

Ці аксіоми побічно визначають поняття *додатної скалярної величини*.

Давньогрецький філософ, математик і логік Аристотель, який жив у II ст. до н. е., писав, що «Та чи інша кількість є множина, якщо її можна рахувати; є величина – якщо її можна виміряти». Це висловлювання не може бути визначенням поняття «величина», оскільки в ньому не визначено, що означає «рахувати», а що значить «виміряти». Але в цьому висловлюванні чітко проведена межа між двома видами чисел – натуральними, що використовуються для перерахунку елементів скінчених множин, і дійсними, які застосовуються для вираження результату вимірювання.

Отже, уже в давньогрецький період математика вивчала не окремі властивості деяких величин, а загальні властивості та відношення об'єктів матеріальної природи, абстраговані від їх якісних характеристик.

В Аристотелевій системі категорія «число» визначається як множина, поділена на частини розривні, а «величина» – на части неперервні[1/].

Подальший розвиток теорія величин отримала в роботах Кавальєрі. Його ідея щодо методу вимірювання площ полягає в порівнянні даної фігури з відомою площею – з іншою фігурою, площа якої теж відома. Теорія Кавальєрі отримала завершення в працях Готфріда Лейбніца та Іссаака Ньютона. Наприкінці XIX століття теорія вимірювання величин вступила в суперечність з новими теоретичними обґрунтуваннями існування чисел як самостійної сутності, а головне – з бурхливим розвитком фізики, хімії, інших природничо-математичних дисциплін, в яких використовуються прикладні властивості математики. Відкриття нових властивостей реального світу неможливо було віднести до категорії величин без використання поняття «дійсне число», яке, згідно з існуючою теорією величин, не було самостійним і не могло служити меті її визначення.

Подальше розширення множини раціональних чисел до множини дійсних чисел вимагало введення ірраціональних чисел і відмову від безпосереднього порівняння фізичних об'єктів. На перший план, таким чином, виступає певна абстракція – те загальне, що притаманне класу об'єктів (довжина – для відрізків, об'єм – для тіл, площа – для поверхонь і т. д.), що отримало назву «величина», тобто відбувається реальний поділ поняття числа (arithmos) і поняття величини (megethos).

[1] Аристотель. Метафизика. – М. – Л., – 1934.

Однак визнання наукою факту самостійного існування поняття «величина» і поняття «число» не могло розв'язати суперечності, що виникають у цьому випадку, перш за все тих, що стосуються визначення поняття величини, оскільки твердження Аристотеля, що «величина – це є все те, що здатне збільшуватися і зменшуватися» і Леонарда Ейлера «величина – є будь-яка річ, яка може бути визнана рівною або нерівною іншій речі» – не можна визнати переконливими. Визначення поняття величини за Л. Ейлером (середина XIX ст.), досить довгий час носило описовий характер. Однією з причин такого явища, безсумнівно, є додаток теорії величин до досить великого кола об'єктів матеріального світу.

У XIX ст. у зв'язку з бурхливим розвитком математики питання обґрунтування теорії величин отримують подальший розвиток. Так, у 1832 р. угорський математик Фаркаш Бойяі та німецький математик Гервін незалежно один від одного довели рівноскладеність будь-яких двох рівновеликих многокутників. Це давало можливість встановити критерій рівності площ, виходячи з поняття равноскладеності. Але за такої точки зору необхідно було довести, що площа фігури не змінюється, хоч як би не переставлялися окремі її частини. На цю обставину вперше звернув увагу Де-Цольт (нім.), який у 1881 р. увів в якості нової аксіоми наступну: «Якщо многокутник довільним чином розкладений на частини, то неможливо, відокремивши одну з його частин, розташувати інші так, щоб вони абсолютно покривали многокутник». У 1885 р. С. Шатуновский і в 1887 р. Д. Гільберт довели можливість співвіднесення кожному простому плоскому многокутнику єдиного дійсного додатного числа, званого площею многокутника, і який має властивості інваріантності щодо руху.

В. Каган в роботі «Нариси з геометрії», зазначає, що теорія величин відіграє найважливішу роль в обґрунтування геометрії. Вчений встановлює критерії порівняння величин, послідовно доводить можливості обчислення довжини відрізка і площі прямолінійної фігури. [2/]

[2/] Каган В. Ф. Очерки по геометрии. –М., – 1963. – С. 140.

Величини можна класифікувати за науками, в яких вони вивчаються, – фізичні, хімічні, психологічні та ін. Математика ж створила абстракції величин, придатні для будь-яких прикладок. Як ми вже зазначали, величина, яка характеризується лише числовим значенням без вказівки будь-якого напрямку, називається *скалярною величиною*.

Скаляр – це величина, кожне значення якої може бути виражено одним (дійсним) числом[3/].

У математиці, фізиці, хімії, інформатиці певні класи величин мають абсолютно чіткі (найчастіше аксіоматичні) визначення (клас адитивно-скалярних величин, клас векторних величин і т. д.).

В. Каган (1869–1953), розглядаючи такі величини, як довжина, площа, об'єм, маса, час, щільність, температура та ін., ставить питання про те, які загальні властивості ці поняття мають, і показує, що вони відносяться до сукупності множин однорідних предметів, зіставлення елементів яких дозволяє застосувати відношення порівняння, виражені термінами «більше», «дорівнює», «менше»[4/].

Міжнародна система одиниць

Більшість одиниць вимірювання величин виявилися тісно пов'язаними з одиницею довжини – метром, і тому нова система одиниць стала називатися метричною системою мір.

Створення метричної системи мір було великим науковим досягненням: уперше в історії з'явилися міри, що утворюють злагоджену систему, засновані на зразках, взятих з природи, і тісно пов'язані з десятковою системою числення. Нова метрична система мір отримала загальне визнання лише в 1875 році, коли 17 держав світу підписали метричну конвенцію «для забезпечення міжнародної єдності вимірювань і вдосконалення метричної системи заходів». На сьогодні ця конвенція підписана 60 державами світу.

[3/] Математическая энциклопедия. –М., – 1984. – Т. 4. –С. 1197.
[4/] Каган В. Ф. Очерки по геометрии. –М., – 1963. – С. 101.

Бурхливий розвиток науки, техніки і виробництва в XX ст. відмічений тим, що до 50-х років виникло багато різних систем одиниць, які доповнюють і розвивають метричну систему мір. З усією гостротою постала проблема єдиної універсальної системи одиниць вимірювання величин. Тож, у 1960 році XI Генеральною конференцією мір і ваг було прийнято рішення про введення Міжнародної системи одиниць (СІ) – єдиної універсальної практичної системи одиниць для всіх галузей науки, техніки, освіти. За короткий час вона отримала широке міжнародне визнання і поширення.

У цій системі 7 основних одиниць (*метр, кілограм, секунда, ампер, кельвін, моль і кандела*).

Кандела (від лат. *Candela* – свічка) – одиниця сили світла в системі СІ. Позначається: *кд*.

Моль – одиниця кількості речовини на молекулярному рівні (молекул, атомів, іонів). Позначається: *моль*.

Кельвін – одиниця термодінамічної температури, що дорівнює 1/273,16 частини термодінамічної температури потрійної точки води. Позначається: *К*. 0^0 *К* = -273^0 С. Відповідно 273^0*К* = 0^0 С. Потрійна точка води – точка співіснування льоду, води та пару, що дорівнює $0{,}01^0$ С.

Ампер – одиниця сили електричного струму в СІ. Позначається: *А*.

Із одиниць метричної системи мір у системі СІ, що вивчаються у початковій школі є *метр*, *кілограм* і *секунда.* Розглянемо більш докладно історичну суть цих одиниць обчислення величин.

Як ми вже зазначали, більшість одиниць обчислення величин виявилися тісно пов’язаними з одиницею довжини – **метром**. До кінця XVIII ст. у світовій практиці не було однозначності в одиницях вимірювання відрізків. Кожна країна мала свою систему, зокрема: дюйм, фут, ярд (англ.); лікоть, сажень, вершок, миля (рос.); миля, кабельтовий (морськ.), льє (фр.), квадра, вара (ісп.), рі, тьон, тьо, дзьо (япон.) та ін. Але в зв’язку з розвитком торгівлі така строкатість гальмувала торговельні відносини між країнами і, природно, виникла необхідність у запроваджені якоїсь спільної одиниці. Необхідність посилювалася з розвитком природничих наук (фізики, астрономії, хімії, біології). Тому на розв'язання цього завдання були направлені значні сили фізико-математичної науки. Вчені вирішили створити таку мірку обчислення довжини, якою б могли користуватися люди всіх країн. Пропонувалося декілька варіантів, але для еталону треба було вибрати певну постійну мірку. У 1791 р. комісія Паризької академії наук, до складу якої увійшли знамениті математики П. Лаплас, Ж. Лагранж, Г. Монж та ін. запропонувала взяти за основу розміри Земної кулі. Нову одиницю довжини вони визначили як $^1/_{10\ 000\ 000}$ частину половини меридіану (від полюса до екватора) і назвали її *метр* – від грецького слова $\mu\varepsilon\tau\rho o\nu$ – *міра.*

На основі вимірювання меридіану французькими вченими П. Мешеном і Ж. Д'Аламбером була виготовлена лінійка з платини – архівний метр. Число 10 було взято за основу поділу метру. Ось чому метрична система мір тісно пов'язана з десятковою системою числення.

У 1889 р. було виготовлено декілька зразків, які були затверджені як еталон – найточніша міра метра. Один з них став міжнародним еталоном і зберігається в Міжнародному бюро мір і ваги в Севрі, поблизу Парижа. Решта перейшли у власність інших країн. Один з еталонів зберігається в Петербурзі, у спеціально обладнаному будинку. У 1960 р. метр вчені визначили через постійну величину, яка залишалася незмінною за будь-яких умов, – довжину світлових хвиль. 12 січня 1968 р. *новий метр* було затверджено й на території колишнього СРСР.

Щодо одиниць вимірювання маси. Слово «**кілограм**» походить від французького слова «*kilogramme*», яке в свою чергу утворилося з грецьких слів «χίλιοι» (*chilioi*), що означає «тисяча» і «γράμμα» (*gramma*), що означає «маленька вага».

З історії відомо, що рідкі, сипучі, тверді тіла вимірювали діжками, коробами, кулями, мішками, відрами, кружками. Як показують зображення, які дійшли до нас, для підйому великих вантажів в Єгипті і у Вавилоні за 2000 років до н.е. використовувався важіль. Знання щодо застосування важеля покладені в основу винаходу терезів. Хто і коли винайшов терези, невідомо. Ймовірно, цей винахід було зроблено багатьма народами незалежно один від одного. Для зважування тіл на терезах потрібно мати гирі. У древніх народів ними були зерна рослин, каміння тощо. Найбільшою одиницею маси в Стародавньому світі був «*бітлу*» (він становив приблизно 30 кг 650 г). Інші одиниці маси були отримані розділенням *бітлу* на частини. Частина *бітлу*, яка дорівнювала приблизно 0,5 *кг*, отримала назву «*мана*», а маса тіла, що в 60 разів менша мани, називалася «*сикля*» (приблизно 8,5 г). Від вавилонських часів дійшли до нас зразкові гирі двох видів: важкі, зроблені з бронзи, що мали вигляд левів, і легкі, зроблені з каменю, що мали вигляд гусей або качок.

Найдавнішою одиницею маси ще у Київській Русі була «*гривня*», її маса становила 68,22 г. *Гривня* дорівнювала арабській одиниці ваги – «*ротль*». Згодом основними одиницями маси стали: фунт (рівний 6 гривням), пуд (рівний 40 фунтам). Для зважування золота використовували золотник, який становив 1/96 частину фунта. До кінця XVII ст. на території східної Європи склалася своя система мір маси:

ласт дорівнював 72 пудам (приблизно рівний 1,18 т);

берковець становив 10 пудів (приблизно рівний 1,64 ц);

пуд дорівнював приблизно 40 великим Гривенкам (або фунтам), або 80 малим Гривенкам, або 16 безмінам (безмін дорівнює приблизно 16,38 кг);

безмін рівний 5 малим Гривенкам або пуда, що приблизно становило 1 кг;

фунт рівний 2 малим Гривенкам, або 32 лотам, або 96 золотникам (приблизно рівний 409,51 г);

лот або 3 золотника, рівний приблизно 12,8 г;

золотник, рівний 96 часток або приблизно 4,3 г;

частка, приблизно рівна 44,4 мг.

Стародавніми мірами рідини були бочка і відро; в бочці містилося 10 відер води, а у відрі було 33 фунта води або приблизно 12,3 дм^3;

чверть для сипучих і рідких тіл містила 209,9 $дм^3$;

четверик, рівний $\frac{1}{8}$ чверті, приблизно рівний 26,2 $дм^3$;

гарнець – $\frac{1}{8}$ четверика, рівний приблизно 3,3 л.

У середньовіччі на Русі вже звертають увагу на правильне зважування. Про це свідчать княжі устави, які наказували: «Всяческая мерила и спуды, и свеси, и ставила блюсти без пакости, ни умалити, ни умножити».

В Англії в XIV – XVI ст. з’являється в якості одиниці маси *гран* і *карат*. 1 *гран* – маса однієї зернини, а 1 *карат* приблизно дорівнював масі насіння одного з видів бобів (0,2 г).

У ті давні часи система мір і ваги була невпорядкованою і відношення між одиницями маси були настільки складні, що утруднювали будь-які розрахунки. З утворенням світового ринку з’явилася необхідність приведення всіх мір і ваг до єдиної системи. У 1788 – 1789 рр. вчені Франції відгукнулися на запити суспільства і створили єдину систему мір «для всіх часів і народів».

7 квітня 1795 р. грам був прийнятий у Франції як «абсолютна мірка об’єму чистої води, рівного кубу [з ребром] в соту частину метра, і при температурі танення льоду». Ідея використовувати заданий об’єм води для визначення одиниці виміру маси була запропонована англійським філософом Д. Вілкінсом у його есе в 1668 р. як спосіб зв’язати масу і довжину. До речі, слово «есе» походить від пізньолатинського *exagium* – «ваги», «зважування», який у свою чергу йде до латинського дієслова *exigo* – «оцінювати», «вимірювати».

Оскільки торгівля і комерція зазвичай мають справу з предметами, маса яких набагато більша одного грама, і оскільки стандарт маси, виготовлений з води, був би незручний в обігу і збереженні, було наказано відшукати спосіб практичної реалізації такого визначення. У зв’язку з цим був виготовлений тимчасовий еталон маси у вигляді металевого предмета в тисячу разів важчий, ніж грам – 1 *кілограм*.

У цей же час науковцям була доручена робота з необхідною точністю визначити масу кубічного дециметра (літра) води. Хоча прийняте визначення кілограма вказало температуру води 0°С – це дуже стійка температурна точка, але французький хімік Луї Лефевр-Жіно та італійський натураліст Джованні Фабброні після кількох років досліджень вирішили перевизначити найбільш стійку точку води в стандарті 1799 р. Вони визначили температуру, при якій вода має найбільшу щільність у 4° С, і зазначили, що 1 $дм^3$ води при максимальній щільності еквівалентний 99,9265% маси тимчасового еталона кілограма, виготовленого чотири роки тому.

Відповідно до прийнятих визначень був виготовлений платиновий еталон кілограма у вигляді циліндричної гирі з платино-іридієвого сплаву (90% платини, 10% іридію). Цей стандарт отримав назву «архівний кілограм». Міжнародний прототип (еталон) кілограма, зберігається в Міжнародному бюро мір і ваг, розташованому в м. Севр. Міжнародний еталон кілограма практично не піддається якомусь переміщенню або використанню. Його копії зберігаються в національних метрологічних установах по всьому світу. У 1889, 1948, 1989 і 2014 роках проводилися верифікації копій з еталоном з метою забезпечити єдність обчислення маси щодо еталона.

Третьою основною одиницею Міжнародної системи є одиниця часу ***секунда.*** Вона набагато старша за метр.

Проблема простору і часу займала думки людини не одне тисячоліття. Грецький філософ Аристотель (384 – 322 рр. до н.е.) звернув увагу на те, що в навколишній природі самим невідомим є час: ніхто не знає, що таке час і як ним управляти. З незапам'ятних часів людина постала перед необхідністю орієнтуватися в часових інтервалах і вміти їх вимірювати. Завдання щодо обчислення часу і встановлення точки його відліку залишається невирішеним і в наші дні.

Відомо, що в Вавилоні 2000 років до н.е. були «звіздарі» – спостерігачі за небосхилом; вони внесли впорядкованість у тимчасове орієнтування, від них до нас прийшов відлік часу.

Для визначення тривалості інтервалів між подіями люди у стародавні часи робили прив'язку до певних постійних природних явищ. Такими явищами були зафіксовані період обертання Землі навколо Сонця, яка визначала річну розмірність, і обертання Землі навколо своєї осі, яка визначала добу.

Доба мала дві частини: світлу й темну – день і ніч. Оскільки у Стародавньому Єгипті існувала дванадцяткова система числення, то вже за 2000 р. до н.е. добу вони ділили на 24 частини, приблизно поділених на денну й нічну частини. В силу різної тривалості нічного и денного періодів у різні пори року тривалість єгипетської години була величиною змінною.

Грецькі астрономи періоду елліністичної Греції Гіппарх і Птолемей ділили день на основі шістьдесяткової системи числення і також використовували усереднений час ($^1/_{24}$ доби). У Вавілоні після 300 року до н. е. день ділився на 60 частин (оскільки у Вавілоні використовувалася шість десяткова система числення), отриманий відрізок – ще на 60, потім – ще раз на 60 і т. д. Отже, година була поділена на 60 рівних частин. Так з'явилася нова одиниця виміру – *хвилина*, яка в свою чергу була поділена ще на 60 рівних частин. Так з'явилася *секунда*, як $^1/_{3600}$ частина години. Така основа для обрахування часового відрізка 1*сек* існувала до 1960 року. Однак це визначення не задовольнило вчених. У 1967 р. секунду визначили через властивості основного стану атому цезія-133.

Важливим кроком у фіксації часових подій стало створення *календаря.* Він визначив хронологічну систему обліку подій. Ініціатива створення єдиної хронології для західних країн за роками, а не за династіями належить видатному давньогрецькому математику, філософу і філологу Ератосфену Киренському. Його по праву вважають батьком хронології.

За дорученням римського імператора Юлія Цезаря в 46 р. до н.е. Олександрійські астрономи Созиген і Флавій (з Риму) розробили сонячний календар, відомий під назвою юліанського.

Календар – це система відліку днів, місяців, років (від латинського «calendae» – перший день місяця, про який повідомляли народу на площах Римської держави).

Оскільки Земля робить повний оберт навколо Сонця за 365 діб 5 годин 48 хвилин і 45,5 секунд, то рік в юліанському календарі виявився довшим істинного на 11 хв. 14 с. Це привело до того, що за 128 років у календарі накопичувалася одна зайва доба.

У 1582 р. лікар Ліліо з Верони (Італія) представив розрахунки, з яких було зрозуміло, що за минулий період людство втратило приблизно 10 діб часу, і переконав папу Григорія XIII в необхідності переходу на новий стиль. Реформою пропонувалося день після 4 жовтня 1582 р. вважати п'ятнадцятим жовтня. Одночасно слід з кожних 400 років викидати 3 дні, тобто з року, число сотень якого не ділиться на 4. Роки 1700, 1800, 1900, 2100, 2200 і т. д. вважати простими, а не високосними. Таким чином, відставання від астрономічного року становить всього 24 секунди, тобто помилка в одну добу нагромадиться лише за 3200 років.

На території Російсько Імперії указом Петра І в 1700 р. було введено юліанський календар, яким користувалися до 1918 р. До цього часу розбіжність між юліанським і григоріанським календарем становила вже13 діб, і тому першим днем після 31 січня 1918 року стали вважати 14 лютого 1918 р.

Цим проблема літочислення не вичерпується. Григоріанський календар, яким ми користуємося тепер, несе в собі сліди не кращих рішень календарного завдання, і проблема удосконалення календаря залишається невирішеною. Й на сьогодні розвиток науки і техніки постійно вносить свої корективи в означення одиниць обчислення часу.

1.2. Аксіоматика додатної скалярної величини

У сучасній математиці зміст поняття «величина» визначено В. Каганом і А. Колмогоровим. Однак, якщо постулати В. Кагана спираються тільки на відношення, що існують між двома елементами множини і фіксуються знаками відношень «=», «>», «<», то в аксіоматиці

А. Колмогорова позначені і властивості порівняння елементів множини, і властивості додавання та віднімання, тобто в ній мова йде про додатні скалярні величини. А. Колмогоров зазначав, що початкове поняття про величини є результатом узагальнення уявлень про такі конкретні поняття як довжина, площа, об'єм, маса та ін. Математичні поняття змінної і функції є не що інше, як абстракції конкретних змінних величин і залежностей між ними. Тому кожен конкретний вид величини пов'язаний з певним способом порівняння фізичних тіл або інших об'єктів. У геометрії, наприклад, відрізки порівнюються шляхом накладення, що приводить до поняття довжини (довше – коротше), у фізиці поняття «величина» використовується для опису фізичних властивостей об'єктів, пов'язаних з переміщенням і зміною самого об'єкта, впливом на нього інших об'єктів та ін.

У сучасній математиці існує декілька підходів до визначення поняття скалярної величини: в одному випадку вона визначається як функція із заданими властивостями, в іншому – як множина об'єктів з певною сукупністю властивостей, в третьому – просто ототожнюється з числом. У словнику С. Ожегова «*Величина – це те (предмет, явище і т.п.), що можна виміряти, обчислити. Нескінченно мала величина, рівні величини*». У тлумачному словнику Т. Єфремової величина визначається як «*одне з основних математичних понять, яке відображає ідею вимірювання об'єктів, що змінюються*». Н. Віленкин описує величину, як *властивість певної множини об'єктів, на якій визначена операція вимірювання.* У Великій Радянській Енциклопедії «*Величина – це математичне поняття,* яке *описує об'єкти, для яких може бути визначено відношення нерівності та суть операції додавання, а також виконується низка властивостей, включаючи аксіоми Архимеда і неперервності».* У Тлумачному словнику Д. Ушакова «*Величина – усе, що можна виміряти й обчислити*». У Сучасній Енциклопедії: «*Величина – це узагальнення конкретних понять: довжини, площі, маси та ін.*». Аналогічне визначення й у Великому Енциклопедичному словнику. У Тлумачному словнику С. Кузнєцова: «*Величина – це розмір (об'єм, площа, протяжність та ін.) якогось об'єкта,* *предмета, що має видимі фізичні межі»*. А таке визначення величини ми читаємо у Математичній енциклопедії: «*Величина – одне з основних математичних понять, що виникло як абстракція від числових характеристик фізичних властивостей. Поняття величини в математиці поряд з поняттями множини, неперервності та ін. може розглядатися як уточнений вираз категорії кількості*».

Як бачимо, характерною особливістю представленого ряду визначень поняття величини є її строкатість. Їх аналіз з одного боку свідчить про взаємне доповнення одного іншим, що надає можливість деталізовано розглядати поняття величини, а з іншого – значно ускладнює усвідомлення суті самого поняття, робить його розмитим, недостатньо конкретним, багатозначним, що значно ускладнює його теоретичне й практичне використання. Особливо така багатозначність ускладнює усвідомлення поняття величини в освітній сфері. Логіка ж будь-якого визначення вимагає лаконічності й повноти, тобто відображення у визначенні всіх родових і видових ознак, тому з логіко-дидактичних позицій виникає потреба у коректуванні визначення поняття величини. Таку можливість нам надає комплексний аналіз наведених визначень.

Як бачимо, ключовим елементом у більшості визначень є операція вимірювання. У чому ж її суть? Які її властивості? Саме відповідь на ці питання й розкриває змістову сутність поняття «величина».

Вимірювання – це сукупність дій, які виконуються за допомогою засобів порівняння заданого об'єкта з якимось іншим об'єктом з тієї ж множини, який умовно прийнято за одиницю виміру для визначення числового значення вимірюваного об'єкта у визначених одиницях виміру.[5/] Під *одиницею виміру* розуміється умовно вибраний об'єкт (на договірних умовах), якому у відповідність ставиться число 1. Тобто, у процесі такого порівняння встановлюється відповідність між вимірюваними об'єктами та множиною чисел. Якщо одиниця виміру (мірка) «вміститься» в заданому об'єкті цілу кількість разів, то результат виміру (міра) буде виражений

[5/] Энциклопедический словарь. – М., «Советская энциклопедия», 1984. – С. 484.

цілим числом. Якщо ж одиниця виміру «не вміщується» в обраному об'єкті цілу кількість разів, то для вираження результату вимірювання треба розширити запас чисел, тобто ввести числа, відмінні від натуральних.

В якості вимірюваних можуть виступати об'єкти різного походження: геометричного, фізичного, хімічного, мовного та ін. Серед найбільш часто вимірюваних об'єктів геометричної природи можна назвати відрізок, поверхню, тіло; фізичної природи – масу, швидкість, час, напругу, силу, потужність та ін.; хімічної – реакційну активність, насиченість, валентність і т.д.

Нехай *P* – певна множина, у якій визначено відношення *еквівалентності* ($a \sim b$) і відношення «*складатися з*» ($a = b \oplus c$). Говорять, що *на множині P визначена величина, якщо на цій множині можна встановити систему вимірювання,* тобто кожному елементу *a* цієї множини можна поставити у відповідність певне число *f(a)* таке, що виконуються умови:

1) *якщо* $a \sim b$, *то* $f(a)= f(b)$;

2) *якщо* $a = b \oplus c$, *то* $f(a)= f(b) + f(c))$;

3) *певному елементу **e** множини P відповідає число* 1*;*

4) *якщо в множині P встановлені дві системи вимірювання, які задовольняють умовам* 1–3*, тобто довільному елементу **a** з множини P відповідає число f(a) в першій системі вимірювання і число* $f_1(a)$ *в другій, то існує таке додатне число **k**, що* $f_1(a) = \boldsymbol{k}\cdot f(a)$[6/]. Із цих умов випливає наслідок: нехай у певній системі вимірювання двом різним елементам *a* і *b* з множини *P* відповідає одне й те саме число, тобто *f(a) = f(b).* (*) Розглянемо іншу систему вимірювання, яка задовольняє тим же умовам, і в якій елементам *a* і *b* відповідають числа $f_1(a)$ і $f_1(b)$. Тоді існує додатне число *k* таке, що $f_1(a) = \boldsymbol{k}\cdot f(a)$ і $f_1(b) = \boldsymbol{k}\cdot f(b)$. З отриманої рівності, а також з рівності (*) випливає, що $f_1(a) = f_1(b)$. Тобто, якщо в певній системі вимірювання, яка задовольняє умовам 1 – 4, двом різним елементам *a* і *b*

[6/] Ляпин Е. С. Алгебра и теория чисел / Е. С. Ляпин, А. Е. Евсеев. – М., Просвещение, Ч. 1. –1974. – 342 с.

[7/] Там же.

відповідає те саме число, то те ж число буде їм відповідати і в будь-якій системі вимірювання, що відповідає зазначеним умовам. Такі елементи називаються *рівновеликими.* Відношення *рівновеликості є* відношенням *еквівалентності* [7/].

Отже, підсумовуючи сказане, ***вимірювання*** можна визначити як ***порівняння двох елементів однієї множини, одному з яких за домовленістю ставиться у відповідність число 1.***

Математика початкових класів базується переважно на вимірюванні об'єктів геометричної та фізичної природи. Тому, виходячи з характеру нашої дисципліни, зосередимо увагу на цих об'єктах.

Узявши, наприклад, сукупність відрізків Ω та порівнюючи їх з геометричними об'єктами якоїсь іншої сукупності, ми відмічаємо загальну властивість відрізків, відмінну від властивостей інших геометричних об'єктів – усі відрізки мають подовженість. Але вони не мають поверхні, об'єму, маси і т.д. Аналогічно, розглянувши сукупність площинних об'єктів, ми відмічаємо, що всі вони мають поверхню і не мають властивостей, які притаманні відрізкам або просторовим тілам. Але розглядаючи елементи однієї множини, наприклад, відрізки, ми можемо сказати, що кожні два відрізка (аналогічно і поверхні, і ємності та ін.) або рівні між собою, або нерівні, тобто при накладанні один на другий вони співпадають, або не співпадають. Якщо ж не співпадають, то один буде більший за інший, а другий, відповідно, буде менший. Згідно зазначених вище умов, довшому відрізку буде відповідати і більше число. Тобто елементи однієї множини можна порівнювати. Завдяки встановленню взаємно-однозначної відповідності між елементами множини і множиною чисел таке порівняння можна виконувати і не накладаючи один елемент на інший, тим більше, що таку операцію в більшості випадків неможливо виконати. Достатньо порівняти числа, що відповідають цим елементам.

Отже, елементи кожної із зазначених множин мають певну загальну властивість і за цією властивістю їх можна порівнювати. Ця загальна властивість елементів заданої множини і називається *величиною.*

Як ми вже говорили вище, про величину, як загальну властивість об'єктів матеріальної природи, зазначалося ще в давньогрецький період. Ще більшу конкретність у визначенні величини ми вбачаємо у визначенні В. Кагана, який розглядаючи такі величини, як довжина, щільність, температура, ставить питання про те, які загальні властивості ці поняття мають, і показує, що вони відносяться до *<u>сукупності множин однорідних предметів</u>*, зіставлення елементів яких дозволяє застосувати відношення порівняння, виражені термінами «більше», «дорівнює», «менше»[8/].

Розглядаючи усі наведені визначення з різних джерел, є підстава стверджувати, що усі вони мають своє відображення у визначенні В. Кагана, яке в згорнутому вигляді представляється у формі: «***Величиною А називається загальна властивість елементів певної множини M = {a, b, c, ..., k}, між якими існує відношення рівності і нерівності***».

Для розкриття властивостей скалярних величин визначимо місце вимірювання у понятті «величина».

Нехай задана певна множина ***M = {a, b, c, ... e, ..., k},*** елементи якої мають величину ***A***. Виберемо довільний елемент ***e*** цієї множини і назвемо його *одиничним* або *міркою,* тобто поставимо йому у відповідність число 1. Якщо при порівнянні елемента ***e*** з будь-яким елементом ***a*** виявиться, що елемент ***a*** буде в ***n*** разів більший за одиничний елемент ***e***, то це число ***n*** будемо називати *мірою елемента **a***. Позначимо її $n = me(\boldsymbol{a})$, де n – міра елемента ***a***, m – кількість вміщень одиничного елемента ***e*** в елементі ***a***. Тут необхідно мати на увазі, що при переході до іншої одиниці виміру, тобто якщо за одиничний елемент прийняти якийсь інший елемент, зміниться число $m(\boldsymbol{a})$, хоча сам елемент залишається незмінним. Очевидним є те, якщо $\boldsymbol{a} = me$, і $\boldsymbol{a} = ne$, то $m = n$, тобто один і той же елемент не може мати різні міри при заданій одній одиниці виміру.

Друга властивість пов'язана з переходом від однієї одиниці виміру до

[8/] Каган В. Ф. Очерки по геометрии. –М., –1963. – С. 101.

іншої. Ми знаємо, якщо при вимірюванні, наприклад, відрізка метрами ми отримали число *p,* то при вимірюванні його сантиметрами ми отримаємо число *100p.* Як це виглядає в узагальненому вигляді?

Нехай $\boldsymbol{e_1}$ *і* $\boldsymbol{e_2}$ – дві одиниці виміру певного елемента множини *M,* що має величину *A*, причому $\boldsymbol{e}_1 = n(\boldsymbol{e_2})$, де n – натуральне число. Якщо при вимірюванні елемента $\boldsymbol{a}$ одиницею $\boldsymbol{e_1}$ ми отримали число *p,* тобто $\boldsymbol{a} = p\boldsymbol{e_1}$, то при вимірюванні того ж елемента одиницею $\boldsymbol{e_2}$ ми отримаємо число *pn,* тобто $\boldsymbol{a} = pn\boldsymbol{e_2}$**.** Позначимо міру елемента $\boldsymbol{a}$ при вимірюванні одиничним елементом $\boldsymbol{e_1}$ через $m_1(\boldsymbol{a})$, а міру того ж елемента при вимірюванні елементом $\boldsymbol{e}_2$ – через $m_2(\boldsymbol{a})$. Тоді $m_1(\boldsymbol{a}) = p$ і $m_2(\boldsymbol{a}) = pn$. Ураховуючи, що міра елемента $\boldsymbol{e}_1$ при вимірюванні елементом $\boldsymbol{e_2}$ дорівнює *n,* тобто $m_2(\boldsymbol{e}_1) = n$, рівність $m_2(\boldsymbol{a}) = pn$ можна записати так: $m_2(\boldsymbol{a}) = m_1(a)\cdot m_2(\boldsymbol{e_1})$.

Отже, *якщо елемент* $\boldsymbol{a}$ *кратний елементу* $\boldsymbol{e_1}$*, а елемент* $\boldsymbol{e_1}$ *кратний елементу* $\boldsymbol{e_2}$*, то елемент* $\boldsymbol{a}$ *кратний елементу* $\boldsymbol{e_2}$ і при цьому виконується рівність $m_2(\boldsymbol{a}) = m_1(a)\cdot m_2(\boldsymbol{e_1})$. Ця властивість називається *мультиплікативністю* [9].

<u>*Означення.*</u> ***Якщо для елементів a і b існує такий елемент x, який міститься в них обох цілу кількість разів, то елементи a і b називаються сумірними. Якщо ж такого елементу x не існує, то елементи a і b називаються несумірними.***

Якщо будь-який елемент $\boldsymbol{a}$ сумірний з одиничним відрізком, то його міра буде виражатися цілим числом. Але може статися, що в елементі $\boldsymbol{a}$ цілу кількість разів міститься не весь одиничний елемент, а його якась частина. У цьому разі постає задача розбиття одиниці виміру на менші рівні частини і міра елементу $\boldsymbol{a}$ буде виражена вже не цілим числом, а числом іншого виду, так званими *дробами.*

Отже, в узагальненому вигляді *вимірювання – це встановлення співвідношення між мірою і міркою* (усі три слова мають один корінь – *мір*).

На основі визначення понять «*вимірювання*» і «*величина*» випливають

---

[9] Каган В. Ф. Очерки по геометрии. –М., –1963.

наступні властивості величини:

1. Які б не були два елементи a і b множини M, що мають величину A, їх можна порівнювати, тобто між ними можна встановити одне з трьох відношень: $a < b$, $a = b$ або $a > b$.

У свою чергу порівняння величин має такі властивості:

а) $a = a$ – рефлективність рівності;

б) невірно, що $a < a$ – антирефлексивність нерівності:

в) якщо $a > b$, то $b < a$ – асиметричність нерівності;

г) якщо $a = b$, то $b = a$ – симетричність рівності;

д) якщо $a = b$ і $b = c$, то $a = c$ – транзитивність рівності;

е) якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$ – транзитивність нерівності;

2. Якщо елементи множини M мають величину A, то над ними можна *виконувати операцію додавання.*

Будемо вважати, що відрізок **a** розбитий на відрізки $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... , **a** і він є їхнім об'єднанням, причому ніякі два з них не мають спільних внутрішніх точок. У цьому разі відрізок a будемо називати *сумою* відрізків $a_1, a_2, \dots, a_n$ і записувати $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ (**). Властивість відрізка бути представленим у вигляді суми декількох відрізків називається *адитивністю.* Вона розуміється так: якщо якийсь елемент c з множини M може бути складений з елементів a і b з тієї ж множини, то говорять, що величина A елемента c є *сума* величин елементів a *і* b, тобто, якщо елемент a має величину a, а елемент b має величину b того ж порядку, то сума елементів $a + b = c$ має відповідно величину $c = a + b$. Згідно з умовою 2 вимірювання величин (*якщо* $a = b \oplus c$, *то* $f(a) = f(b) + f(c)$) сума відрізків (**) характеризується сумою чисел, що відповідають цим відрізкам, тобто $f(a) = f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)$, тому далі, говорячи про операції зі скалярними величинами, ми будемо виконувати операції з числами, що їм відповідають.

Ця властивість надає можливість дещо по іншому сформулювати поняття рівноскладених і рівновеликих фігур:

Означення 1. Рівноскладеними фігурами називаються фігури, які можна розрізати на однакову кількість відповідно рівних частин.

Означення 2. Рівновеликими фігурами називаються такі, які мають однакову площу (довжину, об'єм).

Логічним висновком з цих означень є твердження, що *рівноскладені фігури завжди рівновеликі*[10/].

Додавання величин має такі властивості:

а) *які б не були елементи **a** і **b**, що мають величину **A**, завжди існує їхня єдина сума **c** = **a** + **b**, яка має теж величину **A**;*

б) *має місце комутативний закон:* $a + b = b + a$;

в) *виконується асоціативний закон:* $(a + b) + c = a + (b + c)$;

г) *виконується властивість монотонності, тобто якщо* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, *і* $\boldsymbol{c}$ *– певний елемент, з тієї ж множини, то* $a + c = b + c$, *якщо ж* $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$, *то* $a + c > b + c$, *якщо ж* $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, *то* $a+c < b + c$;

д) *якщо* $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$, *то існує єдиний елемент* $\boldsymbol{c}$ *такий, що* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$. *У цьому разі елемент* $\boldsymbol{c}$ *називається різницею елементів* $\boldsymbol{a}$ *і* $\boldsymbol{b}$ і записується $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, *який має ту ж величину **A**.*

3. *Виконується дія множення*. Причому, при множенні елемента ***a*** з множини ***M***, що має величину ***A***, на певне натуральне число *n*, отримується елемент ***b*** з тієї ж множини, тобто такий, що теж має величину ***A***. Він представляється як сума $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} + \ldots + \boldsymbol{a} = n \cdot \boldsymbol{a}$. Це випливає з попередньої властивості. Наприклад, якщо відрізок ***a*** помножити на число *n*, то і його довжина множиться на число *n* і в результаті отримаємо теж довжину (аналогічно площу, масу, вартість і т.д.). Тобто, якщо величину помножити на число, то отримаємо величину того ж порядку.

Якщо ж помножити елемент ***a***, що має величину ***A***, на елемент ***b***, що має величину ***B*** (при цьому не має значення $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, чи $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$), то в результаті отримаємо елемент ***c***, який має величину ***C***. Він відрізняється і

[10/] Виленкин Н. Я. Математика / Н. Я. Виленин, А. М. Пышкало, Л. П. Стойлова, В. В. Рождественская. – М., Просвещение, 1977. – 352 с.

від величини $\boldsymbol{A}$**,** і від величини $\boldsymbol{B}$. Ця операція не підпадає під властивість 2. Наприклад, якщо довжину помножити на довжину ($\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$), то в результаті отримаємо площу; якщо ціну помножимо на кількість ($\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$), то отримаємо вартість, якщо площу помножимо на довжину ($\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$), отримаємо об'єм.

4. Виконується властивість необмеженого дроблення. Тобто для кожного елемента $\boldsymbol{a}$**,** що має величину $\boldsymbol{A}$ і будь-якого натурального m завжди знайдеться такий елемент $\boldsymbol{b}$ з тієї ж множини, що $\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{b}$. У цьому разі елемент $\boldsymbol{b}$ називають m-ною частиною елемента $\boldsymbol{a}$, тобто $\boldsymbol{b} = \frac{1}{m}\boldsymbol{a}$.

5. Аксіома Архімеда. Нехай $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ – два елементи множини $\boldsymbol{M}$, що мають величину $\boldsymbol{A}$, і нехай $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$. Тоді завжди знайдеться таке натуральне число n, що $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}n$.

6. Якщо дві послідовності величин $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ і $b_1 > b_2 > b_3 > \ldots$ мають властивість, що для будь-якої величини c при достатньо великому номері n, $b_n - a_n < c$, то існує тільки одна величина x, яка більша за всіх a_n і менша за всіх b_n (аксіома неперервності).

Величини бувають однорідними і різнорідними.

Означення 1. Величини називаються однорідними, якщо вони характеризують однакові властивості елементів заданої множини. Наприклад, усі відрізки мають довжину.

Означення 2. Величини називаються різнорідними, якщо вони характеризують різні властивості елементів множини. Наприклад, довжина і час.

Порівнювати, як і додавати, можна лише однорідні величини, наприклад, довжину з довжиною. Різнорідні величини ані порівнювати, ані додавати не можна, наприклад, час і масу, довжину і масу.

Отже, при вимірюванні мірка і міра є однорідними величинами, які характеризують елементи однієї й тієї ж множини.

Число, що випливає як результат вимірювання даного конкретного елемента одиницею виміру цього ж роду, називається *числовим* *значенням даної величини.*

Отже, якщо заданий об'єкт (***a***) і обрана одиниця виміру цього об'єкту (***e***), то в результаті вимірювання об'єкта ***a*** знаходять таке дійсне число (***x***), яке будучи помноженим на одиницю виміру ***e***, дасть числове значення об'єкта ***a***, тобто $\boldsymbol{a = x \cdot e}$. *Число **x** називають числовим значенням об'єкта **a** при одиниці виміру **e**, тобто величиною об'єкта **a**.* Числове значення скалярної величини є завжди додатне число.

Отже, будь-яку величину можна представити у вигляді добутку числа $x \in R_+$ і одиниці виміру цієї величини.

Наприклад: 21, 3 *кг* = 21, 3 · 1 *кг*; 2,7 *см* = 2, 7 · 1 *см*; 5 $м^2$ = 5· 1 $м^2$ і т. д.

Використовуючи цей висновок, а також спосіб знаходження числового значення величини, можна обґрунтувати процес переходу від однієї одиниці виміру величини до іншої одиниці виміру величини того ж роду. Наприклад: Виразити $\frac{4}{15}$*год* у хвилинах.

Розв'язання: $\frac{4}{15}\,год = \frac{4}{15} \cdot 1\ год = \frac{4}{15} \cdot 60\ хв = 16\ хв$, оскільки 1 *год* = 60 *хв.*

Відповідь: $\frac{4}{15}\,год = 16\ хв.$

Задача вимірювання дозволяє звести порівняння величин до порівняння їх числових значень, а операції над величинами – до відповідних операцій з числами.

1. Якщо однорідні елементи *a* і *b* виміряні за допомогою однієї одиниці виміру *e*, то відношення між величинами цих елементів *a* і *b* будуть такими ж, як і відношення між числовими значеннями цих величин, і навпаки[11/]: $a = b \Leftrightarrow m_e(a) = m_e(b)$, $a < b \Leftrightarrow m_e(a) < m_e(b)$,

$$a > b \Leftrightarrow m_e(a) > m_e(b),$$

де $m_e(a)$ — числове значення величини *a;* $m_e(b)$ – числове значення величини *b.* Наприклад, якщо об'єм тіла *a* дорівнює 5 $см^3$, а об'єм тіла *b* дорівнює 7 $см^3$, то можна стверджувати, що при однаковій щільності

[11/] Стойлова Л. П., Пышкало А. М. Основы начального курса математики. – М., 1988. – С. 280.

маса тіла a менша за масу тіла b, оскільки $5 < 7$.

2) Якщо об'єкти a і b виміряні за допомогою одиниці e, то, щоб знайти числове значення суми $a + b$, достатньо додати числові значення величин a і b: $a + b = c \Leftrightarrow m_e(a + b) = m_e(a) + m_e(b)$.
Наприклад, якщо $a = 3$ *кг*, $b = 7$ *кг*, то $a + b = 3$ *кг* $+ 7$ *кг* $= (3+7)$ *кг* $= 10$ *кг*.

3) Якщо об'єкти a і b такі, що $b = x \cdot a$, де $x \in R_+$ і об'єкт a виміряний за допомогою одиниці e, то, щоб знайти числове значення величини об'єкта b при одиниці виміру e, достатньо число x помножити на $m_e(a)$ – числове значення величини об'єкта a, тобто:
$b = x \cdot a \Leftrightarrow m_e(b) = x \cdot m_e(a)$. Наприклад, якщо $b = 3a$ і $a = 12$ *см*, то $b = 3 \cdot a = 3 \cdot (12$ *см*$) = (3 \cdot 12)$ *см* $= 36$ *см*.

1. 3. Загальні характерні властивості величин у контексті їх вивчення у початковій школі

Успішне вивчення математики на початковому етапі навчання залежить як від методів навчання, так і від математичної підготовки вчителя в рівній мірі. Власне, математичний аспект вивчення поняття величини, що пропонується програмою вузівського курсу математики, полягає в розкритті зв'язку математики з курсом методики викладання математики і курсом математики початкової школи.

Оскільки будь-яка величина має якісні та кількісні характеристики, то в початковій школі можливий перехід від опису властивості предметів (мати довжину, масу і т. д.) до кількісного вивчення властивостей об'єктів, які можна виміряти, визначити числом або сукупністю чисел, описати символами і представити у вигляді певних структур й т. п.

Величини являють собою або узагальнене, родове поняття – загальна властивість елементів певної множини, або конкретну величину (масу, довжину, масу і т. д.) – індивідуальну характеристику об'єкта чи явища. Взагалі ж величина – це математичне поняття. Важливість поняття величини обумовлена її використанням в різних сферах людського життя.

Сучасні уявлення про адитивно-скалярні величини і аксіоматику цих величин викладені в роботах А. Колмогорова і відомого французького математика А. Лебега.

Що ж таке «величина»? Спираючись на інтуїтивні уявлення учнів початкової школи про величину, слід звернути увагу на те, що одна з існуючих особливостей навколишньої дійсності – це безперервна і різноманітна її зміна. Змінюється погода, вік людини, змінюються умови життя людей, тваринний і рослинний світ. Щоб дати наукове обґрунтування цих процесів потрібно знати їх певні властивості. Наприклад, властивість предмета мати протяжність – довжина; швидкість – властивість такого явища, як рух, маса – властивість тіла або речовини та ін. Поняття величини, як й інші поняття математики, формувалося поступово в результаті абстрагування від якісних особливостей властивостей реальних об'єктів. Тому величина – це не сама реальність, а відображення властивостей об'єктів навколишньої дійсності. У практиці під величиною зазвичай розуміють не самі елементи множини, а *поняття, введене для розрізнення критеріїв порівняння об'єктів цих множин.* Так виникають поняття «об'єм», «маса», «напруга», «тиск» «час», «температура» та ін.

Раніше ми зазначали, що величини розглядаються не тільки в освітній галузі «Математика». Величина – це загальнопредметне поняття, яке знаходить своє застосування в таких освітніх лініях початкової школи, як інформатика, природознавство, праця та ін. Визначаючи загальнопредметний зміст поняття величини, відзначимо, що *величина – це характеристика, що відображає певні властивості реального світу, тобто властивості предметів, явищ, станів матерії.* Поняття величини відноситься до числа основних природничо-наукових і математичних понять, тому поняття «величина» – загальнонаукове поняття і має загальнокультурне значення. У зв'язку з цим правомірним є вивчення поняття величини в таких загальноосвітніх областях початкової школи, як «Інформатика», «Природознавство», «Праця».

У практиці роботи сучасної початкової школи не розмежовуються поняття «число», «величина», «міра». Це призводить до того, що учні, студенти, нерідко і вчителі ототожнюють такі поняття, як «площа», «поверхня» і «площина», «відрізок» і «довжина відрізка», «площа прямокутника» і «прямокутник», порівнюють числа «за їх величиною», креслять «величину відрізка», «вимірюють величину маси» і т. д. Таким чином, властивості величин приписуються об'єктам, які їх не мають. Учителі, студенти, учні в процесі навчання часто неправильно користуються термінами «величина», «число», «кількість», «значення величини»: бачать один і той же зміст в термінах «величина» і «кількість»; плутають смисл термінів «величина» і «значення величини»; говорять про «величину часу», про «вимір площі фігури» замість обчислення; вживають словосполучення «збільшення величини», «побудуй величину»; «покажи величину», використовують термін «величина числа» і т.д. Помилка полягає в тому, що в цих висловленнях суміщаютьсяя несумісні терміни, оскільки **вимірюються** конкретні об'єкти (відрізок, поверхня, тіло...), а довжина відрізка, площа поверхні, маса тіла – **обчислюється**, оскільки це числова характеристика вимірюваних об'єктів, яка знаходиться в результаті вимірювання або виконання арифметичних операцій.

Для виявлення інваріантного змісту поняття «величина» слід уточнити, в якому значенні вживається термін «величина» в професійному мовленні вчителя, як пов'язані між собою поняття «величина» і «число» і як необхідно користуватися цим терміном в різних ситуаціях.

У тлумачному словнику *С. І. Ожегова* слово «величина» має три значення. Виключаючи третє – переносне значення, зокрема про людину (академік І. Курчатов – це величина у фізиці), наводимо перше і друге значення терміна. Словник подає такі значення. *1. Розмір, обсяг,* *протяжність предмета. Наприклад, площа великої величини. Виміряти величину чого-небудь.* 2. *Величина – це те, (предмет, явище і т.п.), що можна виміряти, обчислити. Нескінченно мала величина, рівні величини.*

На наш погляд, значення поняття «величина» в першому тлумаченні некоректне, оскільки «обсяг», «протяжність» є видовими елементами поняття «розмір», а ряд інших величин взагалі не узгоджуються з поняттям розмір. Природно, що і словосполучення *«Площа великої величини»* невірне, оскільки площа вже сама по собі є величина. У другому тлумаченні взагалі величина ототожнюється з реальними об’єктами: предмет є величина, явище є величина і т. п., що далеко не так.

Таким чином, в розмовній мові відбувається змішання понять «величина», «предмет», «міра», останнє з яких висловлює кількісну характеристику властивостей об’єкта, який вимірюється, виражену у відповідних одиницях виміру. Сказане означає, що математичне розуміння терміна «величина» (воно ж є і словникове значення даного слова) часто підміняється уявленням про кількісну характеристику величини. Поняття «площа», «довжина», «маса», «об’єм» та інші є видовими поняттями родового поняття «величина». Тому, коли йдеться про вимірювання величини, то мається на увазі, що вимірювання стосується загальної властивості об’єкта – бути виміряним. Коли ж мова йде про знаходження числового значення видового поняття, наприклад, площі поверхні, то тут визначальним є вже термін не «вимірювання» площі, а «обчислення» площі поверхні фігури. Саме ж обчислення є не що інше, як знаходження *міри* об’єкта.

Тому вчитель повинен чітко уявляти і доводити до свідомості учнів, що довжина відрізка – це число, що характеризує даний відрізок з кількісної сторони. То є міра відрізка, а сам відрізок – це геометричний образ – частина прямої; прямокутник – фігура, геометричний образ, а площа прямокутника – число, що його характеризує (міра). І т.д.

У професійному мовленні вчителі на підставі загальновживаних значень слово «величина» вживають як мінімум в двох значеннях. До речі, це виходить й з наведеного нами означення величини, нагадаємо його: «Величина – це загальна властивість елементів певної множини, між якими можна встановити відношення рівності і нерівності». Отже, у першій частині означення величина характеризується як певна загальна властивість елементів однорідної множини об’єктів. Для множини відрізків – це довжина, для множини поверхонь – це площа, для множини ємностей – об’єм і т.д. Як зазначає Л. Стойлова[12/], властивість, скажімо, *мати довжину*, стосується об’єктів певного класу, а саме, відрізків. Аналогічно й для об’єктів іншого роду. У той же час, ці об’єкти в межах однієї множини можна порівнювати, тобто, вимірювати, про що свідчить друга частина означення – між ними можна встановити відношення рівності і нерівності. У процесі вимірювання встановлюється кількісна характеристика зазначеної величини. Для відрізка – конкретна довжина (один відрізок більший за другий). Щоб розрізнити два відрізка, ми говоримо, що довжина даного відрізка, скажімо, 5 *см*, а іншого – 10 *см.* У цьому разі ми розуміємо поняття величини в другому значенні – величина, як кількісна характеристика даної властивості стосовно елементів, для яких ця величина є загальною властивістю, яка засвідчує, що другий відрізок удвічі довший за перший.

Якщо у множині об’єктів, для яких ця величина є загальною властивістю, вибраний об’єкт $\boldsymbol{e}$, якому у відповідність поставлено число 1 ($\boldsymbol{e}=1$) – ***мірка***, то виміряти величину $\boldsymbol{A}$ – значить знайти таке додатне число $\boldsymbol{m}$, що $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{m}$. Число $\boldsymbol{m}$ називається кількісним значенням величини $\boldsymbol{A}$ стосовно даних об’єктів. Воно показує, у скільки разів кількісне значення об’єкту, який має величину $\boldsymbol{A}$, більше (менше) одиничного об’єкту $\boldsymbol{e}$**.** Число $\boldsymbol{m}$ називається ***мірою*** об’єкта, який має величину $\boldsymbol{A}$, або просто,

[12/] Стойлова Л.П. Математика. Учебник для студ. высш. учеб. завед. – М., «Академия», 1999. –424 с.

мірою величини ***А***.

Отже, підсумовуючи сказане, учителю слід чітко розрізняти два значення поняття величини:

1-е значення. Під поняттям «величина» розуміється **властивість предмета, об'єкта** бути виміряним, тобто порівняним з іншим об'єктом цієї ж множини:

2-е значення. «Величина» – це характеристика властивості об'єкта, виражена в одиницях виміру (**міра**).

У цьому значенні слово «величина» вживається для вираження числового значення величини як властивості предметів: для відрізків – довжина, для поверхонь – площа, для ємностей – об'єм, для упорядкування подій – час, для руху – швидкість та ін. У цьому значенні термін «величина» є родовим поняттям, до якого названі поняття є видовими. Це можна проілюструвати у вигляді таблиці:

Таблиця 1. 1.

Довжина	*мотузка*	*3 метри*
властивість поняття; ↕ величина в першому значенні	предмет, об'єкт	Кількісне значення (3) ↕ величина в другому значенні

Такий мовний тезаурус вживання терміна «величина».

Отже, по-перше, величина – це така властивість предметів або явищ, яка дозволяє їх порівнювати і встановлювати пари об'єктів, що мають цю властивість, з більшою, меншою або рівною мірою. По-друге, величина – це кількісна характеристика елементів однієї множини, отримана в результаті порівняння – бути більшим чи меншим одного відносно іншого у певну кількість разів, або бути рівним.

Як бачимо, поняття величини є поняттям високого рівня абстракції, який учням початкової школи ще не досяжний. Тому поняття величини в основному розглядається в курсі математики початкової школи у другому значенні, тобто розумінні визначення числового значення властивості об’єкта, тобто **міри** (величина в другому значенні).

Отже, виходячи з цього, а також із загального означення величини, поданого вище, можна сформулювати означення (***у другому значенні***) деяких величин так: «***Довжиною*** *називається* ***міра відрізка*** (мірка – одиничний відрізок)». Це розуміється так: є відрізок, який треба виміряти й інший, який ми приймаємо за одиницю вимірювання, тобто ставимо йому у відповідність число 1 (*мірка*). Шляхом порівняння визначаємо число, яке вказує, скільки разів мірка вкладається у вимірюваному відрізку. Це число є *міра*, тобто числова характеристика вимірюваного відрізка у порівнянні з міркою. Для кожної міри слід указувати мірку. Ця ***міра*** (число з вказаною міркою) і є ***довжина***. За аналогією:

Площею *називається* ***міра поверхні*** (мірка – одинична поверхня).

Об’ємом *називається* ***міра місткості певної ємності*** (мірка – одинична ємність).

Маса. Означення цієї величини дослівно сформульоване І. Ньютоном як *міра кількості матерії, що міститься в речовині*. Пізніше – у фізичному значенні – ***міра інертності тіла*** (мірка – кількість речовини, що знаходиться в стані покою і має певну щільність та вагу). Інше визначення маси для учнів початкової школи, які ще не знають понять «інерція», «матерія», доцільно вживати просто термін «речовина», тобто: ***Масою*** *називається* ***міра кількості речовини об’єкта*** (тіла, рідини)

Час – *міра чергування подій* (мірка – одиничний інтервал між двома певними подіями) і т. д.

Вартість – *міра грошового еквіваленту речі (послуги)* (мірка – ціна – грошовий еквівалент одиниці речі або послуги).

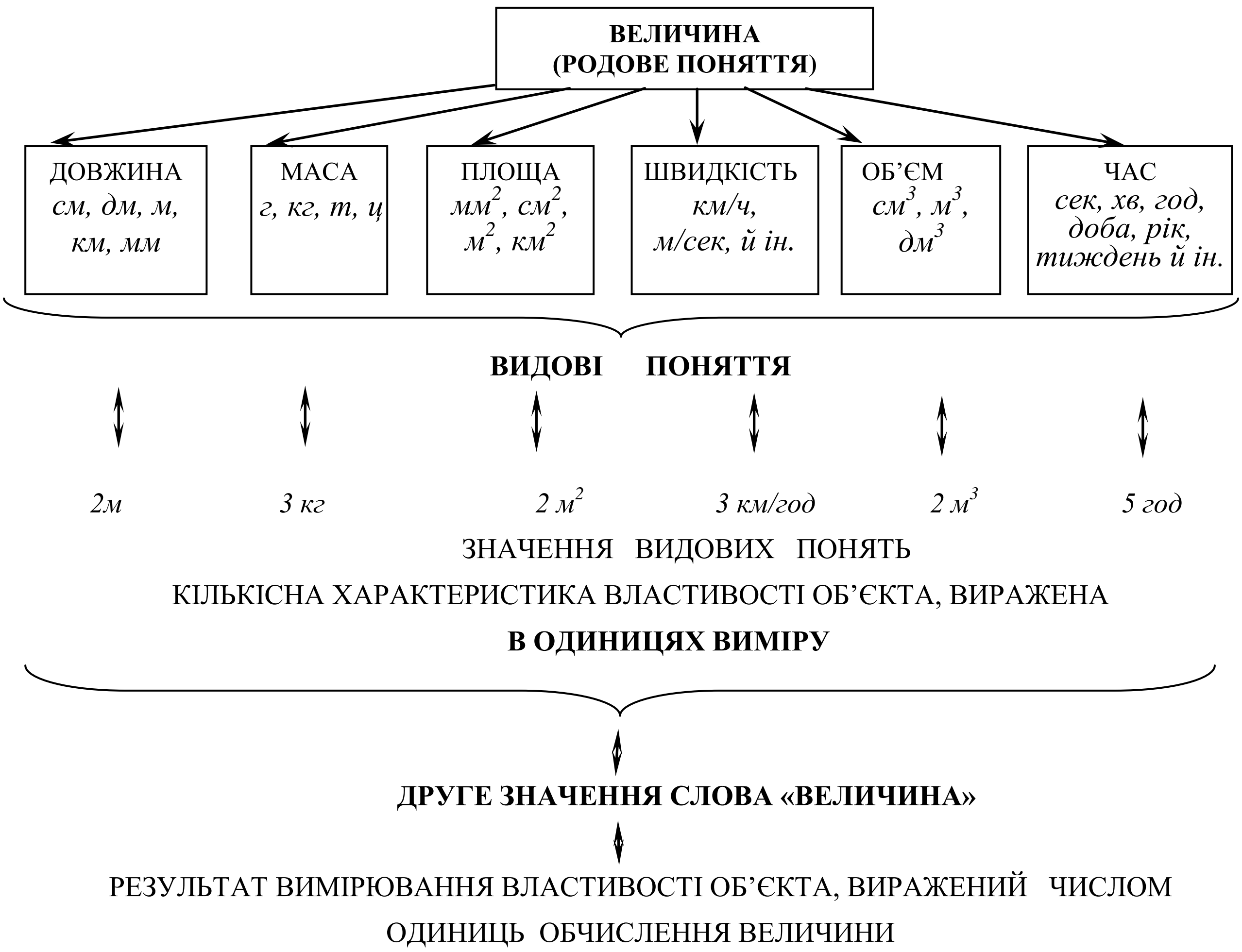
У початкових класах окрім зазначених вивчають ще такі величини, як ***кількість*** (міра наявності об’єкта); на уроках природознавства діти знайомляться з ***температурою,*** як мірою теплового стану речовини (мірка – певний визначений тепловий стан певної речі, наприклад, момент переходу води у твердий стан або газоподібний) та ін.

Використання терміну «величина» в методиці початкового курсу математики, що засноване на лексичних значеннях слова, відображено в схемі 1.2., яка розмежує наукове і побутове поняття, яке висловлюється словом «величина».

Отже, навчання поняттю величини, слід будувати так, щоб було висвітлено загальні властивості величини, які лежать в основі її визначення.

Схема 1. 2.

ПЕРШЕ ЗНАЧЕННЯ СЛОВА «ВЕЛИЧИНА»



Отже, під час вивчення величин, виклад матеріалу слід будувати так, щоб були виявлені загальні властивості величини, які лежать в основі її визначення. Природно, що аксіоматичне визначення поняття скалярної величини в силу того, що воно має високий рівень абстракції, не може бути використано при навчанні учнів початкових класів.

У початкових класах відбувається знайомство з деякими видами величин, з їх властивостями, одиницями вимірювання і методами їх обчислення, що становить, власне, математичний аспект інформативного компонента технології формування поняття «величина». Це поняття величини не слід змішувати з поняттям числа. Число завжди абстрактне, завжди одиничне і не здатне змінюватися. Величина ж є властивістю об’єкта, тому вона в значній мірі схильна до зміни. Різні підходи до визначення поняття скалярної величини дають підставу зробити наступне узагальнення.

1. Скалярна величина – це числова характеристика предметів чи явищ оточуючого світу.

2. Скалярні величини можуть бути різних видів.

3. Скалярні величини одного виду можна додавати і віднімати.

4. Для скалярних величин одного виду характерне відношення порядку.

5. Скалярні величини можна множити на додатне дійсне число, отримуючи в результаті величину того ж виду.

6. Скалярні величини можна множити одну на одну, отримуючи величину іншого виду.

7. Скалярні величини одного виду можна ділити, отримуючи в результаті абстрактне дійсне число, яке є відношенням даних скалярних величин.

8. Для вимірювання об’єктів з метою визначення скалярної величини встановлюється (обирається) відповідна одиниця виміру з множини тих же об’єктів.

9. Числове значення скалярної величини отримується в результаті порівняння після вибору відповідної одиниці виміру.

10. При обчисленні скалярної величина встановлюється її відповідність між конкретною величиною і множиною дійсних чисел, які

є числовим значенням величини обраного об'єкту вимірювання.

11. У процесі обчислення величин виділяють наступні властивості:

а) рівним величинам відповідають рівні числові значення цих величин при одній і тій же одиниці виміру;

б) числове значення суми величин при одній і тій же одиниці вимірювання дорівнює сумі відповідних доданків величин.

12. Запис числових значень величин здійснюється із зазначенням одиниці виміру.

13. Для різнорідних величин операція додавання і відношення порядку не визначені.

14. У множині скалярних величин визначена операція множення и ділення. При множенні величину на величину отримується величина іншого виду (наприклад, в результаті множення довжини на довжину виходить площа, площі на довжина – об'єм).

Отже, по-перше, величина – це певна властивість множини однорідних предметів і явищ.

По-друге, величина – це властивість предметів або явищ, яка дозволяє їх порівнювати і встановлювати пари об'єктів, що мають цю властивість в більшій, меншій або рівній мірі.

По-третє, величина, це кількісна характеристика елементів однорідних величин, яка визначається операцією вимірювання.

Програму вивчення величин в початковій школі не можна співвіднести з наведеними математичними характеристиками, оскільки вони відносяться до високого рівня абстракції. У початковій школі поняття скалярної величини розглядається на інтуїтивній основі, без визначення. Однак, **для вибору ефективного методичного розв'язання завдання формування поняття величини у молодших школярів вчитель сам повинен мати чітке розуміння суті цього поняття і його властивостей.** При цьому представляється можливим знайомити учнів із загальними властивостями скалярних величин на основі дій з предметним дидактичним матеріалом, з подальшою їх систематизацією та узагальненням.

Розглядаючи питання вимірювання об'єктів певної множини і сутність величин, які їх відображають, ми стикаємося з традиційним термінологічним виразом «вимірювання величин». На наш погляд, тут доцільно дати певні пояснення, оскільки, як ми вже обговорювали, поняття величини має два значення.

З виразом «Вимірювання величин» ми стикаємося практично в усіх підручниках, посібниках, статтях на цю тематику. Відомий французький математик Анрі Леон Лебег (1875 – 1941 рр.) свого часу видав працю «Про вимірювання величин»[13/]. Зазначений вираз також зустрічаємо й в навчальних програмах, затверджених Міністерством освіти. Наприклад, у виданні «*Програми для середньої загальноосвітньої школи (1 – 4 класи) // Початкова школа, – К., 2006. – С. 165*» зазначається : «Молодші школярі набувають деяких практичних навичок *вимірювання величин*, вчаться використовувати ... ». У збірнику програм 2011 р. в розділі «*Математика*» зазначається: «Поняття числа безпосередньо пов'язане з *вимірюванням величин*. Завданням змістової лінії «Величини» є ознайомлення учнів із основними *величинами та їх вимірюванням*» (с. 140). Таке ж словосполучення використовується на стор. 139 і 168.[14/]

Аналіз змісту цих висловлень однозначно націлює читача на сприймання поняття величини у **першому значенні**, тобто у значенні загальної властивості об'єктів певного класу, тобто поняття величини тут виступає родовим поняттям для об'єктів різного виду. Видовими ж поняттями виступають довжина, площа, маса, об'єм, час та ін. Вони вже детально розкриваються в змісті навчального матеріалу з позицій визначення числового значення певного виду величини, тобто у **другому значенні** зазначеного поняття, тому в завданнях на встановлення числового значення величини доцільно використовувати термін ***обчислити*** а не *виміряти*: «Обчислити довжину ламаної лінії... (але не виміряти); «Обчислити пощу прямокутника зі сторонами 5 см і 4 см»; «У дівчинки було три стрічки: червона – довжиною 15 *см*, синя – 10 *см* і зелена – довжиною 8 *см*. Ці стрічки дівчинка зшила в одну. Обчислити довжину

[13/] Лебег А. Об измерении величин, М., 1960. С. 51.

[14 /] *Програма з: Навчальні програми для загальноосвітніх навч. закл. із навчанням українською мовою. 1 – 4 класи. – К.: Видавн. дім „Освіта", 2011. – 392 с.*

стрічки, яка утворилася»; «Збираючись у похід з батьками, Мишко заготував для води три баклаги: одну об'ємом у 3 літри, а другу і третю – по 2 літри Обчислити спільний об'єм баклаг, які Мишко заготував для води» та ін. У даному значенні **вимірюється** конкретний об'єкт – відрізок, поверхня, ємність, маса, тепловий стан речовини та ін. А **величина** (довжина, площа, об'єм, час, температура...) – ***обчислюється.*** До речі, в старших класах при розгляді просторових фігур чітко використовується вираз: «**Обчислити** площу поверхні (призми, кулі, конуса ...)», «**Обчислити** об'єм (призми, кулі, конуса ...)», що чітко відображає сутність поняття величини у другому значенні.

Певний термінологічний аналіз є доцільним та необхідним, оскільки часто зустрічаються випадки, коли поряд з виразом «вимірювання величини» говориться про вимірювання об'єктів – елементів множини. Таке паралельне сусідство двох різних виразів у завданнях однієї мети (без врахування різниці двох значень поняття величини) негативно впливає на формування уявлення про сутність реальних об'єктів. Наприклад, якщо поряд з виразом «виміряти площу» існує вираз «виміряти поверхню», то логічно виникає ототожнення площі і поверхні, що нерідко спостерігається як у висловленнях школярів, так і у висловленнях дорослих, коли вони, дивлячись на поверхню, говорять, що бачать площу. Це ж стосується й інших величин (маси, довжини, об'єму та ін.).

Питання і завдання для самоконтролю

1. *На основі аналізу програм з математики для початкової школи дайте порівняльну характеристику способів формування поняття часу. Наведіть приклади з відповідних підручників. У чому переваги і недоліки даних програм з вивчення часу?*
2. *Виділіть ключові компетенції, що формуються у молодших школярів на основі використання поняття величини.*
3. *Визначте знання і вміння, що становлять змістовну основу методико-математичної підготовки майбутніх учителів початкової школи.*
4. *Дайте визначення скалярної величини. Назвіть величини, які розглядаються в початковому курсі математики.*
5. *Вкажіть загальні властивості скалярних величин*

РОЗДІЛ II
ХАРАКТЕРИСТИКА ВЕЛИЧИН, ЩО ВИВЧАЮТЬСЯ У ПОЧАТКОВІЙ ШКОЛІ

2.1. Пряма лінія. Поняття довжини відрізка. Властивості довжини відрізків

Світовий простір має тримірну побудову. Вимір першого порядку (одномірний простір) – це лінія, тому усі побудови й обчислення, які здійснюються на лінії називаються лінійними. Вимір другого порядку (двомірний простір) – це площина. Вона має два лінійні виміри. Вимір третього порядку – це простір, який має три лінійні виміри. Природно, що одномірні, двомірні й тримірні фігури утворюють три різнорідні множини: одномірні – на лінії (лінійні), двомірні – на площині (площинні), тримірні – у просторі (просторові). Кожна множина має свій набір елементів зі своїм змістом, своїми частковими властивостями, своїми операціями, але об'єднані спільною загальною властивістю – *величиною*.

Отже, розглянемо першу множину – множину одномірних елементів – множину ліній.

Поняття лінії не має означення. Це аксіоматичне поняття, суто абстракція, яка приймається на наочно-образному рівні. Образом лінії може бути звичайна нитка. Натягнута нитка є образ прямої лінії, обвисла нитка – образ кривої лінії.

Відповідно до програми початкової школи зосередимо увагу на формуванні поняття про пряму лінію.

Пряма лінія – об'єкт розгляду ще видатного давньогрецького математика Евкліда (III ст. до н.е.). У своїй фундаментальній роботі «Начала» він визначив аксіоматичні поняття: точку, пряму лінію і площину. Як ми вже зазначили, образом прямої лінії може бути натягнута нитка, ребро прямокутної кришки столу, промінь світла та ін. Пряма лінія складається з щільної множини точок. Слово «точка» походить від дієслова «ткнути». Первинні відношення між точками і прямою лінією називаються аксіомами, тобто твердження, які приймаються без доведення, як очевидні. Ось деякі з аксіом, які визначають відношення прямої лінії і точки:

1) через одну току можна провести безліч прямих ліній;

2) через дві точки можна провести пряму лінію і при тому тільки одну;

3) кожній прямій належать принаймні дві точки;

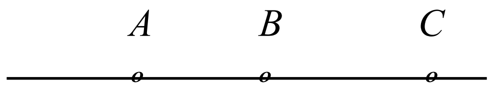
4) якщо точка *B* лежить між точками *A* і *C*, що належать прямій лінії, то усі три точки лежать на одній прямій;

5) для будь-яких точок *A* і *B,* що належать прямій лінії, існує така третя точка *C* цієї лінії, що точка *B* лежить між точками *A* і *C;*

6) із трьох точок прямої тільки одна лежить між двома іншими.[15/]

На основі аксіом будуються перші означення найпростіших математичних понять і найпростіші твердження, що доводяться. Зокрема, означення променя та відрізка: «Промінь – це частина прямої лінії, обмежена з однієї сторони точкою і не обмежена з іншої сторони»; «Відрізок – це частина прямої лінії, обмежена з двох сторін точками» та твердження: «Кожний відрізок може бути продовжений в обидві сторони до нескінченності», «Дві прямі при перетині можуть мати лише одну спільну точку» та інші.

Виходячи з аксіоми 4, можна зробити висновок, що відрізок *AC* складається з двох відрізків *AB* і *BC,* а це означає, що відстань між точками *A* і *C* більша, ніж між точками *A* і *B*.



У цьому випадку виникають запитання, а наскільки відрізок AB менший за відрізок AC? Як співвідносяться відрізки AB і BC? Який з них довший і на скільки? Чи вони рівні? Так ми виходимо на числову характеристику відрізків, тобто на *довжину.*

Довжина є однією з найважливіших величин, що відображає власне математичний аспект формування поняття «величина», з якою

[15/] История математики с древнейших времен до начала XIX столетия : в 3-х томах / под ред. А. П. Юшкевича. – М. : Наука, 1970. – Т. 3. – 380 с.

знайомляться молодші школярі. Перші уявлення про довжину, як про властивість предметів мати протяжність, виникають у дітей задовго до школи. Вони без помилок виділяють лінійну протяжність об'єктів (довжину, ширину, висоту); правильно встановлюють відношення: «довше – коротше»; «вужче – ширше»; «вище – нижче» тощо. Важливим кроком при формуванні поняття «довжина» в навчанні молодших школярів є знайомство з прямою лінією і відрізком як «носіями» лінійної протяжності.

Вище ми визначили поняття довжини як міри відрізка. Сутність цього означення полягає в тому, що довжина є загальною властивістю множини всіх відрізків і ніяка множина об'єктів іншого виду (що не є відрізками) цієї властивості не має. З цього загального визначення випливають часткові визначення відрізка, зокрема, скажімо, у фізиці поняття довжини визначається як «... величина, що характеризується протяжністю, відстанню, на яку переміщується тіло вздовж заданої лінії»[16/].

З наведеного загального означення можна сформулювати й інші, зокрема, довжина відрізка прямої описується як відстань між його кінцями, виміряного певним відрізком, прийнятим за одиницю вимірювання довжини.

У деяких посібниках з математики ми зустрічаємо й таке визначення довжини відрізка: *Довжиною відрізка називається додатна величина, що має наступні властивості*:

1) *рівні відрізки мають рівні довжини;*
2) *якщо відрізок складається з двох відрізків, то його довжина дорівнює сумі довжин його частин.*[17/]

На наш погляд, означення довжини за таким формулюванням видається логічно некоректним, оскільки за логічною структурою означень, термін, яким виражається означуваний об'єкт (у даному випадку – термін *довжина*) не може повторюватися у тексті самого означення. Отже, повторення терміну «довжина» в тексті означення потребує пояснення, тобто,

[16/] Физические величины. Справочник /под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. –М., –1991. –С. 9.
[17/] Стойлова Л. П. Математика. Учебник для студ. высш. учеб. завед. – М., «Академия», 1999. – 424 с. (–С. 406).

повернення на його початок. (Ілюстративний приклад: число – це число, яке...). Тому найбільш коректним, на наш погляд, означення, основою якого є зміст вимірювання відрізка, а саме: «довжина – це міра відрізка». А з цього слідує – виміряти відрізок – значить порівняти його з певним відрізком (елементом тієї ж множини), який за домовленістю приймається за одиницю виміру, і виразити результат порівняння числом. Тому, розглядаючи процес вимірювання відрізків, необхідно з множини відрізків вибрати певний відрізок ***e*** і прийняти його за одиницю вимірювання, тобто поставити йому у відповідність число 1. Потім на відрізку ***a*** від одного з його кінців послідовно відкладати відрізки, рівні ***e***, до тих пір, поки це можливо. Тут можливі два випадки: 1) відрізок ***e***, відклався n разів і кінець останнього відкладення збігається з кінцем відрізка ***a***. У цьому випадку значення довжини відрізка ***a*** буде виражено натуральним числом n, що записують $\boldsymbol{a} = n\boldsymbol{e}$, де n – числове значення довжини відрізка ***a***, $n \in N$. Якщо відрізок ***e***, відклався на відрізку ***a*** n разів і залишився ще відрізок, менший за ***e***, то довжина відрізка ***a*** буде виражена дробовим числом, оскільки потребуватиме дроблення одиничного відрізка, тобто переходу до іншої одиниці виміру.

Отже, довжина відрізків має властивості, які є конкретним відображенням загальних властивостей величини

1. При обраному об'єкті вимірювання довжина будь-якого відрізка виражається додатним дійсним числом.

Вірним є і зворотне твердження: «Якщо задане додатне дійсне число $\boldsymbol{a} = n{,}n_1n_2n_3 \ldots$ то, взявши його наближення з певним ступенем точності і виконавши геометричні побудови, відображені в запису цього числа, отримаємо відрізок ***a***, числове значення довжини якого є задане дійсне число».

Отже, між множиною всіх відрізків і множиною всіх дійсних додатних чисел існує взаємно-однозначна відповідність, тобто, довжина будь-якого відрізка виражається певним додатним дійсним числом і для кожного додатного дійсного числа є відрізок, довжина якого виражається цим числом.

Якщо в результаті вимірювання відрізка отримується нескінчений періодичний десятковий дріб, то значення його довжини буде наближеним і його можна виразити у вигляді звичайного дробу. Якщо ж отримується нескінчений неперіодичний десятковий дріб, то після визначення його з певною точністю, значення довжини буде також наближеним і його можна також виразити у вигляді звичайного дробу, тобто раціональним числом.

2. Якщо два відрізка рівні, то числові значення їх довжин теж є рівні, й навпаки: якщо числові значення довжин двох відрізків рівні, то рівні й самі відрізки: тобто $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow m_e(\boldsymbol{a}) = m_e(\boldsymbol{b})$, де $m_e(\boldsymbol{a})$ – числове значення довжини відрізка $\boldsymbol{a}$, а $m_e(\boldsymbol{b})$ – числове значення довжини відрізка $\boldsymbol{b}$.

3. Якщо даний відрізок є сума кількох відрізків, то числове значення його довжини дорівнює сумі числових значень довжин відрізків-доданків.

Навпаки, якщо числове значення довжини відрізка дорівнює сумі числових значень декількох відрізків, то і сам відрізок дорівнює сумі цих відрізків, тобто $m_e(\boldsymbol{c}) = m_e(\boldsymbol{a}) + m_e(\boldsymbol{b}) \Leftrightarrow \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$

4. Якщо довжини відрізків $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ такі, що $\boldsymbol{b} = x \cdot \boldsymbol{a}$, де $x \in R_+$ і довжина відрізка $\boldsymbol{a}$ виміряна за допомогою одиниці $\boldsymbol{e}$, то, щоб знайти числове значення довжини відрізка $\boldsymbol{b}$ при тій же одиниці вимірювання довжини $\boldsymbol{e}$, достатньо число x помножити на числове значення довжини відрізка $\boldsymbol{a}$ при одиниці виміру $\boldsymbol{e}$, тобто $\boldsymbol{b} = x \cdot \boldsymbol{a} \Leftrightarrow m_e(\boldsymbol{b}) = x \cdot m_e(\boldsymbol{a})$.

5. При заміні одиниці обчислення довжини числове значення довжини вимірюваного відрізка змінюється обернено пропорційно до зміни числового значення одиниці виміру. Наприклад, при одиниці виміру 1 *м* вимірюваний відрізок має довжину 2 *м*. Якщо змінити одиницю вимірювання довжини з 1 *м* на 1 *дм*, тобто зменшити в 10 разів, то довжина цього відрізка буде дорівнювати 20 *дм*, тобто її числове значення збільшиться в 10 разів. Тобто, ***міра і мірка пов'язані обернено-пропорційною функціональною залежністю.***

Доведемо це твердження.

Нехай задані дві одиниці вимру відрізків $\boldsymbol{e}$ і $\boldsymbol{e_1}$, причому $\boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{ke}$, або ж $\boldsymbol{e} = \frac{e_1}{k}$ (тобто нова одиниця довжини $\boldsymbol{e_1}$ у k разів більша за попередню, $k \neq 0$).

Якщо довжина відрізка $\boldsymbol{a}$ при одиниці $\boldsymbol{e}$ мала значення $\boldsymbol{a} = \frac{p}{n}e$, то при одиниці $\boldsymbol{e_1}$ числове значення довжини відрізка $\boldsymbol{a}$ зменшується в k разів, тобто $\boldsymbol{a} = \frac{p}{n}e = \frac{p}{n}\cdot\frac{e_1}{k} = \frac{p}{nk}e_1$. Число $\frac{p}{nк}$ у k разів менша за число $\frac{p}{n}$, тобто, при збільшенні числового значення одиниці виміру у k разів, числове значення довжини відрізка відповідно зменшується в k разів.

З розглянутих властивостей довжини відрізків логічно випливають наступні властивості, які ми пропонуємо без доведення.

6. $a > b \Leftrightarrow m_e(a) > m_e(b)$.

7. $c = a - b \Leftrightarrow m_e(c) = m_e(a) - m_e(b)$.

8. $x = a : b \Leftrightarrow m_e(a) : m_e(b)$.

Розглянуті властивості дозволяють зводити дії над відрізками до дій з числовими значеннями довжин цих відрізків. При обчисленні довжин відрізків відбувається не що інше, як встановлення взаємно-однозначної відповідності між множиною довжин відрізків і множиною додатних дійсних чисел, що виражають числові значення довжин цих відрізків. Названі властивості досить широко використовуються при вивченні довжини в початковому курсі математики: учні креслять відрізки заданої довжини; порівнюють довжини відрізків; зменшують (збільшують) довжину відрізка і виконують відповідні математичні дії з їх числовими значеннями, що виражають довжини відрізків у різних одиницях виміру та ін. Наприклад, виконуючи завдання «Накресліть два відрізки: довжина одного з яких 10 *см*, а довжина другого на 2 *см* менша. Обчисліть довжину другого відрізка», учні фактично користуються властивістю довжини відрізків, відповідно до якої для кожного додатного числа $\boldsymbol{n}$ є відрізок, довжина якого виражається цим числом. Окрім того, учні усвідомлюють, що для довжин відрізків (величин одного виду) справедливі відношення порядку «більше», «менше», «дорівнює», що числові значення величин одного виду можна віднімати (додавати) і в результаті виконання арифметичних дій з величинами одного роду визначають інші величини того ж роду.

Якщо, наприклад, задані два відрізки *AB* і *CD* такі, що довжина відрізка $AB = \boldsymbol{a}$, а довжина відрізка $CD = \boldsymbol{b}$, то в результаті додавання цих відрізків ($AB + CD$) отримаємо відрізок *AD*, довжина якого дорівнює $\boldsymbol{c}$, де $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, а $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ є відповідно числовими значеннями відрізків *AB* і *CD*.

Виконання завдання: «Відрізок довжиною 8 см розділити на 2 рівні частини. Визначити, чому дорівнює довжина кожної частини» пов’язане з усвідомленням учнями співвіднесення поділу величини (довжини смужки) на рівні частини з діленням числового значення величини (довжини) на натуральне число.

У період розв’язання передбачених програмою початкової школи завдань, пов’язаних з поняттям величини, учні знайомляться з властивостями величини, що проявляються в процесі вимірювання: рівним відрізкам при одній і тій же одиниці виміру відповідають рівні числа; більшому відрізку відповідає більше число; сумі величин одного роду відповідає сума числових значень величин того ж роду.

Під час ознайомлення з операцією порівняння довжин відрізків, учні встановлюють ряд властивостей: якщо довжина одного відрізка дорівнює довжині другого, то і довжина другого відрізка дорівнює довжині першого (властивість симетричності рівності); якщо довжина першого відрізку більша за довжину другого, то довжина другого менша за довжину першого (властивість асиметричності нерівності); якщо довжина одного відрізка дорівнює (більше або менше) довжині другого, а довжина другого відрізка дорівнює (більше або менше) довжині третього, то довжина першого відрізка дорівнює (більше або менше) довжині третього відрізка (властивість транзитивності відношень «дорівнює» «більше» або «менше» для довжин відрізків). Тобто, на множині відрізків, що мають величину *A* (довжину), існує відношення порядку.

Надалі, відповідно до програми початкової школи розглядаються й інші властивості довжини: властивості дій додавання і віднімання довжин відрізків, множення довжини на число та інші.

Методичний коментар.

Перш ніж перейти до системи вимірювання відрізків, доцільно провести підготовчу роботу, яка сприятиме розумінню поняття відстані і її обчисленню. Тут доцільно зробити невеликий історичний екскурс ознайомлення зі стародавніми одиницями вимірювання відстаней. Зокрема, учнів знайомлять з одиницями, які використовувалися народами на нашій території і які часто використовуються й понині а саме, четверть – відстань між розвинутими великим та вказівним пальцями руки, п’ядь – відстань між кінчиками широко розвинутих великим пальцем і мізинцем, махова сажень – відстань між кінчиками середніх пальців широко витягнутих рук, косий сажень – відстань між кінчиком середнього пальця витягнутої уверх і в бік руки і кінчиком великого пальця відставленої протилежної ноги.

Згідно програми, першою стандартною міркою, з якою знайомляться школярі, є *сантиметр*. В цьому разі в якості моделі сучасна методика пропонує відрізок, рівний стороні двох клітинок в зошиті. Міркою тут мимовільно вибирається сторона однієї клітинки. Після цього здійснюється перехід до лінійки з сантиметровими поділками. Він здійснюється порівнянням між поділками на лінійці і відрізком сторін двох клітинок. Наступним кроком є закріплення цієї інформації практичними вимірювальними і обчислювальними вправами (їх вдосталь наведено у методичних рекомендаціях).

Надали поступово здійснюється перехід до ознайомлення з дециметром, метром, кілометром. У цілому, вивчення техніки вимірювання відрізків і обчислення їх довжини детально описано методикою і апробовано практикою.

Однак у такому підході є один слабкий момент – учням неясно, звідки узявся цей сантиметр? Чому він дорівнює саме двом клітинкам? Є зошити з великими клітинками (7,5 *мм*) – це теж сантиметр? А як було, коли зошитів з клітинками не було? Якщо ж не прив’язуватися до клітинок, то чому на лінійці сантиметр саме такий? Як він такий виник? Зазначений підхід відповіді на ці запитання не дає. Тут здійснюється підстановка, розрахована на те, що учні цих питань не зададуть. Так, походження сантиметра, а надалі й дециметра та метра, зависає у повітрі й зникає у сутінках років. Жити з цим, зазвичай можна, але це вже не наука, не науковий підхід, тобто порушення дидактичних принципів науковості, систематичності й послідовності, принципу свідомого засвоєння знань. У цьому випадку порушуються не тільки принципи дидактики, а й логіка структури знання: чи можна пояснити і використовувати на практиці поняття, про сутність якого ми не знаємо?

На наш погляд, більш доцільним підходом, який відповідає названим принципам є такий, який в логічній послідовності сприяє формуванню даного поняття, бо формування загальнонаукових понять це процес послідовного розкриття їх якісних і кількісних особливостей. Такий підхід пропонує починати вивчення одиниць вимірювання відрізків не з сантиметру, а з метру. Обґрунтуємо цю тезу. Зупинимося на методичному аспекті. Аналіз поняття одиниць вимірювання довжини показує, що основа його змісту лежить в історії питання. Звернемо увагу на склад назв цих одиниць: *мілі**метр**, санти**метр**, деци**метр**, **метр**, дека**метр**, гекто**метр**, кіло**метр***. Отже, вимірювальною основою усіх одиниць обчислення довжини є ***метр***. Інші одиниці – похідні. Тому й вивчення одиниць вимірювання відрізків логічно починати з *метру*.

По-перше, під час вивчення будь-якої величини, вчитель спирається на досвід, який мають діти. У даному випадку діти краще знайомі з метром, ніж з сантиметром. До того ж він великий і тому легше сприймається дітьми.

По-друге, вивчення величин тісно пов’язане з вивченням арифметичного матеріалу за концентрами. Ознайомлення з метром у концентрі «десяток» не суперечить цій методичній вказівці. Під час виконання практичних вправ діти вимірюють предмети, довжина яких не більше 10 метрів.

По-третє, є можливість повідомити дітям історію виникнення метру. Чому він саме такого розміру, а не іншого? Як з нього можна отримати менші або більші одиниці вимірювання.

Виходячи з цих положень, головним ми вважаємо останнє. Саме воно дає змогу усвідомити міри довжини і показати учням, що *вибір одиниці вимірювання є чисто договірним*. Виходячи з того, що реальна інформація для дітей складна й в силу свого математичного змісту не відповідає можливості усвідомлення, її можна подати у вигляді легенди, яка, між іншим, не порушує змістової логіки її становлення.

Легенда.

Давним-давно, коли кожна країна мала свою систему мір, купцям було дуже складно вести торговельні операції і розрахунки. Так виникла потреба в установлені якоїсь однієї, спільної одиниці обчислення довжини. Зібралися купці з різних країн та почали думати, як вибрати спільну одиницю виміру. Кожний пропонував свою, та інші не погоджувались. Тоді вийшов у центр зали старий сивий купець і, спираючись на палицю, сказав: «Годі сперечатися! За спільну одиницю виміру приймемо цю палицю». Усі погодилися. І назвали цю одиницю «метр», що означає у перекладі з грецької мови «міра». Зняли з цієї палиці мірку та роз'їхалися по своїх країнах. А щоб зберегти цю мірку при багаторазових копіюваннях, зробили з неї еталон із платини, створили спеціальне Бюро мір і ваг в містечку Севрі, поблизу Парижа, в якому і зберігається цей еталон, значення довжини якого з розвитком науки і техніки постійно уточнюється.

Наведена інформація, по-перше, пояснює саму суть появи такої одиниці, як метр, а по-друге, закріплює у свідомості дитини, що вибір одиниці виміру є справою суто договірною. Розповідь підкріплюється виконанням системи практичних вправ на вимірювання, користуючись метром, наприклад, вимірювання довжини класної кімнати, довжини дверного отвору та ін. Після цього учням пропонується виміряти за допомогою дерев'яного метру довжину парти. І тут учні з'ясовують, що метру виявляється замало, бо залишилася невелика остача. Як її виміряти?

В такому випадку вчитель знайомить дітей із складним металевим метром, показує, що він за довжиною такий же, як і дерев'яний, але поділений на 10 однакових ланок, і тому більш зручний у використанні, його можна скласти і займає менше місця. Вчитель демонструє одну його ланку і повідомляє, що її називають *дециметр,* і пропонує відкласти цю частину на остачі довжини парти. Виходить, що одна така частина відкладеться на остачі, скажімо, 2 рази. Тоді довжина столу дорівнює 1 *м* і 2 *дм.*

Так відбувається ознайомлення з новою одиницею довжини – *дециметром*. Надалі учні закріплюють поняття дециметру, виконуючи практичні завдання на вимірювання і на обчислення та встановлюють, що за його допомогою зручно вимірювати невеликі предмети. Наочна демонстрація складного металевого метру закріплює у свідомості учнів знання, що у метрі 10 дециметрів.

Після цього пропонується за допомогою дециметру виміряти ширину зошиту. Дециметр відклався один раз і знов залишилася остача, менша за дециметр. На запитання, що ж робити далі, учитель підводить учнів до висновку, що як і у попередньому випадку, його треба розбити на 10 рівних частин. Тут стає доречним те, що на дециметровій ланці складного метру вже є сантиметрові поділки. Виконавши цю процедуру, вчитель знайомить дітей з назвою одиниці – *сантиметром*. Далі учні вправляються у вимірюванні довжин предметів, скажімо, зошита, олівця, гумки і т.д. Цим саме закріплюється поняття сантиметру та його розмірності, тобто те, що у дециметрі 10 сантиметрів.

Отже, такий підхід дає змогу учням усвідомити загальну суть поняття довжини, як певної величини, і системи її одиниць вимірювання як цілісну категорію.

Пізніше, у третьому класі, коли учні вивчають частини, вчитель повертається до цього питання і визначає дециметр як $\frac{1}{10}$ частину метру,

а сантиметр як $\frac{1}{10}$ частина дециметру або $\frac{1}{100}$ частина метру.

Таким же чином можна описати й усі інші поняття, які подаються в курсі математики початкової школи[18/].

Важливим моментом у вимірюванні відрізків є уведення у використання такого вимірювального приладу, як лінійка. Лінійка школярам представляється як креслярський прилад для вимірювання прямолінійних відрізків. Суть її полягає у можливості порівнювати і обчислювати відрізки, які не можуть бути безпосередньо накладені один на одного.

Доцільним з мотиваційної точки зору є ознайомлення школярів з історією виникнення лінійки. У 2009 році лінійці виповнилося 220 років. Взагалі-то лінійкою у креслярських цілях користувалися здавна. Наприклад, у середньовіччі німецькі монахи використовували лінійку для розмітки ліній на пергаментних аркушах. Вона являла собою свинцеву пластинку. У Стародавній Русі використовувалися металеві пруття – «шильця». Коли ж у 1789 році у Франції розпочалася робота з впровадження Метричної системи мір, у Парижі були виготовлені дві платинові лінійки з метричними поділками довжиною в 1 *м* і шириною 25 *мм* для використання в якості еталону. За їх зразком виготовили декілька дерев'яних лінійок для академіків, а пізніше і для паризьких студентів. У школярів лінійки з'явилися лише наприкінці XIX століття. На територію тодішньої Росії лінійка попала у 1812 році в якості військового трофею, а в 1899 році за ініціативою Д. Мендєлєєва розпочалося і масове виробництво лінійок. Так на території Російській імперії розпочалося впровадження Метричної системи мір.

Наступне питання – використання лінійки. Учні 1 класу ще не знають поняття нуля. Вони знають, що числовий ряд розпочинається з 1, тому традиційною помилкою є прикладання лінійки до початку відрізка при його вимірювання не позначкою 0, а позначкою 1. Зазвичай у цьому випадку вчитель декларативно заявляє, що лінійку до початкової точки відрізку слід

[18] Ляшова Н. М. Логіко-дидактичні проблеми вивчення величин у початкових класах / Н. М. Ляшова, В. К. Сарієнко // К., Почат. школа. – 2009. – №7, – С. 18–24.

прикладати позначкою 0. При цьому спрацьовує авторитарний підхід. Це учні запам'ятовують і запитання «Чому?» вчителю вже не задають. Виходячи зі змісту поняття «знання», така декларативна заява не є знанням.

Для уникнення цієї проблеми існують декілька методичних розв'язань. Для зразка наведемо один з них. Слід побудувати відрізок довжиною, скажімо, 3 *см*. Це можна зробити від будь-якої позначки. Головне – щоб учні знали, що довжина відрізка 3 *см.* Запропонуйте прикласти до початку відрізка лінійку з позначки 1 і прочитати, яка позначка відповідає кінцю відрізка. Це буде число 4. Але ж виходить, що довжина відрізка не відповідає отриманій позначці. Тоді слід запропонувати прикласти лінійку до початку відрізка позначкою 0 і прочитати число в кінці відрізка. Це буде число 3. Воно ж і відповідає довжині відрізка. Після цього слід зробити відповідний висновок.

На темах методики математики з перетворення одних лінійних одиниць довжини в інші, з арифметичних дій з величинами ми не будемо зупинятися, оскільки ці питання детально викладені в методичних вказівках і рекомендаціях методистів і напрацьовані вчителями.

Отже, викладені в цьому підрозділі питання вимірювання відрізків і обчислення їх довжини є ключовими в системі мір, тому доцільно цим питанням приділити особливу увагу.

Практичні завдання для закріплення
Розв'язати задачі:

1) Задані два відрізка (демонструється креслення двох відрізків таких, що менший відрізок вміщується в більшому цілу кількість разів). Менший з них називається „Мак", більший – „Тук". Обчислити довжину відрізка „Тук", якщо відрізок „Мак" прийнятий за мірку.
2) Задані два відрізка: менший – ***А,*** більший – ***Б*** (наводиться креслення. При цьому більший відрізок ***Б*** дорівнює 6 відрізкам ***А***). Розділити відрізок ***Б*** на два таких, щоб довжина одного була удвічі більша другого. Яка буде довжина кожного з них, якщо відрізок ***А*** є мірка?
3) Задані три відрізка: „Мук", „Мак" і „Тук". Відрізок „Тук" є мірка. Відрізок „Мук" дорівнює 3 туки, а відрізок „Мак" – 2 туки. Відрізки „Мук" і „Мак" з'єднали в один. Якої довжини буде відрізок, що утворився? (Побудуйте креслення).

4) Задані два відрізка: відрізок ***A*** має довжину 3 *см*, а відрізок ***B*** – 5 *см.* За допомогою циркуля (або лінійки) на заданій прямій побудуйте відрізок у 7*см*; у 9*см*; у 1 *см*; у 6 *см.*
5) Задані 4 відрізка довжиною 3 *см* і 5 *см* (яких скільки – не визначено). За яким варіантом довжини цих відрізків можна побудувати ламану лінію довжиною 18 *см*; 14 *см;* 16 *см*.
6) Задані 4 відрізка: *a*, *b, c* і *d*. Обчислити довжину ламаної лінії *abdbc,* якщо відрізок *b* удвічі більший за *a,* відрізок *c* – у чотири рази більший за *a,* а відрізок *d* – удвічі менший за відрізок *c.* При цьому відрізок *a* = 3*см.*
7) Периметр трикутника дорівнює 6 *см.* Якими за довжиною можуть бути сторони трикутника, якщо сума двох сторін має бути більша за третю?

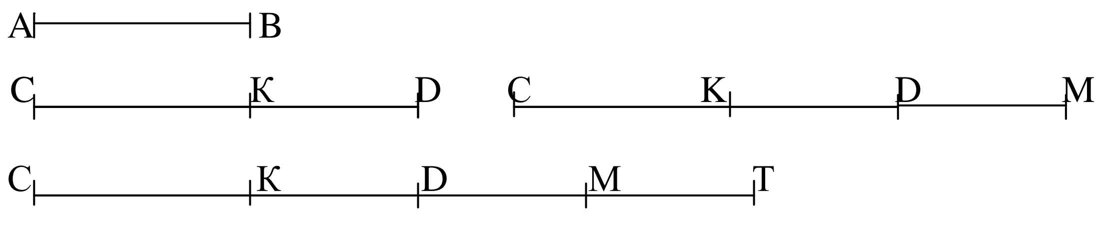
Зразок розв'язання задачі на тему „Довжина відрізка”.

Задача. Задані два відрізка: відрізок ***AB*** має довжину 3 *см*, а відрізок ***CD*** – 5 *см.* За допомогою циркуля (або лінійки) на заданій прямій побудуйте відрізок у 7*см*; у 9*см*; у 1 *см*; у 6 *см.*

Мета задачі – поглибити розуміння зв'язку операції вимірювання відрізків за системою дій з величиною «довжина». Стимулювати розвиток творчості у пошуку розв'язання практичних завдань на обчислення довжини відрізків.

Розв'язання задачі.

Учні здійснюють рекомендовані креслення й виконують наступну систему дій: на відрізку CD від точки C відкладається відрізок AB. На відрізку CD визначиться відрізок KD = 2 *см*. Цей відрізок додається до відрізка CD, отримується відрізок CM = 7 *см*. Якщо до нього знов додати відрізок KD = 2 *см*, отримаємо відрізок CT = 9 *см.*



Щоб отримати відрізок в 1 *см,* слід від відрізка AB відняти відрізок KD, тобто на відрізку AB = 3 *см* відкласти відрізок KD = 2 *см*. Залишком буде відрізок в 1 *см.* А щоб отримати відрізок у 6 см, слід до відрізка у 5 см додати відрізок у 1 см або від відрізка у 7 см відняти відрізок у 1 см.

Існують й інші варіанти побудов.

Коментар. У процесі розв'зання цієї задачі, <u>по-перше</u>, у свідомості учнів закріплюється однозначний зв'язок між діями з відрізками і діями з числами, які ці відрізки характеризують, тобто між їх довжинами. Надалі, після закріплення цього зв'язку в учнів відпадає потреба у кресленні, тут дія з відрізками повністю замінюється діями з їх довжинами. По-друге, задачі такого типу націлюють учня на пошук шляхів їх розв’язання шляхом комбінування із заданими об’єктами, побудову логічних ланцюгів дій. Особливо цінним у розв’язанні цих задач є можливість розгляду декількох варіантів розв’язання і вибір учнями найбільш раціональних шляхів.

2.2. Поняття площі фігури та її обчислення. Площа прямокутника

Перш ніж визначити поняття площі слід звернутися до множини об’єктів, які на відміну від відрізків мають два виміри. Такими об’єктами є поверхні. Поверхні бувають криві і плоскі. Оскільки програма початкової школи обмежується вивченням плоских фігур, то й ми зосередимо увагу саме на плоских фігурах.

Фігура називається плоскою, якщо вона усіма своїми точками належить площині. Поняття площини аксіоматичне, тобто, не має означення. Зоровою моделлю площини може бути кришка столу, льодова гладь замерзлого озера, підлога, віконне скло та інші подібні об’єкти. Геометрично площину можуть характеризувати дві прямі, які перетинаються. На площині такі прямі усіма своїми точками належать цій площині. Це випливає з аксіоми Евкліда, згідно якої будь-які три точки визначають площину, тобто через три точки можна провести тільки одну площину. А через три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести не менше двох прямих, які перетинаються.

Частина площини, яка належить плоскій фігурі, утворює плоску поверхню цієї фігури. Плоскі фігури можуть бути різних розмірів, тобто обмежувати більшу або меншу частину площини. У цьому разі говорять, що вони мають більшу або меншу за розміром поверхню. Оскільки ж ці поверхні можна порівнювати, то їх можна і вимірювати. Вимірювання поверхонь здійснюється за таким же алгоритмом, як і вимірювання відрізків: за домовленістю визначається певна фігура, поверхні якої ставиться у відповідність число 1 (мірка); ця мірка відкладається на іншій поверхні, яка вимірюється, і обраховується число відкладень, тобто, визначається міра. Ця міра і є величиною, яка називається *площею.*

Отже, *площа – це міра поверхні* (число, яке характеризує зазначену поверхню). Характерною особливістю поверхні є її двомірність. Ця характерна особливість є загальною властивістю усіх поверхонь і ніяка інша геометрична фігура (лінійна чи просторова) не має цієї властивості. До того ж між поверхнями фігур можна встановити відношення рівності і нерівності. Отже відповідно до цих параметрів *площа фігури – це величина*. Ця величина є числовою характеристикою поверхні певної фігури (поняття величини у другому значенні).

У деяких посібниках з математики, за якими навчаються майбутні вчителі початкових класів, площа фігури визначається за такою ж схемою, як і довжини, зокрема, «Площею фігури називається додатна величина, визначена для кожної фігури так, що:

1) рівні фігури мають рівні площі;

2) якщо фігура складена з кінцевого числа частин, то її площа дорівнює сумі їх площ;

3) існує фігура, площа якої дорівнює 1». [19/]

Це означення відповідно до закону побудови також не можна вважати коректним, оскільки, як уже відзначалося при визначенні поняття довжини (стор. 47), у тексті формулювання поняття назва цього поняття не може використовуватися. В цьому означенні ані в першому, ані в другому, ані в третьому пунктах термін «площа» не може використовуватися. Тому правильним слід вважати таке формулювання: «Площа – це міра поверхні».

У разі порівняння визначень площі і довжини, можна помітити, що вони характеризуються одними і тими ж властивостями. Різниця полягає лише в тому, що їх зміст відповідає різним об'єктам множин: довжина –це загальна властивість множини відрізків; площа – це загальна властивість множини поверхонь.

Площу фігури в математиці прийнято позначати *S(F).*

Отже, щоб обчислити площу поверхні певної фігури, необхідно вибрати певну одиницю виміру (мірку). За стандартну одиницю виміру

[19/] Стойлова Л. П. Математика. Учебник для студ. высш. учеб. завед. – М., «Академия», 1999. –424 с. –С.410.

поверхні в математиці прийнято поверхню квадрата зі стороною рівною довжині одиничного відрізку e. Площу квадрата зі стороною e позначають e^2. Показник 2 позначає мірність поверхні. Отже, площа поверхні одиничної фігури (квадрата) є *мірка,* яка визначається числом $e^2 = 1$.

Обчислення площі відбувається шляхом порівняння поверхні даної фігури з поверхнею одиничного квадрата e^2 і у вираженні результату порівняння числом. Якщо задана фігура F і обрана мірка e^2, то в результаті вимірювання поверхні фігури F знаходять таке число $x \in R_+$, що площа фігури F дорівнює $x \cdot e^2$. Записують: $S(F) = x \cdot e^2$. При цьому число x називається числовим значенням площі фігури F при обраній мірці e^2.

Оскільки учні початкових класів знайомляться з практичним способом вимірювання поверхонь фігур та обчислення їх площ, розглянемо деякі прийоми, які слід використовувати. Одним із таких прийомів, що спирається безпосередньо на визначення площі, є вимір фігури за допомогою палетки. Вона являє собою сітку з квадратів, яка нанесена на прозору пластинку. З її допомогою відбувається порівняння поверхонь плоских фігур неправильної форми, що містять певну кількість квадратів як цілих, так і не цілих. Учні підраховують цілі квадратики, потім підраховують кількість нецілих квадратів, ділять їх на 2 і додають до кількості цілих. Отримане в результаті підрахунку число й є значення площі цієї фігури. Такий метод обчислення дає приблизне значення площі фігури. Покажемо це на конкретному прикладі.

Наприклад, треба обчислити площу фігури F (рис. 1) за допомогою палетки з нанесеною на неї сіткою квадратів зі стороною $e = 1$*см*.

Припустимо, що m – число квадратиків, які повністю складаються з точок фігури F; n – число квадратиків, які частково містять у собі точки цієї фігури.

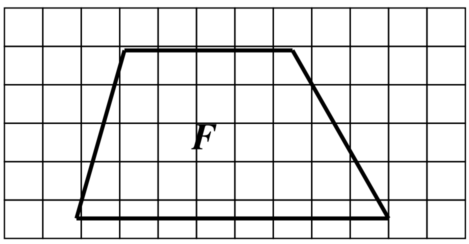


Рис. 1

Тоді площа фігури F буде задовольняти умові: $m \cdot e^2 < S(F) < (m + \frac{n}{2}) \cdot e^2$.

Тож, наближене числове значення площі фігури дорівнює сумі числа квадратів, які цілком лежать всередині фігури, і половині числа квадратів, через які проходить контур цієї фігури.

Спосіб обчислення площі плоских фігур за допомогою палетки громіздкий щодо виконання, тому він може бути використаний для знаходження площі невеликих плоских фігур. Щоб отримати більш точний результат, слід ущільнити сітку квадратів, розділивши кожен з них на більш дрібні квадрати. Можна, наприклад, побудувати сітку квадратів зі стороною $\frac{1}{10}\boldsymbol{e}$. У результаті дістанемо інше наближене значення площі з більшим ступенем точності. Описаний процес можна продовжити.

Отже, наближене значення площі фігури дорівнює сумі числа квадратів, які цілком лежать всередині фігури, і половині числа квадратів, через які проходить контур цієї фігури.

Площа прямокутника

Нехай нам задано прямокутник *ABCD*.

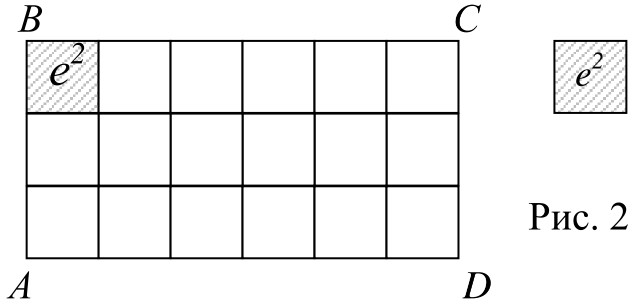


Рис. 2

Виберемо одиничний відрізок ***e***, на якому побудуємо квадрат. Поверхню цього квадрата приймемо за одиницю виміру поверхні $\boldsymbol{e}^2$. Відкладемо цей одиничний квадрат вздовж однієї сторони прямокутника. Нехай він відкладеться 6 разів, утворивши рядок з 6 квадратів. На цьому рядку будуємо другий рядок, на ньому третій і т.д. Нехай на поверхні прямокутника відкладеться 3 таких рядки і в кожному з них по 6 квадратів. Порахуємо кількість квадратів. У результаті підрахунку отримали число (у нашому прикладі – 18), яке й буде площею прямокутнику. Підрахунок можна виконати за таблицею множення (в одному рядку 6 квадратів, а в трьох таких рядках – $6\boldsymbol{e}^2 \cdot 3 = 18\boldsymbol{e}^2$). Якщо $\boldsymbol{e} = 1$ *см,* то $\boldsymbol{e}^2 = 1$ *см*^{2}. Отже, для обчислення площі прямокутника треба довжину однієї сторони прямокутника помножити на довжину суміжної сторони. В загальному вигляді формула площі прямокутника має такий вигляд $S = a \cdot b$, де a – довжина однієї сторони квадрата, а b – довжина другої, суміжної сторони.

Тут можливі два випадки. 1) Якщо вздовж сторін прямокутника вміщується ціле число квадратів, то число всіх квадратів, що містяться в даному прямокутнику, буде натуральним числом. 2) Якщо число квадратів, що вміщується уздовж сторін прямокутника є не ціле число, то виникає потреба в зменшені одиниці вимірювання до спільної міри одиничного квадрата і сторони прямокутника. В цьому разі довжина сторони прямокутника буде виражена дробовим числом. Якщо ж одиниця вимірювання і сторона прямокутника несумірні, то довжина сторони прямокутника виражається ірраціональним числом. У цьому разі визначається наближене її значення і площа прямокутника буде теж мати наближене значення.

Площа квадрата.

Спираючись на означення квадрата (квадрат – це прямокутник, у якого усі сторони рівні), зазначимо, що площа квадрата дорівнює квадрату його сторони (для учнів початкової школи – добутку довжини однієї сторони на себе).

Рівновеликі і рівноскладені фігури

З визначення площі випливають наступні її властивості:

1. Якщо фігура F є об'єднанням кінцевого числа фігур $F_1, F_2, \ldots, F_n$, які попарно не мають внутрішніх точок, то

$$S(F) = S(F_1) + S(F_2) + \ldots + S(F_n),$$

де символом $S(F_i)$ позначається площа фігури.

Для розгляду властивості площі плоскої фігури визначимо зміст відношення «лежить всередині» наступним чином: «Фігура A лежить всередині фігури B, якщо множина точок фігури A є підмножиною множини точок фігури *B*».

2. Якщо фігура A лежить всередині фігури B, то справедливою є нерівність $S(A) \le S(B)$.

Дійсно, $S(B) = S(A) + S(B \backslash A)$, а це означає, що справедливою є нерівність $S(B) \ge S(A)$.

Означення 1. *Фігури, які мають рівні площі, називаються* ***рівновеликими***.

Наприклад, прямокутник на рис.3 і трикутник на рис.4 рівновеликі, оскільки їх площі рівні:

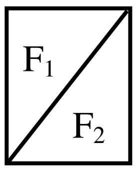


Рис. 3

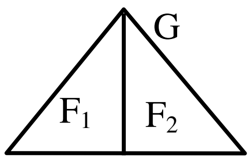


Рис. 4

Легко помітити, що прямокутник на рис. 3 і трикутник на рис. 4 складені з двох однакових трикутників. Про такі фігури говорять, що вони *рівноскладені*.

Означення 2. Фігури називають ***рівноскладеними,*** *якщо їх можна розкласти на кінцеве число частин, попарно рівних між собою.*

Операцію розкладання фігур на попарно рівні частини іноді називають «перекроюванням» фігур. Отже, дві фігури називаються рівноскладеними, якщо одну з них можна «перекроїти» в іншу фігуру, наприклад, трапецію у трикутник, паралелограм у прямокутник (рис. 5) та ін.

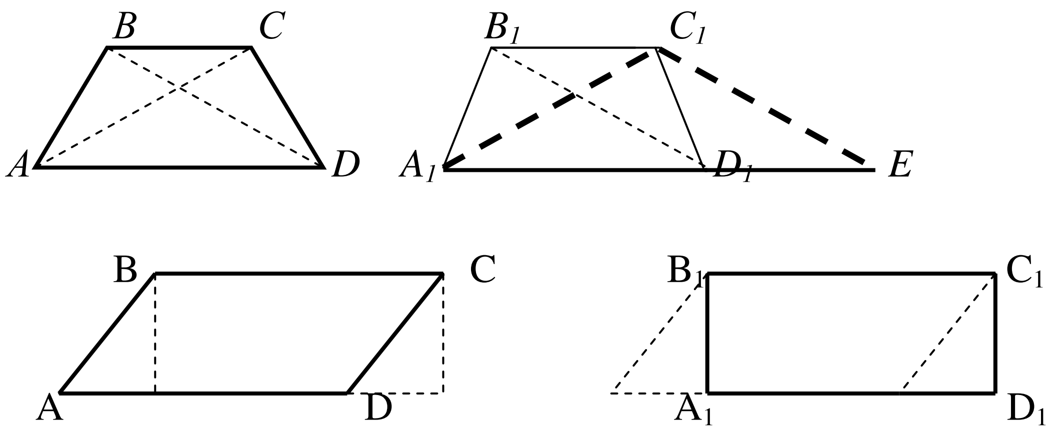


Рис 5.

Елементарний аналіз креслень показує, що зазначені пари фігур складаються з рівних елементів.

Для доведення рівновеликості плоских фігур у планіметрії застосовуються два методи. Один з них називають методом розкладання, інший – методом доповнення.

<u>Метод розкладання</u> полягає в тому, що для доказу рівновеликості двох фігур одну з них розрізають на частини, площі яких можна визначити, наприклад, на трикутники, прямокутники або трапеції. Потім із цих частин в іншому порядку складають другу фігуру, причому без сумніву враховується те, що при різних способах розкладання фігур на частини суми площ цих частин завжди будуть рівними.

Наприклад, хрестоподібний дванадцятикутник рівноскладений з квадратом ABCD (рис. 6).

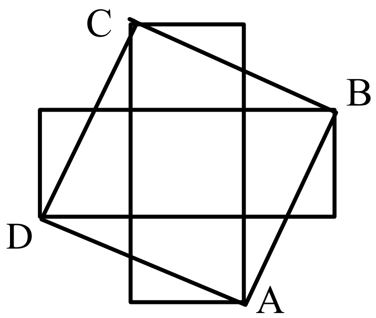


Рис. 6

<u>Метод доповнення</u> полягає в тому, що до обох фігур (многокутників) різним чином приєднуються рівні многокутники так, що в результаті виходять рівні фігури. На прийомах розкладання або доповнення заснована класична теорія вимірювання прямолінійних фігур[20/]. Слід зазначити, що завдання на «перекроювання» одних фігур в інші розв'язуються і в початковій школі. Учні розрізають фігури на такі частини, з яких при іншому розташуванні складаються фігури, рівновеликі даної. Розглянемо кілька прикладів.

Завдання 1. Розгляньте рис. 7. Як з двох квадратів або їх частин склали: 1) прямокутник; 2) квадрат; 3) трикутник?

[20] Каган В.Ф. Очерки по геометрии. – М., 1963.– С. 157.

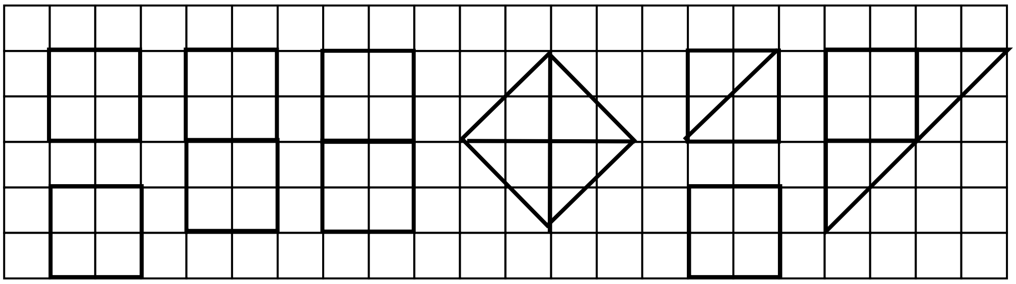


Рис 7

Завдання 2. Чи можна стверджувати, що площі фігур, зображених на рис. 8 рівні між собою? Як це перевірити?

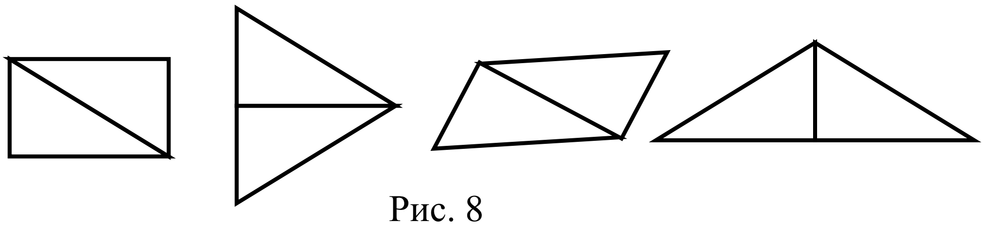


Рис. 8

Таким чином, учні початкової школи знайомляться з явищем рівноскладеності та рівновеликості фігур без використання термінів.

Зі змісту рівноскладеності випливає висновок, що *рівноскладені плоскі фігури мають рівні площі, тобто, рівновеликі.*

Способи знаходження площі фігур

У математиці з моменту її виникнення йшов пошук непрямих шляхів обчислення площ плоских фігур за допомогою вимірювання сторін, висот та інших елементів, що належать фігурі. В основі знаходження площ плоских фігур лежать розглянуті вище властивості площі плоскої фігури.

Площа паралелограма

Теорема. Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони.

Виходячи з того, що площа прямокутника дорівнює добутку довжин його суміжних сторін, знаходять площу паралелограма. Для цієї мети паралелограм «перекроюють» в прямокутник (рис. 9), сторони якого дорівнюють відповідно основі й висоті даного паралелограма.

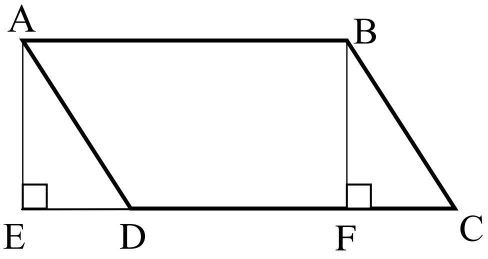


Рис. 9

Нехай ABCD – довільний паралелограм, де AE і BF – висоти, проведені з вершин A і B на сторону CD.

Доведемо, що S_{ABCD} = AB·BF.

Доведення. Даний паралелограм ABCD рівноскладений з побудованим прямокутником ABFE. Обидві фігури складаються із загальної для них частині ABFD (трапеції) і трикутників BCF і ADE. Причому, ΔBCF = ΔADE як прямокутні (BC = AD і BF = AE). Отже, паралелограм і прямокутник рівновеликі. Звідси випливає, що площа паралелограма ABCD дорівнює площі прямокутника ABFE, тобто дорівнює добутку AB на BF. Таким чином, площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, опущену на цю сторону, тобто S (АВСД) = AB · BF.

Площа трикутника.

Теорема. Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони на проведену до неї висоту.

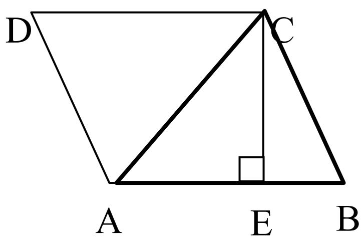


Рис. 10.

1 спосіб. *Доведення.* Доповнивши ΔABC до паралелограма ABCD (рис. 10), зазначаємо, що площі трикутників ABC і ADC рівні за побудовою. Із побудови слідує, що площа паралелограма ABCD дорівнює сумі площ рівних трикутників ABC и CDA, тобто, площа паралелограма дорівнює подвійній площі трикутника ABC. Оскільки площа паралелограма S = AB·CE, то площа трикутника дорівнює половині цього добутку, тобто $S = \frac{1}{2} AB \cdot CE$.

2 спосіб.

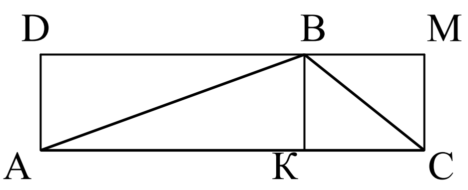


Рис. 11.

Відрізком ВК розділимо трикутник АВС на два прямокутних трикутника АВК і ВКС. Добудуємо їх до прямокутників ADBК і КВМС. Обидва вони будуть розділені відрізками АВ і ВС навпіл. Площа одного буде дорівнювати АК·КВ, а другого – КС·КВ. Відповідно площа трикутника АВК – $S_{ABK} = \frac{1}{2}$ КВ·АК, а трикутника КВС – $S_{KBC} = \frac{1}{2}$ КВ·КС. Тоді площа трикутника АВС дорівнюватиме:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} KB \cdot AK + \frac{1}{2} KB \cdot KC$, або ж $S_{ABC} = \frac{1}{2} KB \cdot (AK + KC)$. Тобто,

$S_{ABC} = \frac{1}{2} KB \cdot AC$. Що і треба було довести.

У математиці відомі й інші практичні прийоми знаходження площ плоских фігур. Для знаходження, наприклад, площі правильного многокутника, його поділяють на рівні трикутники, поєднуючи центр з вершинами. Знаходять площу одного з них і множать на число сторін многокутника. У зв'язку з цим виникає питання: якщо один і той же многокутник по-різному розбити на складові частини і знайти їх площу, то чи будуть отримані суми площ частин многокутника однаковими? В геометрії доведено, що відповідно до умов, сформульованими у визначенні площі, площа будь-якого многокутника визначена однозначно[21/].

Завдання такого характеру виконуються при вивченні початкового курсу математики. Наприклад, знайти площу фігури (рис. 12).

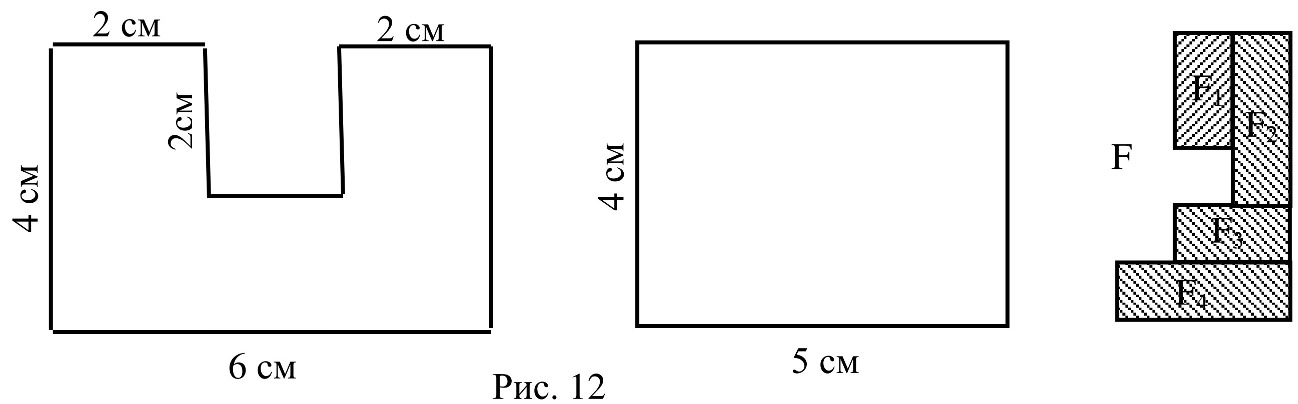


Рис. 12

[21/] Стойлова Л. П. Математика. М., 1999. – С. 413.

Виконуючи завдання, учні повинні відшукати правильний спосіб розбиття даної фігури на складові частини; знайти площу кожної з утворених фігур і обчислюють площу даної фігури як суму площ фігур, які її складають.

З визначення площі і способів її обчислення випливають відомі властивості порівняння площ фігур і дій з їх числовими значеннями:

1. Площа фігури не залежить від її положення на площині.

2. Якщо фігури рівні, то рівні і числові значення їх площ (при одній і тій же одиниці виміру).

Протилежне твердження не має місця, оскільки дві фігури, що мають рівні площі, не обов'язково однакові за формою та лінійними розмірами (рис. 12).

3. Якщо фігура F складена з фігур F_1, F_2, F_3, ..., F_n, які не перетинаються, то площа фігури F дорівнює сумі площ фігур F_1, F_2, F_3, ..., F_n (при одній і тієї ж одиниці вимірювання площі), тобто площа фігури не залежить від способу її розбиття.

4. При заміні одиниці виміру площі числове значення площі збільшується (зменшується) у стільки разів, у скільки разів нова одиниця вимірювання площі менша (більша) за попередню.

5. Якщо фігура F_1 є частиною фігури F_2, то числове значення площі фігури F_1 не більш числового значення площі фігури F_2, тобто якщо $F_1 \subset F_2$, то $S(F_1) \le S(F_2)$.

Методичний коментар

Формування уявлення про площу доцільно здійснювати в наступному порядку:

1. Ознайомлення школярів із загальним поняттям поверхні на тактильному рівні. При цьому слід цілеспрямовано ознайомити учнів з предметами, які мають форму поверхонь фігур, з якими буде здійснюватись надалі навчальний процес (форму прямокутника, квадрата, трикутника, круга).

2. Візуальне порівняння поверхонь геометричних фігур (предметів).

3. Вибір поверхні-мірки для числового порівняння.

4. Числове порівняння поверхні-мірки з іншою поверхнею (вимірювання). Встановлення відношення порівнюваних поверхонь (встановлення *міри*).

5. Ознайомлення з поняттям *площі,* як числової характеристики вимірюваної поверхні за заданою міркою.

6. Ознайомлення з палеткою як інструментом обчислення площі фігури.

7. Обчислення площі фігури палеткою.

8. Порівняння площ фігур шляхом підрахунку клітинок палетки.

9. Ознайомлення зі стандартними одиницями обчислення площі фігури: $см^2$, $дм^2$, $м^2$.

10. Обчислення площі фігури палетками з клітинками $1 см^2$ і $1 дм^2$. Сторони фігури повинні бути сумірними з обома одиницями обчислення площі.

11. Вираження площі, обчисленій з $см^2$ у $дм^2$ і навпаки.

12. Порівняння площ двох різних фігур, обчислених різними одиницями: $см^2$ і $дм^2$.

13. Порівняння двох фігур через задані площі (більша фігура, у якій більша площа).

14. Ознайомлення з землемірними одиницями обчислення площі: ар (*а*), гектар (*га*) і $км^2$.

15. Обчислення площі прямокутника. Виведення формули обчислення площі прямокутника.

16. Площа квадрата.

17. Знайомство з обчисленням площі фігур посереднім шляхом (на основі відомих формул обчислення площі).

18. Площа прямокутного трикутника, як половина площі прямокутника.

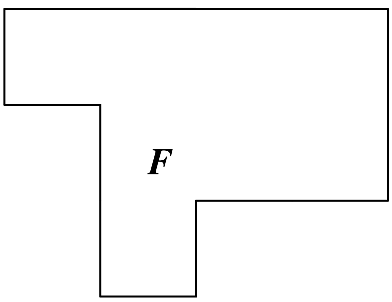
19. Обчислення площі складних фігур шляхом розбиття їх на можливі для обчислення фігури.

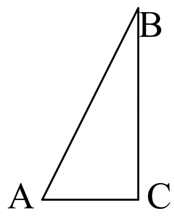
20. Ознайомлення з нестандартними одиницями обчислення площі

(історичний екскурс).

Практичні завдання для закріплення
Розв'язати задачі:

1. Поверхня кришки столу має розміри: довжина – 100 *см,* ширина – 60 *см.* Є дві мірки. Одна має розміри 60 *см*× 20 *см*, а друга – 30 *см* × 50 *см.* Скільки мірок більше вміщує на собі поверхня кришки столу – перших чи других? Обчисліть не вираховуючи площини мірок.
2. Поверхня ***А*** удвічі більша за поверхню ***В,*** поверхня ***С –*** утричі більша за поверхню ***В***, а поверхня ***Д*** уп'ятеро менша за поверхню ***С.*** Яка поверхня більша, ***А*** чи ***Д***?
3. Площа прямокутної поверхні ***А*** дорівнює 48 *кв.дм.* Якими можуть бути сторони цієї поверхні (у *дециметрах*). У якому разі периметр буде найбільшим, а в якому найменшим?
4. Поверхню ***А*** повністю покривають 18 зошитів. Яка площа поверхні ***А***?
5. Периметр прямокутної поверхні дорівнює 12 сантиметрів. Якими можуть бути сторони цього прямокутника? У якому разі площа буде найбільшою, а в якому найменшою?
6. Поверхня квадрата зі стороною 100 *м* має площу 1*гектар*. Яким числом буде виражена площа цього квадрата у квадратних метрах?
7. Розміри футбольного поля 100 *м* на 60 *м*. Скільки футбольних полів можна розмістити на 3-х гектарах?
8. Чому дорівнює площа прямокутного трикутника з довжиною сторін, що утворюють прямий кут, 20 *см* і 30 *см*?
9. Як обчислити площу фігури ***F*,** знаючи сторони трикутника АВС: АС = 5 *см,* ВС = 10 *см.* ?



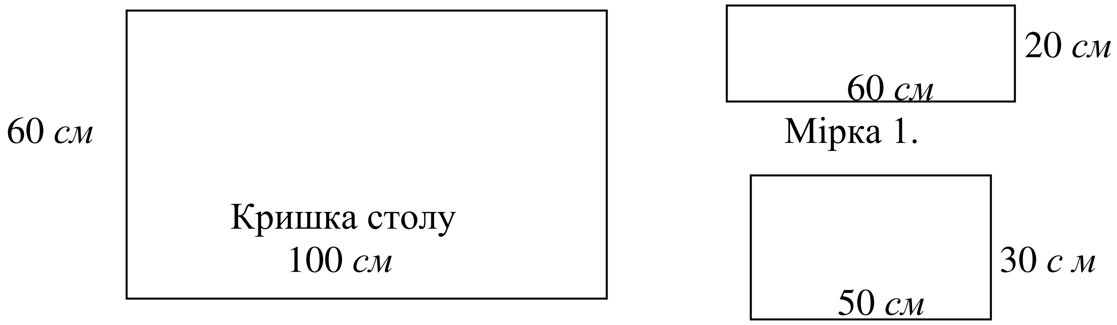


<u>*Зразок розв'язання задачі на тему „Площа поверхні".*</u>

Задача. Поверхня кришки столу має розміри: довжина – 100 *см,* ширина – 60 *см.* Є дві мірки: «T_1», яка має розміри 60 *см*× 20 *см*, і «T_2», яка має розміри 30 *см*× 50 *см.* Скільки мірок більше вміщує на собі поверхня кришки столу – перших чи других? Обчисліть площину кришки столу в заданих мірках.

Мета: Закріпити розуміння поняття площі у свідомості учнів як міри певної поверхні відповідно до визначеної мірки незалежно від її числового значення.

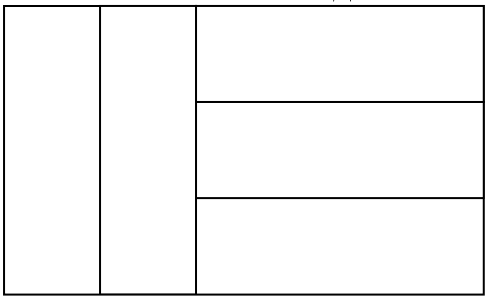
Розв'язання задачі.



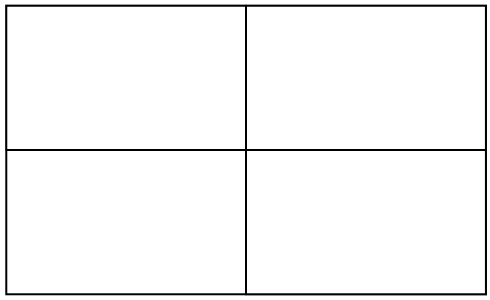
Мірка 1. Мірка 2.

Для розв'язання задачі слід розташувати мірки так, щоб кожна з них повністю покрила поверхню столу.

Для мірки 1 розташування має такий вигляд



Для мірки 2 розташування має такий вигляд



Отже, площа кришки столу в першому випадку дорівнює $5T_1$, а в другому $4T_2$.

Відповідь: $5T_1$ і $4T_2$.

Коментар. Розв'язання цієї задачі, по-перше, надає можливість учням усвідомити, що в залежності від вибору мірки одна й та ж поверхня може мати різну числову характеристику. Вираження ж цими числами одної поверхні свідчить про те що $5T_1 = 4T_2$. Це надає підставу до можливості переходу при обчисленні площі поверхні від одних одиниць вимірювання поверхні до інших – більших або менших. По-друге, залучає школярів до творчого пошуку у виборі розташування мірки на поверхні. Творчий компонент підсилюється й розширенням рамок пошуку, оскільки існують й інші варіанти розташування мірки окрім наведеного.

2.3. Поняття об'єму тіл. Властивості об'єму. Обчислення об'єму тіл.

Об'єм – величина, що характеризує геометричні та фізичні тіла і обумовлена кількістю одиничних ємностей, які можуть бути вміщені в вимірювану ємність. У найбільш уживаних випадках за одиницю виміру приймається місткість куба зі стороною в 1 лінійну одиницю. Об'єм цієї ємності теж приймається за 1. Отже, якщо тіло розбите на скінчену множину одиничних кубів, то числове значення об'єму тіла буде дорівнювати сумі об'ємів цих кубів. Наприклад, якщо за одиницю об'єму прийнята ємність куба зі стороною 1 *см*, тобто 1 *куб. см*, то об'єм ємності у 1000 *куб. см* = 1 *куб. дм*. У випадку, коли мова йде про обчислення об'єму рідини, при визначенні одиничного об'єму часто користуються терміном 1 літр (1 *л*). 1 *літр* = 1 *куб. дм.* 1 *куб. м* = 1000 *куб. дм,* або у випадку з рідиною 1 *куб. м* = 1000 *л*.

Відповідно до теми параграфу сконцентруємо наш розгляд на об'ємі геометричних тіл. Такий акцент доцільний тим, що об'єм тіла будь-якої форми можна привести до форми геометричної фігури. Суть метода полягає в тому, що тіло будь-якої форми при зануренні в рідину витісняє об'єм рідини, який дорівнює об'єму зануреного тіла. Витіснену рідину виливають у ємність геометричної форми і шляхом елементарних замірів обчислюють об'єм тіла.

Відповідно до вимог державного стандарту початкової освіти поняття об'єму розглядається у **другому** значенні поняття величини, тобто з позицій кількісної характеристики. Отже, в цьому сенсі адекватним означенням є таке: ***Об'єм – це міра місткості просторового тіла.*** Якщо порівнювати дане визначення з визначенням довжини і площі, то бачимо, що об'єм, як величина, характеризується тими ж властивостями, що і довжина, і площа. Відмінність полягає в тому, що задані вони на різних множинах: довжина – на множині відрізків, площа – на множині поверхонь, об'єм – на множині просторових фігур. Об'єм тіла Q в математиці позначається: V(Q).

Як ми вже зазначали, одиницею вимірювання об'єму просторових фігур (тіл) є куб, ребро якого дорівнює будь-якій лінійній мірі: кілометр, метр, дециметр, сантиметр та ін. Куб, ребро якого дорівнює лінійної одиниці, називається кубічною одиницею: кубічним метром, кубічним дециметром і т.д., в залежності від того, якою лінійною мірою вимірюється ребро куба, прийнятого за одиницю виміру.

Об'єм одиничного куба з довжиною ребра ***е*** обчислюється за формулою: $V = e \cdot e \cdot e = e^3$. Якщо ***е*** = 1 *см*, то V_e = 1 *куб. см* ; якщо ***е*** = 1 *дм*, то V_e = 1 *куб. дм* і т. д.

Обчислення об'єму твердого тіла або об'єму посудини, що вміщує рідку речовину, полягає в порівнянні об'єму шуканого тіла з об'ємом куба, рівного $\boldsymbol{e}^3 = 1$ і у виразі результату порівняння числом. Результатом цього порівняння є додатне дійсне число, яке називають числовим значенням об'єму тіла при обраному об'єкті, об'єм, якого прийнятий за одиницю.

Якщо треба обчислити об'єм тіла Q і обрана одиниця виміру об'єму e^3, то число $x \in R_+$, помножене на ***е*** є результатом вимірювання об'єму тіла Q. Отже, об'єм тіла Q дорівнює $x \cdot e^3$, записують: $V(Q) = x \cdot e^3$, де ***е*** – довжина сторони куба, прийнятого за одиницю виміру певного об'єму, а x – це є число, що дорівнює кількості одиничних кубів, що вміщуються в шуканому просторовому тілі. Наприклад, при e = 1 *м*, одиниця виміру шуканого об'єму дорівнює $e^3 = 1\ м^3$. При $x = 5$, $V(Q) = 5 \cdot 1 м^3 = 5\ м^3$.

З визначення об'єму та характеру його обчислення випливають відомі властивості об'ємів тіл, правила їх порівняння і дії над об'ємами тіл як величинами:

1. Якщо тіла рівні, то рівні і числові значення їх об'ємів при одній і тій же одиниці виміру.

2. Якщо тіло Q складено з тіл Q_1, Q_2, ..., Q_n, то числове значення об'єму тіла Q дорівнює сумі числових значень об'ємів Q_1, Q_2, ..., Q_n при одній і тій же одиниці виміру об'єму.

3. При заміні одиниці виміру об'єму числове значення об'єму збільшується (зменшується) у стільки разів, у скільки разів нова одиниця виміру об'єму менше (більше) попередньої.

4. Якщо тіло Q_1 міститься всередині тіла Q_2, то об'єм тіла Q_1 не більший за об'єм тіла Q_2, тобто $V(Q_1) \le V(Q_2)$.

У деяких випадках об'єм можна визначити експериментальним шляхом. Наприклад, якщо потрібно визначити, скільки кубічних дециметрів води або будь-якої іншої рідини міститься в певній посудині, достатньо взяти ємність об’ємом в 1 кубічний дециметр і шляхом переливання обчислити, скільком кубічних дециметрів вміщується в цій посудині. Однак обчислити об’єм тіла (посудини) безпосередньо не завжди можливо. Найчастіше об’єм геометричного тіла встановлюють непрямим шляхом – шляхом обчислень за правилами, виведеними для геометричних тіл різної форми.

Об’єм прямокутного паралелепіпеда

Означення. Прямокутним паралелепіпедом називається тіло, усі грані якого є прямокутники.

Теорема. *Об’єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку трьох його вимірів.* (Або, доступніше для школярів*, – добутку площі основи на висоту*).

Дано: прямокутний паралелепіпед. a, b, c – його виміри, $a, b, c \in R_{+}$.

Довести, що $V_{пар.} = a \cdot b \cdot c$.

Доведення. На рис. 13 поряд з прямокутним паралелепіпедом зображений маленький куб, який є одиницею виміру об’єму. Поставлено завдання, визначити об’єм зазначеного паралелепіпеда.

Нехай сторона одиничного куба дорівнює 1 *дм*. Відповідно його об’єм є 1 *куб. дм.*

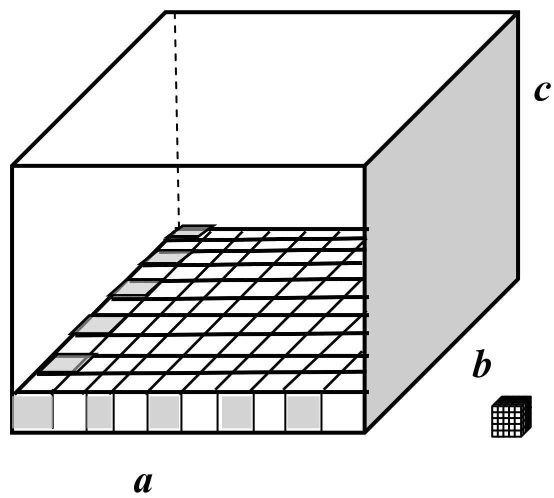


Рис.13

Завдання – визначити, скільки кубічних дециметрів вміщується в кубічному метрі. Відкладемо кубічний дециметр на основі куба з ребром $\boldsymbol{a}$. В одному рядку на основі паралелепіпеда з довжиною $\boldsymbol{a}$ і шириною $\boldsymbol{b}$ вкладеться $\boldsymbol{a \cdot b}$ одиничних кубів зі стороною основи 1 *дм.* Висота цього рядка теж дорівнює 1 *дм*. Отже, щоб заповнити кубічними дециметрами весь куб, потрібно заповнити $\boldsymbol{c}$ таких рядків по $\boldsymbol{a \cdot b}$ кубічних дециметрів у кожному, тобто всього в кубічному метрі вкладеться $\boldsymbol{a \cdot b \cdot c}$ кубічних дециметрів. Що й треба було довести.

Отже, об'єм прямокутного паралелепіпеда з лінійними розмірами *a*, *b* і *c* дорівнює добутку $a \cdot b \cdot c$, тобто $\mathbf{V = a \cdot b \cdot c}$**.**

Добуток $\boldsymbol{a \cdot b}$ виражає площу основи прямокутного паралелепіпеда, а $\boldsymbol{c}$ – його висоту. Отже, об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку площі його основи на висоту: $\mathbf{V_{\text{пар.}} = S_{\text{осн.}} \cdot h}$**.**

У процесі розв'язання задач на знаходження об'єму часто дані представлено в різних розмірностях одиниць довжини, наприклад, $\boldsymbol{a}$ – в сантиметрах, $\boldsymbol{b}$ – в дециметрах, а $\boldsymbol{c}$ – в метрах. У цьому разі треба привести усі одиниці до однієї розмірності. Для цього слід знати й запам'ятати, що: 1 *куб. м* = 10 *дм* • 10 *дм* • 10 *дм* = 1000 *куб. дм*. Тобто, 1 $м^3$ = 1000 $дм^3$.

Аналогічно, 1 $м^3$ = 100 *см* • 100 *см* • 100 *см* = 1000000 $см^3$.

1 $м^3$ = 1000 • 1000 • 1000 = 1000000000 $мм^3$;

1 $дм^3$ = 10 • 10 • 10 = 1000 $см^3$;

1 $дм^3$ = 100 • 100 • 100 = 1000000 $мм^3$;

1 $см^3$ = 10 • 10 • 10 = 1000 $мм^3$.

У початковій школі, наприклад, розв'язують завдання такого типу: «Виразити у кубічних дециметрах а) 5 $м^3$; б) 27000 $см^3$». Знаючи, що 1 $м^3$ = 1000 $дм^3$, 1 $дм^3$ = 1000 $см^3$, отримуємо:

а) 5 $м^3$ = 5 · 1 $м^3$ = 5 · 1000 $дм^3$ = (5 · 1000) $дм^3$ = 5000 $дм^3$.

б) 27000 $см^3$ = 27 · 1000 $см^3$ = (27 · 1) $дм^3$ = 27 $дм^3$.

У сучасних програмах початкового курсу математики поняття об'єму тіла розглядається на рівні пропедевтики і здійснюється на основі власного практичного досвіду учнів за наступним планом:

1) формування поняття «об'єм» (у сенсі місткості) на основі безпосереднього вимірювання місткості посудин шляхом переливання;

2) вимірювання ємності декількох судин єдиною міркою. Обчислення об'єму декількох ємностей однією одиницею вимірювання.

Літр як стандартна одиниця обчислення об'єму.

Враховуючи, що одиниця вимірювання будь-якого елементу заданої множини визначається довільно, за домовленістю, на початкових етапах ознайомлення учнів з поняттям об'єму не слід одразу прив'язуватися до стандартної одиниці, тим більше, що у побуті одиницею вимірювання ємності часто виступають зовсім не літр, а стакан, чашка, ложка та інші ємності. Наприклад, «Для заварювання лікарської трави слід 2 столові ложки трави залити трьома стаканами води». Для закріплення поняття умовності вибору одиниці обчислення об'єму слід запропонувати школярам декілька задач. Лише після цього переходити до стандартної одиниці – літр, визначивши його як еквівалент 1 *куб. дм.* Це можна продемонструвати наочно переливанням води з літрової банки в порожній куб об'ємом в 1 *куб. дм.*

Важливим етапом в усвідомленні поняття об'єму є з'ясування відношення місткостей судин. Спочатку порівнюються дві посудини: одна повністю наливається водою і переливається у другу, порожню. Так визначається, їх місткості рівні чи ні. Якщо не рівні, то яка більша. Після цього розв'язуються задачі на непряме порівняння, а на посереднє – коли для порівняння місткості двох судин використовується третя.

Наступним кроком є розв'язання задач, у яких використовуються різні одиниці виміру. Наприклад, «Бідон вміщує в себе 3 відра води, а одне відро – 10 банок води. Скільки банок води вміщують 2 таких бідони?». Учні спочатку визначають стандартну одиницю ємності – 1*л*, а потім зосереджуються на розв'язанні задач саме з використанням цієї одиниці.

Найбільш уживаними на етапі ознайомлення школярів з поняттям об'єму є задачі на переливання. Наприклад, «Одна посудина містить 3*л* води, а друга – 5*л.* Як перелити воду так, щоб отримати 1*л* води. Чи можливо перелити воду так, щоб у обох посудинах було води порівну?» Результати такої роботи приводять до висновку, що для вимірювання місткості посудин використовується стандартна одиниця виміру – 1 літр; кількість літрів, яка вміщується в посудині, визначає її *об'єм.* Об'єми посудин можна порівнювати, додавати, віднімати, множити і ділити на число, якщо вони виміряні однаковими мірками.

Для підвищення інтересу до математики, при вивченні зазначеної теми, доцільно ознайомлювати школярів з історичними відомостями з вимірювання ємностей. Скажімо, Однією з стародавніх мір були *бочка* і *відро*. Бочка містила в собі 10 відер, а відро – 33 фунта води. Відро містило в собі 10 *штофів.* Для рідини використовувався *бутиль*, який дорівнював місткості 1 штофа.

Практичні завдання для закріплення
Розв'язати задачі:

1. Один горщик містить 15 стаканів молока. Який об'єм молока буде більше, у 3-х горщиках чи у 46 стаканах?
2. Об'єм банки дорівнює 6 чашкам води, а об'єм однієї чашки дорівнює 2 стаканам. Який об'єм банки, якщо за одиницю об'єму прийняти 1 стакан?
3. 1 літр води дорівнює 4 чашкам. Скільки чашок види вміститься у трилітрову банку?
4. Одне відерце має об'єм 3 *л*, друге – 5 *л*, а третє – 6 *л*. Скільки семилітрових відер потрібно, щоб злити воду з усіх відерець?
5. Об'єм одного горщика дорівнює 2 *л*, другого – 4 *л*. Горщики налили молоком і обидва перелили у десятилітрове відро. Скільки молока ще треба налити у відро, щоб його набрати повністю?
6. Одна банка має об'єм 2 *л*, друга – 3 *л*, третя – 4 *л*. Банки наповнили водою. Чи вміститься уся вода у восьмилітрове відерце?
7. Бідон молока об'ємом у 40 *л* розлили у 3 банки об'ємом 3 *л*, 4 банки чотирилітрові, а решту – у п'ятилітрові. Скільки п'ятилітрових банок наповнили молоком?
8. Спочатку у бідон вилили десятилітрове відро молока, потім 4 дволітрових банки, потім ще 9 літрових банок. Потім усе молоко розлили у трилітрові банки. Скільки використали банок об'ємом у три літри?
9. У відрі 8 л води, а в каструлі в 4 рази менше. Скільки літрів води в трьох таких каструлях?
10. У глечику на 10 л молока менше, ніж у бідоні, і на 5 л менше, ніж у відрі. Скільки літрів молока в бідоні і відрі, якщо в глечику 3 л молока?
11. У бочці 25 відер води. Щодня з неї вранці брали 3 відра води, а увечері 2 відра. На скільки днів вистачить води в бочці?
12. Використовуючи ємності об'ємом 5 і 7 літрів, набрати з бочки 6 літрів.

Зразок розв'язання задачі на тему „Об'єм".

Задача. У скляний глечик вміщується 3 скляних банки води. У керамічний глечик – 2 скляних глечика, а в горщик – 3 керамічних глечика, один скляний та й ще 2 банки води. Скільки води у двох горщиках?

Мета: Сформувати в учнів розуміння сутності поняття об'єму як міри ємності відповідно до визначеної мірки незалежно від її числового значення.

Розв'язання задачі: 1) Визначається одиниця виміру ємності (мірка) – скляна банка. 2) Визначається кількість банок води, що вміщується в керамічний глечик: $3_б \cdot 2 = 6_б$. 3) Визначається кількість банок води в 3-х керамічних глечиках: $6_б \cdot 3 = 18_б$. 4) Визначається кількість банок води в одному горщику: $18_б + 3_б + 2_б = 23_б$. 5) Визначається об'єм води в двох таких глечиках: $23_б \cdot 2 = 46_б$. Відповідь: 46 банок.

Методичний коментар. Головним кроком у розв'язанні задачі є визначення одиниці вимірювання. Це визначення випливає з головного запитання задачі. Наступним кроком є визначення кількісного співвідношення одиниці вимірювання з головним об'єктом, визначеним у запитанні задачі. Це виконується за допомогою логічної операції порівняння. Завершення задачі здійснюється вже арифметичною дією.

Творчий компонент тут полягає у визначенні ланцюга дій (з кінця умови до її початку) відповідно до властивості транзитивності у складних відношеннях (композиції двох відношень).

Поняття об'єму тісно пов'язане з поняттям маси тіла, оскільки будь-яке тіло характеризується і масою і об'ємом.

2.4. Поняття маси тіла. Властивості маси тіл. Способи обчислення маси тіл.

Маса – це фізична величина, яка є однією з основних характеристик матерії, визначає її інерційні та гравітаційні властивості. Поняття маси було введено в механіку **І. Ньютоном і розглядалося ним як міра кількості речовини,** що дорівнює відношенню діючої на тіло сили до прискорення, яке нею викликається. Таке розуміння маси передбачає порівняння однорідних тіл, що складаються з однієї й тієї ж речовини. У такому розумінні маса тіл адитивна, тобто маса тіла дорівнює сумі мас складових його частин. Маса однорідного тіла пропорційна його об'єму, тому вводиться поняття щільності, як маси одиниці об'єму речовини.

Після великих відкриттів А. Ейнштейна поняття маси стало визначатися як міра інерції тіла по відношенню до діючої на нього сили.

На відміну від маси вага тіла залежить не тільки від самого тіла, але й від місця його розташування, оскільки на тіло діє ще й сила тяжіння. Так, на полюсі тіло важить на 0,5% більше, ніж на екваторі, оскільки Земля трішечки «приплюснута» між полюсами. У стані невагомості вага тіла дорівнює нулю, а його маса не змінюється, тобто вона одна й та ж, де б тіло не знаходилося.

Відповідно до вимог державного стандарту початкової освіти поняття об'єму розглядається у другому значенні поняття величини, тобто з позицій кількісної характеристики. Отже, в цьому сенсі адекватним є означення, сформульоване І. Ньютоном, а саме, ***маса, як міра кількості речовини.***

Вимірювання тіла **Т** з метою обчислення його маси полягає в порівнянні його з масою тіла ***е***, прийнятого за одиницю виміру маси. Результатом цього порівняння є додатне дійсне число ***х***, яке називають числовим значенням маси тіла **Т**, при обраному об'єкті маси ***е***, прийнятому за одиницю. Цей факт записується M (Т) = $x \cdot e$.

Всі властивості адитивно-скалярних величин притаманні й масі. Формулюються вони так само, як і для довжини та площі, з урахуванням того, що маса задається на множині тіл.

Вимірювання тіл та обчислення їх маси проводиться за допомогою ваг і гир. Для цієї мети вибирається тіло *е*, маса якого приймається за одиницю вимірювання – гиря. На одну чашу терезів кладуть тіло, масу якого вимірюють, а на іншу – тіла, обрані в якості одиниці вимірювання (гирі). Гир повинно бути стільки, щоб вони врівноважили шальки терезів. У результаті зважування отримується числове значення шуканої маси тіла при обраному об'єкті її виміру.

Для числових значень маси справедливі всі твердження, сформульовані для довжини, площі та об'єму. Порівняння мас тіл, дій над ними зводиться до порівняння і дій над числовими значеннями мас при одній і тій же одиниці вимірювання. Основна одиниця вимірювання маси за міжнародною системою СІ є *кілограм*.

Практичні завдання для закріплення
Розв'язати задачі:

1. Виміряйте, скільки стаканів води у літровій банці; у відрі.
2. 4 яблука мають таку ж масу, як 20 сливин. Скільки сливин мають масу, таку ж як 7 яблук?
3. На одну чашку терезів покладено одну банку меду, а на другу таку ж банку з водою та ще й гиря у 400 грамів. Яка маса меду?
4. Маса одного індика дорівнює масі двох гусаків, а маса одного гусака така ж, як маса 3 курей. Скільки курей мають таку ж масу, як 5 індиків?
5. Маса одного гарбуза дорівнює масі 3-х кавунів. Скільки гарбузів урівноважать на терезах 12 кавунів?
6. Одна диня має масу 2 кг 145 г, друга – 1 кг 950 г , третя – 2 кг 730 г. Яку масу мають усі три дині?
7. В один контейнер загрузили 2 тони 725 кг зерна, в другий – 1 тону 3 центнери 50 кг зерна і в третій – 3 тони 1 центнер 80 кг. Яку масу зерна загрузили у три контейнери?
8. На склад завезли 18 т 8 ц 250 кг борошна. У перший день зі складу було видано 1 т 3 ц 70 кг, на другий день 4 т 850 кг, на третій – 7 т 6 ц 10 ц, а на четвертий – 3580 кг. Яка маса борошна залишилася на складі?

Зразок розв'язання задачі на тему „Маса"

Задача. Маса одного індика дорівнює масі двох гусаків, а маса одного гусака така ж, як маса 3 курей. Скільки курей мають таку ж масу, як 5 індиків?

Мета: Сформувати розуміння поняття маси у свідомості учнів як міри кількості речовини відповідно до визначеної мірки незалежно від її числового значення.

Розв'язання задачі:

Згідно з головним запитанням задачі за одиницю вимірювання приймається курка. За змістом задачі маса одного індика дорівнює масі 6 курей. Дією множення взнаємо, що маса 5 індиків дорівнює масі 30 курей.

Відповідь: 36 курей.

Методичний коментар. Головним кроком у розв'язанні задачі є визначення одиниці вимірювання. Це визначення випливає з головного запитання задачі. Наступним кроком є визначення кількісного співвідношення одиниці вимірювання з головним об'єктом, визначеним у запитанні задачі – співвідношення маси курки з масою індика. Це виконується за допомогою логічної операції порівняння. Розв'язання задачі здійснюється арифметичною дією множення.

2.5. Поняття величини кута. Вимірювання кутів.

Кут – це геометрична фігура, утворена двома променями, які виходять з однієї точки.[22/]

Два кути називаються рівними, якщо при накладанні їх сторони суміщаються. Якщо ж при суміщенні вершин кутів і однієї зі сторін інші сторони не суміщаються, то меншим буде той кут, сторона якого буде в середині більшого. Наприклад, $\angle CAD < \angle BAD$ (Рис. 14). Отже, кути можна порівнювати. Тут постає питання: «А на скільки один кут може бути більший або менший за інший?»

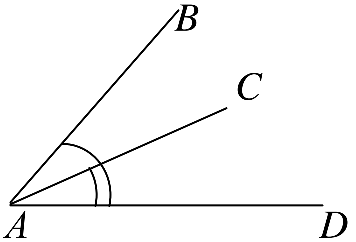
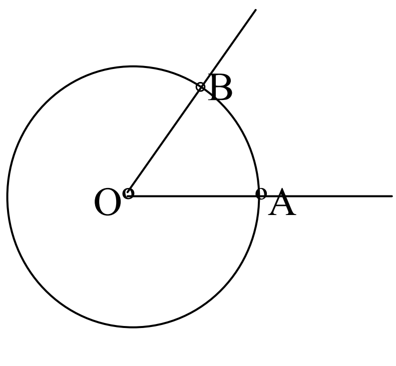


Рис. 14

Так виникає потреба у встановленні одиниці вимірювання кута. Її вирішення випливає з наступного судження: якщо дві прямі мають одну спільну точку, закріплену на площині або у просторі, то їх рух відносно одна одної можливий тільки як круговий. Розглянемо наступну побудову (Рис.15):

Рис. 15



[22/] Вілкіпедія.

Пряма ОА зафіксована і закріплена на площині точкою О. В результаті кругового руху точки А на кут АОВ, який є центральним, (центральний кут – це кут, вершина якого співпадає з центром кола), вона описує дугу ˘АВ і опиняється в точці В. Отже, розмір центрального кута тісно пов'язаний з дугою кола, на яку він спирається.

Згідно з історичними відомостями, початок вимірювання кутів сягає в далеку давнину – у Стародавній Вавилон. Оскільки у Вавилоні використовувалася шестидесяткова система числення, то за одиницю вимірювання кола була прийнята дуга, яка дорівнювала $\frac{1}{360}$ його довжини (60·6). Ця дуга отримала назву градус і записувалася – 1^0. Відповідно до цієї дуги й центральний кут, який на неї спирається отримав розмірність 1 градус (запис – 1^0). *Таким чином, кутовий градус – це центральний кут, який спирається на дугу кола в 1 градус.*

Отже, оскільки коло було розділено на 360 рівних частин, то в градусному вимірі воно має 360^0. Відповідно й *повний кут* налічує 360^0 (повний кут – це кут, який описує радіус ОА, коли точка А пробігає повне коло і співпадає зі своїм вихідним станом).

Таким чином, розглядаючи вимірювання кута з позиції визначення його кількісної характеристики, ***під величиною кута розуміється міра дуги кола, на яку він спирається за умови суміщення його вершини з центром кола.***

Отже, вимірювання величини довільно вибраного кута О полягає у порівнянні його з кутом, прийнятим за одиницю виміру ***е.***

Результатом порівняння кута А з одиничним кутом ***е,*** є додатне дійсне число, яке називають числовим значенням даного кута О за вибраною одиницею вимірювання кута ***е*** або просто – ***величиною кута А***.

Всі властивості адитивно-скалярних величин притаманні величині кута і їх можна сформулювати так само, як це зроблено для довжини відрізків, площі поверхонь, маси тіл з урахуванням лише того, що величина кута задається на множині плоских кутів.

Як вже зазначалося, для обчислення величини кутів використовують кутові градуси. Кутовий градус становить частину повного кута. Оскільки повні кути рівні між собою, то і кутові градуси рівні між собою, чого не можна сказати про дугові градуси. Лінійна довжина дугового градуса змінюється в залежності від довжини радіуса кола: чим більший радіус кола, тим більша й лінійна довжина дугового градуса. Як ми вже зазначали, дуговим градусом називається $\frac{1}{360}$ частина кола. Наприклад, довжина дугового градуса земного меридіана приблизно дорівнює 110 *км*. Що ж до широти, то лінійна довжина дугового градуса найдовша на екваторі і при збільшенні широти поступово зменшується. Дугові градуси рівні тільки в одному колі чи у рівних колах. Стандартними одиницями вимірювання величини кута є: *градус, хвилина, секунда, радіан*.

Одна хвилина ($1'$) дорівнює $\frac{1}{60}$ частину градуса.

Одна секунда ($1''$) дорівнює $\frac{1}{3600}$ частину градуса або $\frac{1}{60}$ частину хвилини.

Слово «хвилина» походить від латинського «minutus» – зменшений, малий, що в даному випадку означає більш дрібну частину градуса, а слово «секунда» походить від латинського слова «secunda» – другий, тобто друге зменшення градуса. У шестидесятковій системі числення перше зменшення відбувається у 60 разів, а друге – у $60 \cdot 60 = 3600$ разів.

Один радіан (скорочено *рад*.) – це центральний кут, довжина дуги якого дорівнює радіусу кола.

Кут, сторони якого є продовженням одна одної, тобто, утворюють пряму лінію, називається *розгорнутим.*

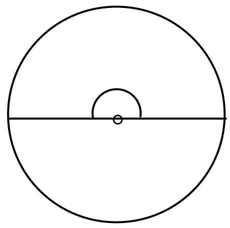


Рис. 16.

Якщо розглядати цей кут на колі, то він являє собою діаметр кола і цим самим ділить коло навпіл. Отже в градусному обчисленні він дорівнює 180^0.

Кут, який дорівнює половині розгорнутого, називається *прямим.* У градусному обчисленні прямий кут дорівнює 90^0.

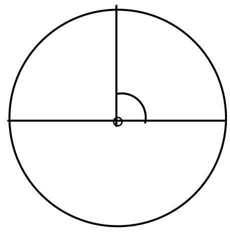


Рис. 17.

У початковій школі вивчення кутів здійснюється на пропедевтичному рівні, тобто на рівні загального ознайомлення з геометричною формою та її видами (кути: гострий, прямий, тупий, а градусна міра не розглядається).

Особлива увага приділяється прямому куту, оскільки він як у математиці, так і в побуті посідає одне з особливо важливих місць. При ознайомленні молодших школярів з прямим кутом відбувається практично:

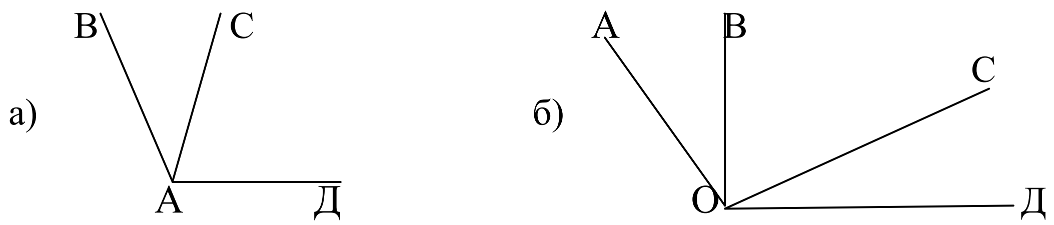
1) вирізати з паперу круг;

2) скласти його навпіл, а потім ще раз навпіл і розгорнути. На поверхні розгортки утворяться дві взаємно перпендикулярні лінії, які ділять круг на 4 рівні частини. Кут утворений цими лініями і є прямий.

Тут слід акцентувати увагу учнів на те, що це єдиний спосіб поділу круга на 4 рівні частини. У наступних класах, коли діти почнуть вивчати градусну міру кутів і транспортир, такий спосіб сприятиме усвідомленню, чому прямий кут має 90º . Цим зберігається наступність в даному питанні початкового курсу математики з курсом математики середньої ланки.

Практичні завдання для закріплення
Розв'язати задачі:

1. За допомогою трикутника накреслити прямий кут. З його вершини поміж сторонами провести промінь. Позначити отримані кути. Порівняти їх з прямим. Виразити величину прямого кута через величини отриманих кутів.
2. Накресліть тупий кут. У його середину помістіть менший кут з тією ж вершиною. Який новий кут утворився: гострий, тупий чи прямий? Які можуть бути варіанти?
3. Накреслити два нерівних кути. Усередину більшого помітити менший з тією ж вершиною. Укажіть кут, який було отримано. Який він, гострий, тупий чи прямий.
4. Порахуйте, скільки тут зображено кутів? Запишіть кожний з них.



2.6. Поняття часу. Властивості часу. Способи обчислення часу.

У філософії **час** – це складова об'єктивної форми існування матерії, яка нескінченно розвивається. Час і простір – дві нерозривно пов'язані складові існування матерії. Вони визначають таке фізичне поняття як рух. Поза часом і простором рух матерії неможливий. Забезпечуючи ототожнення і відмінність (індивідуалізацію) окремих фрагментів матеріальної дійсності, час, як і простір, має вирішальне значення для побудови фізичної картини світу. Універсальними властивостями часу є тривалість, неповторність, незворотність, безперервність.

Тривалість – це протяжність у часі.

Неповторність – це однозначність факту у прояві його на дану мить.

Незворотність – це протікання процесу лише в одному напрямку.

Безперервність – це щільність у протіканні процесів.

У фізиці час розглядається як: «величина, що характеризує послідовну зміну явищ і станів матерії, яка характеризує тривалість їх буття».[23/]

У процесі розвитку будь-якої сфери буття відповідно до властивостей незворотності і неповторності явища відбуваються у певній послідовності. При цьому, в такому порядку подій між ними існує певний інтервал, який охоплює певний період розвитку. Цей інтервал визначається відповідними подіями, які фіксуються як початкова і кінцева, утворюючи, так званий, часовий відрізок. Цей відрізок може бути будь-якої довжини: дуже довгий, скажімо, у розвитку Землі – ера (палеозойська, мезозойська, кайнозойська), епоха (час правління певного імператора, імператорської династії або якихось соціально-культурних явищ, (епоха відродження у мистецтві). Більш короткі відрізки, скажімо, події в соціально-політичному або побутовому житті – щорічні, щомісячні, щотижневі, щоденні, погодинні, хвилинні і т.д. Ці події послідовні і незворотні. Природно, що для фіксації довжини інтервалу потрібно вибрати одиничний інтервал. Він повинен бути незмінний і прив’язаний до певних циклічних подій. Людство таким інтервалом обрало обертання Землі навколо Сонця (рік) і інтервал обертання Землі навколо своєї осі (доба). Ці два одиничні інтервали між циклічними подіями й були покладені в основу вимірювання у чергуванні подій і обчисленні часу.

[23/] Физические величины. Справочник. – М., 1991. – С. 9.

У стародавні часи рік визначався за циклічними природними явищами, наприклад, у Стародавньому Єгипті це був інтервал між послідовними розливами річки Ніл, в інших країнах інтервал між цвітінням певних рослин, між певними релігійними святами, пов'язаними з якимось природними явищами та ін. Природно, що ці явища лише приблизно визначали річний інтервал. Доба теж не є достатньо чіткою як одиниця вимірювання часу в зв'язку з тим, що Земля обертається навколо своєї осі не рівномірно. Але обидва ці інтервали мають спільну властивість – вони відображають порядок чергування подій.

Оскільки інтервал між подіями може бути різної протяжності, то природно, постає питання кількісного порівняння інтервалів і тут виникає потреба в одиницях обчислення часу різної розмірності. У річній розмірності, прив'язаної до обертання Землі навколо Сонця, у Стародавньому Єгипті період між розливами річки Нілу був поділений на 12 частин (у Стародавньому Єгипті використовувалася 12-ткова система числення). Кожна з таких частин мала свою назву і стала прототипом сучасного місяця. Кожний місяць мав певну кількість діб.

Як ми вже зазначали вище (стор. 16), доба прив'язана до обертання Землі навколо своєї осі. Уперше метод обчислення часу протягом доби був використаний у Стародавньому Єгипті. Доба ділилася на 2 частини день і ніч. Кожна частина ділилася на 12 частин. Звідси доба – 24 частини. Одна з таких частин отримала назву *година*. У Вавилоні після 300 року до н. е. на відрізку години часовий інтервал був поділений на 60 рівних частин. Так з'явилася нова одиниця виміру – *хвилина*, яка в свою чергу була поділена ще на 60 рівних частин, кожна з яких отримала назву *секунда*, як $^{1}/_{3600}$ частина години.

Отже, у другому значенні поняття величини, що виражає її кількісну характеристику, ***час*** визначається ***як міра чергування подій.***

У повсякденному житті час розуміється як тривалість певного інтервалу в порядку чергування подій певного роду, що вимірюється секундами, хвилинами, годинами, роками і т.п. («Через 15 годин», «Два дні», «Три роки») – у цих випадках мова йде про проміжки часу, і як дату («20 лютого 1960 року», «О 12 годині 15 хвилин» і т.п.) – у цих випадках мова йде про числа, що визначають хронологію подій. *Час як дата* не є адитивно-скалярною величиною, і тому дати додавати не можна. А *час як тривалість* є адитивно-скалярною величиною і тому має всі властивості адитивно-скалярних величин. Проміжки часу, так само як і довжини відрізків, площі поверхонь, маси тіл, можна порівнювати, додавати, віднімати, множити, ділити на додатне дійсне число.

У системі СІ за одиницю часу прийнята *секунда*. На сьогодні її визначення не залежить від обертання Землі. Нині секундний інтервал визначається на атомарному рівні.

Для вимірювання великих інтервалів використовується така одиниця як тропічний рік (час, за який Земля робить повний оберт навколо Сонця), що дорівнює приблизно 365, 242199 середніх сонячних діб.

Слід зазначити, що за одиничний інтервал в обчисленні часу можуть виступати не тільки стандартні одиниці (секунда, хвилина, година, доба та ін.), а й будь-який інтервал між довільними подіями, наприклад, людське життя (вираз: «Його здоров'я хвате на 3 людські життя»), виконання якихось дій (вираз: «За час його відсутності напарник вже двічі об'їхав поле») та ін.

Практичні завдання для закріплення

Розв'язати задачі:

1. Миколка вранці встав з ліжка о 7 годині ранку. Перш за все зробив ранкову гімнастику і підготувався до сніданку. Стільки ж часу він витратив на сніданок. На дорогу до школи Миколка витратив удвічі більше часу, ніж на сніданок. На уроки у школі пішло часу у 8 разів більше, ніж на дорогу до школи, на дорогу до дому Миколка витратив стільки ж часу, скільки вранці на дорогу до школи.

1) Скільки часових інтервалів, що дорівнюють часу, витраченому на сніданок, Миколка витратив на час від початку ранкової гімнастики до повернення до дому?

2) Скільки це буде годин і хвилин, якщо на сніданок Миколка витратив 19 хвилин?

2. Іванко і Петрик із села А вирішили зустрітися із Миколкою, який живе у селі Б. Іванко вирушив у дорогу на велосипеді із швидкістю удвічі більшою, ніж пішохід, а Петрик половину шляху йшов пішки, а другу половину проїхав на машині зі швидкість у 10 разів швидшою, ніж пішохід. Хто раніше прийде до товариша і на який термін?

3. Виконуючи однакове завдання два працівника використовували різні технології, тому перший працівник витратив на завдання на половину робочого дня менше, ніж другий. На скільки часу перший працівник витратить менше, ніж другий, виконуючи 6 таких завдань? Скільки це буде годин, якщо робочий день дорівнює 8 годин?

4. Шкільні канікули розпочалися 26 грудня і завершилися 8 січня. Яка тривалість канікул?

5. Т. Г. Шевченко народився через 15 років після народження О. С. Пушкіна, а помер через 24 роки після його загибелі. На скільки років Т. Г. Шевченко прожив більше, ніж О. С. Пушкін?

6. У 1037 р. у Києві князь Ярослав Мудрий заснував першу бібліотеку. З того часу розпочалася історія української бібліотеки. Скільки років на сьогодні налічує українська бібліотека?

7. Видатний український композитор М. В. Лисенко народився 10 березня 1842 р., а помер 24 жовтня 1912 р. Скільки років, місяців і днів прожив М. В. Лисенко?

8. Літак з Києва до Лондона вилетів у 23 години 50 хвилин 15 квітня і був у польоті 3 години 18 хвилин. Коли літак прибув до Лондона?

9. Автобус з Києва до Краматорська виїхав о 7 годині 25 хвилин. Через 5 годин 39 хвилин він прибув до Полтави і через 1 годину 5 хвилин вирушив до Харкова, куди й прибув через 4 години 24 хвилини. Через 1 годину і 15 хвилин автобус вирушив до Краматорська, витративши на цей шлях 4 години 49 хвилин. Скільки часу автобус був у дорозі? О котрій годині він прибував у Полтаву, Харків і Краматорськ?

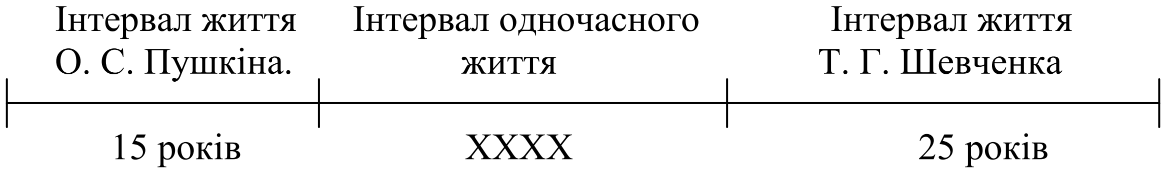
Зразок розв’язання задачі на тему „Час”

Задача. Т. Г. Шевченко народився через 15 років після народження О. С. Пушкіна, а помер через 24 роки після його загибелі. На скільки років Т. Г. Шевченко прожив більше, ніж О. С. Пушкін?

Мета: Сформувати чітку уяву школярів про час з позицій чергування подій.

Розв’язання задачі.

Аналіз задачі висвітлює наступні події: 1) народження О. С. Пушкіна раніше народження Т. Г. Шевченка; 2) інтервал одночасного життя; 3) інтервал життя Т. Г. Шевченка після смерті О. С. Пушкіна. Графічно це можна представити так:



Міркування: Оскільки є інтервал спільного життя, різниця інтервалу життя полягає в першому і третьому інтервалах. Оскільки другий інтервал більший, то це говорить, що Т. Г. Шевченко прожив більше, ніж О. С. Пушкін. Тривалість же цієї різниці інтервалів дорівнює 25 років – 15 років = 10 років. Отже Т. Г. Шевченко прожив більше, ніж О. С. Пушкін на 10 років.

Відповідь: 10 років.

Коментар. У змісті задачі розглядається ланцюг подій (народження О. С. Пушкіна, народження Т. Г. Шевченка, кінець життя О. С. Пушкіна і кінець життя Т. Г. Шевченка). Між кожною з цих подій існує певний часовий інтервал, одиницею якого є постійний інтервал – обертання Землі навколо Сонця, який іменується 1 рік. Основою методу розв’язання задачі є порівняння зазначених інтервалів між подіями і числовому вираженні їх у порівнянні з 1 роком.

Творча складова полягає в логіці міркування, яку повинен вибудувати учень, аналізуючи чергування зазначених часових інтервалів.

Питання і завдання для самоконтролю

1. Опишіть поняття скалярної величини. Охарактеризуйте основні підходи до визначення скалярної величини з позицій сучасної математики. Які величини розглядаються в курсі математики початкової школи? Які етапи передбачає робота над формуванням поняття величини

у молодших школярів? Дайте коротку характеристику кожному з них.

2. У чому полягає суть обчислення величини? Дайте визначення числового значення величини.

3. Визначте поняття «довжина відрізка». Які властивості має поняття «довжина»? Як формується поняття «довжина» у молодших школярів? Які з властивості поняття «довжина» використовуються в початковому курсі математики? Наведіть приклади завдань.

4. З якими одиницями довжини знайомляться учні в курсі математики початкової школи?

5. Дайте визначення площі плоскої фігури. Якими властивостями володіє поняття «площа»? Охарактеризуйте систему діяльності вчителя по ознайомленню молодших школярів з поняттям «площа». Вивчення яких властивостей площі передбачає курс математики початкової школи?

6. Що означає термін «виміряти площу плоскої фігури?». З якими одиницями вимірювання площі знайомляться молодші школярі? Опишіть процес вимірювання площі за допомогою палетки.

7. Дайте визначення рівновеликих фігур. Які властивості мають рівновеликі фігури?

8. Визначити поняття рівноскладеності фігур. Вкажіть властивості рівноскладених фігур.

9. Які способи знаходження площі плоских фігур ви знаєте? Вкажіть ті, які розглядаються в початковому курсі математики.

10. Дайте визначення об’єму тіла. Які властивості має термін «об’єм тіла»? Вкажіть, якими засобами користуються для вимірювання об’єму. Сформулюйте правила порівняння об’ємів. Охарактеризуйте дії над об’ємами як величинами. З якими способами знаходження об’ємів тіл знайомляться учні початкових класів?

11. Що таке маса тіла? Як проводиться вимірювання маси тіла?

Назвіть основні одиниці вимірювання величини «маса». Якими властивостями володіє дана величина?

12. Як проводиться вимірювання величини кута? За допомогою якого інструменту проводять виміри величин кутів в найпростіших випадках? Назвіть одиниці вимірювання величини кутів.

13. Опишіть величину «час». Вкажіть універсальні властивості часу. В яких одиницях вимірюється дана величина?

РОЗДІЛ ІІІ

РОЛЬ І МІСЦЕ ТЕОРІЇ ВЕЛИЧИН У СИСТЕМІ МАТЕМАТИЧНИХ ЗНАНЬ ТА ОСНОВНИХ ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ ГАЛУЗЕЙ ПОЧАТКОВОЇ ОСВІТИ

Сучасна математика – це область людського знання, в центрі якої стоїть наука про математичні структури, просторові форми і кількісні відносини об'єктів реального світу. Усвідомлення молодшими школярами елементарних математичних уявлень, засвоєння знань і набуття вмінь необхідне для застосування їх в різних видах діяльності (пізнавальної, комунікативної, трудової та ін.), без чого неможливе успішне продовження і отримання загальної освіти.

Поняття «число» і «величина» є основними, базовими поняттями курсу математики початкової школи. В. Каган підкреслював, що вчення про величини відіграє виключно важливу роль у курсі математики [24/].

З метою вдосконалення дидактичних, методичних і педагогічних основ методики викладання математики на матеріалі вивчення величин у початковій школі й розвитку ключових компетенцій молодших школярів, учителю необхідно:

– осмислити роль і місце теорії величин з позицій сучасного наукового рівня загальнонаукових та спеціальних знань і з позицій можливостей їх застосування у практичній діяльності;

– усвідомити, що величини можна класифікувати за освітніми галузями, в яких вони вивчаються.

Математика вивчає абстрактні величини, придатні для будь-яких додатків: величини постійні та змінні, випадкові і невипадкові, скінченні і нескінченні, тобто математика об'єднує в собі різні величини числових і нечислових типів.

Як вже зазначалося, величини бувають *скалярні* і *векторні*. *Скалярними величинами* називаються такі, які характеризуються тільки

---

[24] *Каган В. Ф.* Очерки по геометрии. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1963. – 572 с

числовим значенням (довжина, площа, об’єм, маса, час та ін.). *Векторними величинами* називаються такі, які характеризуються двома параметрами – числом і напрямом.

Програмою з математики початкової школи передбачено вивчення в основному скалярних величин. З векторною величиною учні зустрічаються лише у процесі знайомства з поняттям швидкості. Величини *довжина, маса, об’єм, площа* відносяться до множини метричних величин, а *час* – неметричних. Також, вивчається зв’язок між величинами *ціна, кількість, вартість* та *швидкість* (в частині ознайомлення учнів з пропорційними величинами).

Цілеспрямоване формування поняття величини відбувається в процесі вивчення математики, інформатики, природознавства тощо. Усунення розбіжностей, щодо суті та змісту цього поняття в різних галузях знань, дозволяє визначити основи розвитку предметних компетенцій у процесі вивчення поняття величини в курсі математики.

Основним завданням навчання математики є опанування учнями предметних математичних компетенцій, які є структурними елементами змісту математичної освіти. Їх основою є знання, уміння, навички, способи діяльності, яких набувають школярі у процесі навчання величин. Результатом сформованості предметних компетенцій є математична компетентність учнів щодо осмислення ролі і місця величин у повсякденному житті. Предметна математична компетентність щодо освоєння величин виявляється у таких ознаках: цілісне сприйняття світу, розуміння ролі величин у пізнанні дійсності; здатність розв’язувати сюжетні задачі, логічно міркувати; уміння користуватися математичною термінологією, знаковою та графічною інформацією; уміння орієнтуватися на площині та у просторі; здатність застосовувати обчислювальні навички й досвід вимірювання об’єктів, що пов’язані із зазначеними величинами у практичних ситуаціях.

Інваріантний зміст, який об’єднує існуючі програми навчання початкового курсу математики полягає у тому, що, по-перше, в основу кожної системи навчання покладено поняття «число» і «величина», а по-друге, що при вивченні поняття величини виявляються її загальні властивості, які лежать в основі визначення. Оскільки поняття величини в початковій школі формується без визначення, то у разі виконання практичних завдань, пов'язаних з вимірюванням, які основані на спостереженнях і на особистому життєвому досвіді учнів, вчитель, на початкових етапах спирається на їхню інтуїцію, але сам чітко розуміє наукову сутність і особливості зазначеного поняття.

Автори курсу математики для початкової школи, розробленого під керівництвом В. Давидова, вважають, що поняття величини є коренем «дерева чисел» і тому його формування починається з виконання практичних дій щодо вимірювання об'єктів[25/]. Такий підхід дозволяє виявити різні властивості величин, здійснювати їх порівняння і перетворення. У ситуаціях, коли безпосереднє порівняння виконати неможливо, учні звертаються до об'єкта-посередника – *мірки,* за допомогою якої знаходять кратне відношення між однорідними об'єктами. Число, як модель кратного відношення об'єктів, надає можливість розв'язати завдання різницевого порівняння без практичного їх співвіднесення. Таким чином, учні відкривають способи порівняння і перетворення об'єктів, виділяють за допомогою відповідних засобів їх кратне відношення і засвоюють спосіб отримання числової характеристики об'єктів, і тим самим оволодівають науковим поняттям величини. Так вони переходять від допонятійного до, власне, понятійного способу пізнання світу, опановуючи, таким чином, системою ключових компетенцій[26/].

Н. Віленкин, в основу навчання початкової математики поклав такі фундаментальні поняття, як «множина», «величина», «відношення»,

[25] Давыдов В. В. Теория развивающего обучения. – М., 1996. –С. 169.
[26] Тихоненко А. В. К вопросу о формировании ключевых математических компетенций младших школьников // Начальная школа, –2006. –№ 4. –С. 78 – 84.

«число». Він вважає, що введення поняття числа здійснюється як на основі лічби, так і на основі вимірювання. За його методикою на ранніх етапах навчання з опорою на досвід учнів і прийом використання конкретних прикладів уводяться поняття числа та величини, а операції над множинами вивчаються паралельно з відповідними операціями над величинами і становлять основу вивчення відповідних операцій над числами. Ще до вступу до школи учні з життєвого досвіду мають певне уявлення щодо відстані між об'єктами (протяжності відрізка), про поняття площі окремих ділянок, тривалість проміжку часу, важкі та легкі предмети (маса – 1 *кг*, місткість – 1 *літр*, стакан, півлітра ...) та ін.

Тож, зазначимо основні моменти: по-перше, в основі знайомства з величинами лежить, окрім інтуїтивного методу, дошкільний досвід учнів, відповідно до якого формується уявлення про величину як про деяку властивість предметів і явищ реального світу (довше – коротше, важче – легше, раніше – пізніше тощо), яке пов'язане, перш за все, з вимірюванням. Результатом вимірювання є числове значення вимірюваного об'єкту в прийнятих одиницях виміру, що виступає як відношення одного об'єкту до іншого об'єкту того ж роду, прийнятого за одиницю виміру.

По-друге, учням необхідно дати уявлення про розрізнення понять «число» і «величина», щоб вони могли усвідомити, що такі операції, як лічба і вимірювання, істотно різні. При обчисленні, скажімо, довжини класної кімнати, користуючись метром, відраховується кількість відкладань: 1, 2, 3, 4 і т. д. У результаті записується число з відповідним найменуванням предмету, яким вимірювали – 4 *м*, яке означає вже величину. Метр при цьому приймається за одиницю виміру. Тому терміни «число» і «величина» слід використовувати коректно.

По-третє, необхідно довести до відома учнів, що означає обчислити величину? Воно тісно пов'язане з вимірюванням. У посібнику «Международная система единиц» вимірювання визначається як «…дія, яка виконуються за допомогою засобів вимірювання, метою якої є знаходження числового значення вимірюваної величини в прийнятих одиницях виміру» [27/]. По суті, це визначення лише в загальних рисах відображає процес вимірювання, але не розкриває суті поняття. На наш погляд: «***Вимірювання – це порівняння двох елементів однієї й тієї ж множини, одному з яких за домовленістю ставиться у відповідність число 1»***[28/]. Ми вважаємо, що це визначення більш конкретно відображає сутність даного поняття, по-перше, – це порівняння, по-друге, – в цьому процесі беруть участь елементи тільки й тільки однієї множини, по-третє, – встановлюється взаємозв'язок елемента множини з числом, тобто вводиться одиниця виміру. Приналежність елементів одній множині визначає рід величини. Для відрізків – це довжина, для поверхонь – площа, для ємностей – об'єм, для речовини – маса, для чергування подій – час та ін. А з цього виникають поняття однорідних і різнорідних величин.

Тож, при виконанні завдань, пов'язаних з використанням відношень порядку «більше», «менше», «дорівнює» і фіксацією числових значень цих відношень, учитель повинен відповідні завдання формулювати коректно наступним чином:

«Порівняйте однорідні величини: 3 *кг* і 5 *кг*; 3 *л* і 5 *л*; 7 *м* і 9 *дм*».

«Порівняйте однорідні величини, виражені в одиницях двох найменувань:

10 *см* 2 *мм* і 1 *дм* 2 *мм*; 3 *кг* 200 *г* і 4 *кг* 200 *г*;

12 *км* 30 *м* і 130 *м* 56 *дм*. 17 *дм* і 5 *см* і 1 *м* 50 *мм».*

«Виконайте зазначені дії над величинами:

15 *м* 20 *см* + 3 *м* 5 *см*; 20 *кг* 200 *г* – 18 *кг* 30 *г* »

При виконанні завдань, пов'язаних з використанням відношень

«довше – коротше», «вуже – ширше», «важче – легше», необхідно акцентувати увагу учнів на те, що порівнювати слід у першу чергу

[27] Бурдун Г. Д. Международная система единиц / Г. Д. Бурдун, В. Н. Калашников, Л. Р. Тоцкий / под ред. Г. Д. Бурдун. – М. , –1964. – С. 7.

[28] Сарієнко В.К., Сарієнко В.В. Математика: посібник для студентів спеціальності «Початкова освіта». – Слов'янськ: ДДПУ, 2013. – С. 101.

вимірювані об’єкти і тому формулювання відповідних завдань має бути таким:

«Порівняйте смужки довжиною 1 *дм* і 10 *см*;   3 *дм* і 3 *см*».

«Порівняйте тіла, які мають маси 5 *кг* 200 *г* і 4 *кг* 900 *г*;

3 *т* 5 *ц* і 5 *т* 3 *ц*».

«Накресліть два будь-які відрізки. Обчисліть довжини цих відрізків. Запишіть результати їх вимірювання. Знайдіть суму і різницю довжин відрізків, запишіть їх числові значення. Порівняйте отримані довжини відрізків на кресленнях».

Одним із суттєвих недоліків у засвоєнні поняття величини часто є роз'єднаність її двох значень:

– учні не бачать зв’язків і відношень, що існують між величинами;

– не звертають уваги на відмінність таких понять, як «величина» і «одиниці виміру об’єкта»;

– допускаються помилок при порівнянні однорідних величин, виражених одиницями двох найменувань тощо.

Для подолання цих недоліків необхідна така технологія формування поняття величини, яка надасть учням можливість порівнювати певні величини, знаходити в них спільне і відмінне, розглядати відношення між протилежними поняттями.

Конкретизуючи предметний зміст поняття величини, відзначимо, що величина – це числова характеристика, що відображає певні властивості елементів реального світу, тобто властивості предметів, явищ, станів матерії. Поняття величини відноситься до числа основних природничо-наукових і математичних понять, тому воно є загальнонауковим і має загальнокультурне значення. У зв’язку з цим правомірним є вивчення поняття величини в таких загальноосвітніх галузях початкової школи, як інформативна, природнича, технологічна тощо. Оскільки поняття величини є одним з основних понять кількох шкільних предметів, то особливо важливо на уроках математики враховувати міжпредметні зв’язки під час ознайомлення з різновидами величин. Так, розглядаючи поняття величини в природничій освітній галузі, учні повинні:

– вміти розв’язувати практичні завдання, користуючись для обчислення величин адекватними вимірювальними приладами: терезами і набором гир, лінійкою, рулеткою, циркулем та ін.;

– записувати результати вимірювань в різних одиницях виміру (*см, м, км, кг, г* та ін.);

– розв’язувати нескладні практичні (побутові) завдання на знаходження суми, різниці, добутку і діленню величини на число, добутку величини на величину (результатом добутку швидкості на час є відстань (довжина)).

У природничій освітній галузі у молодших школярів формуються уявлення про різноманітність об’єктів і явищ природи, їх властивості, якості і стани; усвідомлення елементарних зв’язків, залежностей, зміни явищ у часі і просторі. Тому, розглядаючи поняття величини в цій галузі, учні повинні:

– вміти обчислювати час за допомогою годинника, температуру за допомогою термометра;

– записувати результати обчислення величини в різних одиницях вимірювання (рік, тиждень, доба, місяць, година та ін.).

Одним із основних змістових навчальних напрямків освітньої галузі «мистецтво» щодо поняття величини є орієнтування учнів як в образотворчій культурі, так і в технології образотворчих зображень, тобто відтворення простих форм прямою та кривою лінією в площинному та просторовому зображенні та елементарні засоби компонування простих форм – заповнення площини аркуша, поняття про лінію горизонту, розміщення елементів зображення з дотриманням їх просторового взаємного розташування, визначення геометричного характеру форм, поняття симетричної просторової форми тощо.

При вивченні поняття величини в інформативній освітній галузі окрім оволодіння користувачами навичками роботи з комп’ютером (робота з клавіатурою, маніпулятором «миша» та ін.), учні знайомляться з різними формами подання та обліку інформації (біт, байт, герц та ін.), методами її збору та систематизації, демонструють сформовані вміння і навички роботи з інформацією і застосовують їх як при розв'язанні практичних завдань, так і в повсякденному житті.

Згідно з програмою з інформатики учні повинні знати й розуміти: одиниці виміру інформації; представлення величин в пам'яті комп'ютера; вміти виконувати базові операції над величинами, наприклад, ланцюгом символів, числами, списками; виконувати та будувати прості алгоритми роботи з величинами; використовувати набуті знання і вміння в практичній діяльності та повсякденному житті для створення найпростіших моделей об'єктів, проведення комп'ютерних експериментів (С. Пестрякова).

Галузь «Технології» ставить за менту формування і розвиток предметно-перетворювальної компетентності учнів, що реалізується, зокрема, через поняття величини, а саме: знання про лінії, геометричні фігури, уміння будувати розгортки прямокутних форм, виготовляти паперові об'ємні фігури, розміщувати розгортки на аркуші в клітинку, вимірювати заготовки необхідної довжини тощо.

Перелік загальних вимог і предметних компетенцій, якими повинні оволодіти молодші школярі в процесі вивчення поняття величин в системі початкової школи в деяких освітніх галузях, представлені в таблиці № 3.1.

Таблиця 3.1.

Основні вимоги до знань, умінь учнів про величини в різних освітніх галузях початкової школи і оволодіння предметними компетенціями.

Предмет	Вимоги до засвоєння поняття «величина»	Компетенції, якими повинні оволодіти учні
Математика	***Знати:*** – таблиці одиниць вимірювання фізичних об'єктів (відрізків, поверхонь, ємності, речовини, чергування подій тощо) та позначення цих одиниць; – співвідношення між такими	– усвідомлювати зв'язки і залежності між одиницями вимірювання фізичних об'єктів; – усвідомлювати залежність між

	величинами, як швидкість, час, відстань; ціна, кількість, вартість; – математичні формули знаходження швидкості, часу, відстані; ціни, кількості, вартості; площі прямокутника, квадрата; об'єму прямокутного паралелепіпеда. ***Уміти:*** – користуватися основними одиницями вимірювання відрізків, речовини, поверхні, чергування подій, ємностей; проводити вимірювання геометричних об'єктів для розв'язання практичних завдань (порівняння довжин предметів, мас тіл, проміжків часу та ін.); – перетворювати більші одиниці вимірювання у дрібніші і навпаки; – використовувати залежності між пропорційними величинами при розв'язанні практичних задач; – уміти обчислювати значення геометричних величин (довжин відрізків, площ фігур, об'ємів тіл), в тому числі кутів від 0 до 180°; – обчислювати значення:	швидкістю, часом, відстанню; ціною, кількістю, вартістю і використовувати її у розв'язанні конкретних завдань; – співвідносити математичні формули із залежністю між фізичними величинами, вираженими у відповідних формулах. – виконувати вимірювання геометричних об'єктів адекватними вимірювальними приладами і у різних відповідних одиницях вимірювання; –використовувати адекватні способи розв'язання завдань з пропорційними величинами; – знаходити оптимальні способи вимірювання геометричних об'єктів і обчислення значень їх величин; – використовувати знання формули периметра многокутника

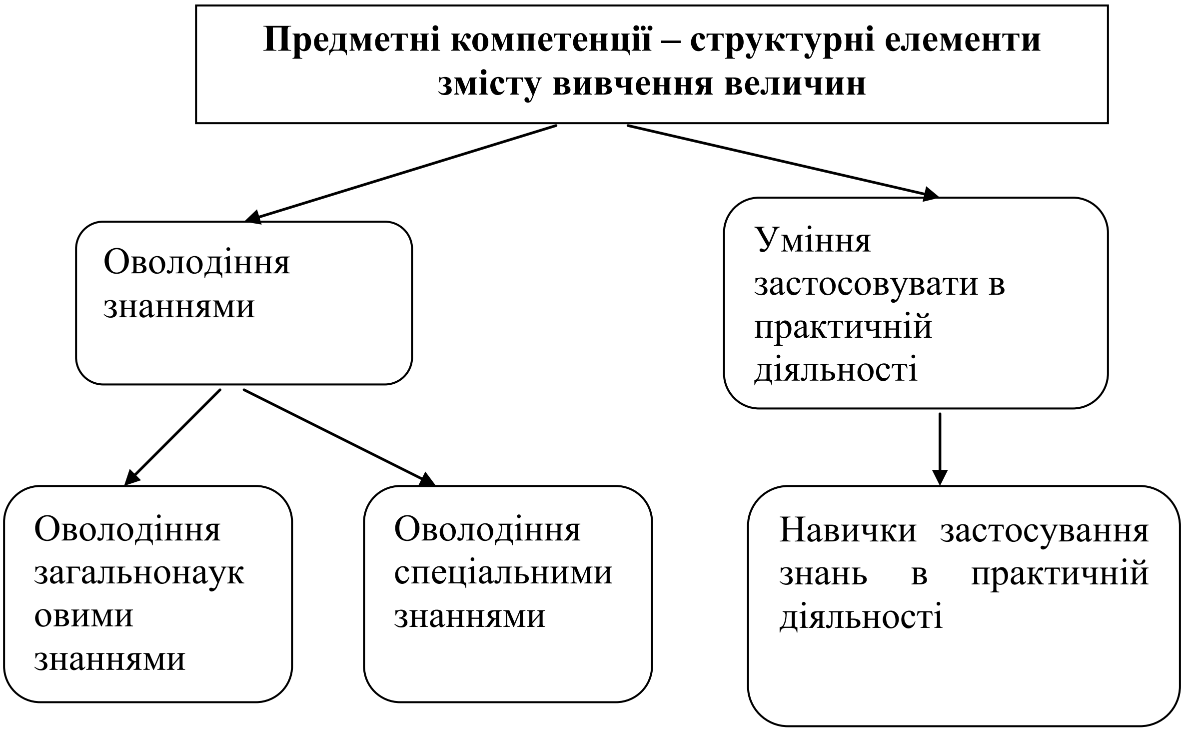
	довжини однієї сторони прямокутника за його периметром і довжиною іншої сторони; площі прямокутника, квадрата і фігур, складених з них; – обчислювати значення геометричних величин (довжин, площ, обсягів часу); – визначати час за годинником з точністю до хвилини; – розв'язувати завдання та задачі, пов'язані з поняттям часу; – проводити вимірювання фізичних об'єктів: відрізків, поверхонь, ємностей тіл (речовини).	(прямокутника, квадрата); площі прямокутника (квадрата) для розв'язання практичних завдань; – знаходити оптимальні шляхи розв'язання геометричних завдань в конкретній ситуації; – уміти називати час за годинником; – використовувати адекватні вимірювальні прилади і одиниці вимірювання.
Природа	***Знати*** – предметну термінологію; – засоби вимірювань природничих явищ; – методи виконання вимірювань ***Уміти*** – обчислювати масу речовини, швидкість процесів, час за допомогою годинника, записувати результати обчислення часу в різних одиницях (рік, місяць, тиждень, доба, хвилина і ін.); – використовувати залежності	– мати адекватні уявлення про різноманітність об'єктів і явищ природи, їх властивості, якості, стани; – здійснювати вибір доцільних засобів для розв'язання побутових завдань; – визначати взаємозв'язок предметних знань, упорядковувати їх;

	між одиницями обчислення часу при розв’язанні практичних завдань (1 рік = 365 (6) діб; 1 тиждень = 7 діб ; 1 доба. = 24 год; 1год. = 60 хв; 1 хв = 60 с).	– уміти отримувати користь з досвіду розв’язання практичних завдань на уроках математики з вимірювання об’єктів (маси тіл, часових проміжків); – організовувати взаємозв'язок своїх знань, отриманих з різних джерел.
	Застосовувати знання (вміти): – розв’язувати прості побутові завдання, користуючись вагами, мірками; обчислювати довжину за допомогою лінійки, рулетки; масу за допомогою ваг і гир; записувати результати вимірювань в різних одиницях (*см, м, кг, г*); – використовувати залежності між метричними одиницями вимірювання об’єктів при розв’язанні практичних побутових завдань (1 м = 100 см, 1 кг = 1000 г)	– уміти співпрацювати і працювати в групі; – консультуватися у батьків, старших товаришів; – організовувати взаємозв'язок минулих і справжніх знань з вимірювання різних об’єктів і впорядковувати їх. – уміти використовувати знання залежності між величинами, отриманими на уроках математики, організовуючи свою роботу при розв’язанні практичних завдань.
Інформатика	***Знати:*** – предметну термінологію; – засоби та одиниці вимірювання інформаційних об’єктів; – кількісні співвідношення між однорідними інформа-ційними об’єктами.	– мати уявлення про сутність інформаційних об’єктів; – здійснювати вибір доцільних засобів для розв’язання побутових завдань.

	Уміти: – використовувати кількісні характеристики інформаційних об’єктів для розв’язання завдань за допомогою комп’ютерної техніки.	– уміти використовувати відомості про зміст і кількісні характеристики інформаційних об’єктів у практичній роботі з комп’ютерною технікою.
Мистецтво	***Знати:*** – просторові відношення; – розміщення об’єктів на площині та у просторі; – геометричні фігури; ***Уміти:*** – розміщувати предмети на площині.	- мати уявлення про просторові відношення: вгорі, внизу, по центру, між, над, під тощо; - орієнтуватися та визначення розміщення об'єктів на площині та у просторі: зліва, справа, посередині; - знати та розпізнавати форму геометричних фігур: пряму, криву, відрізок, куб, кулю, циліндр, овал тощо
Технології	***Знати:*** – геометричні фігури; ***Уміти:*** – уміти обчислювати значення геометричних величин (довжин відрізків, площ поверхонь тощо);	– знати та розпізнавати форму геометричних фігур: пряму, криву, відрізок, куб, кулю, циліндр, овал тощо – уміти застосовувати одиниці вимірювання довжини, площі тощо.

Узагальнюючи матеріал різних освітніх галузей, представимо схематично предметні компетенції як структурні елементи змісту вивчення величин.

Схема 3.1.



Питання для самоконтролю

1. Проаналізуйте загальний підхід до формування поняття величини.

2. Назвіть недоліки, які існують у засвоєнні поняття величини. Яким чином можна організувати роботу із засвоєння конкретного поняття (на вибір) для подолання цих недоліків?

3. Як відображаються особливості вивчення поняття величини в змісті різних освітніх ліній початкової школи? Наведіть конкретні приклади.

4. Вкажіть компетенції, якими повинен опанувати молодший школяр в процесі вивчення поняття «величина» у початковій школі.

РОЗДІЛ IV
ПРОФЕСІЙНА ДІЯЛЬНІСТЬ УЧИТЕЛЯ В КОНТЕКСТІ ВИВЧЕННЯ ВЕЛИЧИН У ПОЧАТКОВІЙ ШКОЛІ

4.1. Підготовка вчителя до формування поняття величини в початковій школі

Розвиток молодших школярів під час навчання математики в значній мірі залежить від засвоєння ними таких базових понять, якими є поняття числа і величини. Ці поняття складають основу існуючих на даний час програм математики початкової школи. Оскільки поняття величини є сполучною ланкою між абстрактними уявленнями учнів і реальним світом й разом з тим загальнонауковим поняттям, воно, на наш погляд, може бути покладено в основу системи ключових компетенцій, що формуються як у студентів – майбутніх учителів у процесі професійної підготовки, так і в учнів початкової школи при вивченні курсу математики. Міцне засвоєння молодшими школярами величин у початкових класах у подальшому навчанні сприятиме ефективному засвоєнню не лише математичного матеріалу, а й матеріалу з інших навчальних предметів. Тому одним із основних завдань учителя початкової школи є створення умов для повноцінного опанування учнями математичної компетенції що пов’язана із засвоєнням поняття величини.

Знання основних способів формування поняття величини є необхідною умовою успішної діяльності вчителя в процесі навчання початкової математики. Під час підготовки майбутніх учителів початкових класів, вивчення величин слід будувати так, щоб було виявлено загальні властивості, які лежать в основі їх визначення. Звичайно, аксіоматичне визначення поняття скалярної величини, яке має високий рівень абстракції, не може бути використано при навчанні початкової математики. Тому в початкових класах відбувається елементарне знайомство з деякими видами величин, з їх властивостями, одиницями вимірювання і методами обчислення деяких з них, що становить власне математичний аспект інформативного компонента технології формування поняття «величина».

Однією з умов адекватного формування у свідомості молодших школярів поняття величини є активізація їх декларативних і процедурних знань, тобто **когнітивний аспект**, що передбачає акцентування уваги на перенесення знань з математичної області в інші та навпаки, на встановленні та закріпленні в свідомості учнів об’єктивно існуючих зв’язків між предметами і властивими їм ознаками, в тому числі й з їх кількісними характеристиками, вираженими в одиницях виміру величин. У цьому випадку когнітивний аспект інформативного компонента технології більш ніж інші пов’язаний з розвитком ключових компетенцій при навчанні, а його посилення сприяє ефективному процесу формування загальнонаукових понять. Професійна підготовка вчителя з формування поняття величини в учнів початкових класів конкретизується у наступному:

– у засвоєнні необхідних теоретичних знань учителем, практичних умінь та навичок щодо наукового змісту теорії величин; знання історії питання;

– у знанні вчителем понятійної основи, яка є в учнів і що сформувалася під впливом життєвого дошкільного досвіду, приведення її до системи, на яку можна спиратися в період розвитку ключових компетенцій учнів у формуванні поняття величини;

– в умінні вчителя виробити інтуїтивно зрозумілий учням спосіб пояснення матеріалу, вибрати адекватні та ефективні способи формування поняття величини (методи, прийоми, засоби, що забезпечують засвоєння поняття);

– в ознайомленні вчителя з фізичними об’єктами, критеріями їх порівняння, у яких величина є предметом математичного вивчення;

– у знанні теорії величин, її місця в системі математичних понять, зв'язків та відношень з іншими математичними та загальнонауковими поняттями;

– у знанні вчителем різноманітних підходів щодо формування поняття величини;

– в умінні вчителя активізувати пізнавальну діяльність учнів на всіх етапах формування поняття величини;

– у поєднанні наочно-образного, наочно-дієвого та словесно-логічного (абстрактного) мислення учнів, що забезпечує розвиток ключових компетенцій при формуванні поняття величини.

Сучасний рівень навчання математики в початковій школі вимагає вміння учнів виконувати логічні операції, тому **логічний аспект** інформативного компонента технології формування поняття величини, є обов'язковою умовою його засвоєння. При формуванні поняття величини вчитель, з одного боку, спирається на вміння учнів здійснювати логічні операції, на вже властиву їм здатність логічно мислити і відповідно міркувати, з іншого – активно розвиває цю здатність. Оволодіння поняттям величини тісно пов'язане з активною розумовою діяльністю молодших школярів, а саме, виконання таких логічних операцій, як аналіз і синтез, порівняння і співставлення, абстрагування, класифікація, конкретизація та узагальнення тощо. Уміння вчителя організувати процес засвоєння величин саме через логічні операції є дієвою умовою розвитку ключових компетенцій, яка полягає у наступному:

– вчити логічним зв'язкам: «і», «або», «якщо..., то...», порівняльним операціям: «стільки ж», «більше (менше) на стільки (у стільки раз)» тощо. Вони актуалізують у свідомості учнів уявлення про аналіз, порівняння, співставлення об'єктів величин як основи математичних дій;

– познайомити учнів зі способами порівняння величин і знаковими засобами фіксації результатів порівняння;

– познайомити з прийомами аналізу загальних властивостей величин та навчити виконувати математичні операції з числовими значеннями величини;

– вчити робити висновки за аналогією, за результатом порівняння та за умовиводом (дедуктивного або індуктивного типу) тощо.

Завданнями змістової лінії «Величини» є ознайомлення учнів із основними величинами та їх обчисленням. Ця змістова лінія є пропедевтичною основою для побудови моделей навколишнього світу, важливою ланкою, що пов'язує математику з іншими науками. Тож, **методичний аспект** щодо формування уявлень учнів про величини висуває вимоги до вчителя, які полягають у наступному:

– наявність знань основних завдань початкового навчання математики та змісту предметних математичних компетенцій – логічних, обчислювальних, інформаційно-графічних, геометричних тощо визначених програмою для опанування учнями;

– наявність знань теоретичних основ методики навчання величин в початковій школі;

– високопрофесійне володіння методикою навчання величин учнів початкових класів;

– знання практичних шляхів здійснення процесу навчання величин в початковій школі.

Зазначені вимоги мають своїм головним завданням:

– надати учням конкретні уявлення про ту чи іншу величину;

– навчити учнів застосовувати відповідну термінологію;

– ознайомити школярів з одиницями обчислення величин та їх співвідношенням;

– навчити учнів виражати результати вимірювання різних об'єктів у відповідних одиницях вимірювання;

– навчити початківців виконувати перетворення одиниць обчислення величини одного найменування, в одиниці двох найменувань і навпаки;

– сформувати навички вимірювання об’єктів, що мають відповідну величину відповідними вимірювальними приладами;

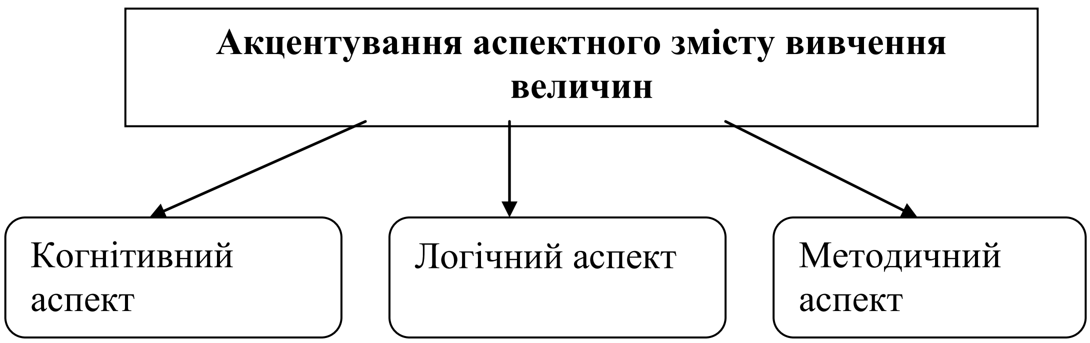
– сформувати уміння оперувати різними одиницями вимірювання у процесі розв’язання задач практичного характеру;

– ознайомити з трійками взаємопов’язаних величин, які перебувають у пропорційній залежності тощо.

Отже, під час підготовки вчителя початкової школи до формування у молодших школярів поняття величини провідну роль відіграють когнітивний, логічний та методичний аспекти, які спрямовані на оволодіння загальнонауковими поняттями і, як наслідок, на розвиток ключових компетенцій, що забезпечують пізнавальну діяльність школярів.

Узагальнюючи матеріал підготовки вчителя початкової школи щодо формування у молодших школярів поняття величини, можна стверджувати, що когнітивний, логічний та методичний аспекти відіграють ключову роль у спрямуванні на оволодіння загальнонауковими поняттями і, як наслідок, на розвиток ключових компетенцій, що забезпечують пізнавальну діяльність школярів. (Схема 4. 1.)

Схема 4.1.



4.2. Інформаційний компонент технології вивчення величин та їх вимірювань в початковій школі

В епоху розвитку інформаційного суспільства кожному суб'єкту навчання повинна бути надана можливість користуватися необхідною інформацією, отримувати можливість її збору, зберігання, упорядкування. Поняття «інформативний» і «інформаційний» у педагогічній літературі вживаються як «інформативний компонент технології навчання», або «інформаційні технології».

Термін «*інформаційний*» є похідним від слова «інформація», значення якого за тлумачним словником С. І. Ожегова такі: 1. Спеціальні відомості про навколишній світ і процеси, що протікають у ньому, та сприймаються людиною або спеціальними пристроями. Наприклад, «Теорія інформації». 2. Повідомлення, що інформують про стан справ, про стан чого-небудь, наприклад, відеоінформація, медіа інформація та ін. Отримання інформації у певний спосіб визначає технологію. Отже, «інформаційні технології» в методиці викладання навчальної дисципліни – це технології передачі інформації.

В сучасних умовах здійснення безперервної освіти особливої актуальності набула проблема інтенсифікації інформатизації процесу навчання. На даний момент відбувається процес «семіотизації» суспільства – поява і розвиток численних знакових систем, завдяки яким утворюється багатокомпонентне «інформаційне поле», що являє собою інформаційне оточення людини (поєднання текстів, графічного зображення, звукових та аудіовізуальних повідомлень та ін.). Виникає проблема інформаційної комунікативної адаптації людини в суспільстві. Суспільство усвідомило, що майбутнє немислимо без інформатизації всіх сфер людської діяльності. У зв'язку з цим пріоритети в способах і методах навчання змінюються від подачі готових знань до навчання способам пошуку (вмінню швидко і своєчасно отримати необхідну інформацію), зберігання, вибору, якісної обробки необхідної інформації та її використання.

Сучасне суспільство поставило людину в умови жорстокої професійної конкуренції, в рамках якої той, хто не володіє інформаційними технологіями, позбавляється одного з адаптаційних механізмів у соціумі, позбавляється можливості прогресивного становлення професійно-значущих якостей особистості в різних областях практичної діяльності.

Освіта – це процес, спрямований в майбутнє. Стрижнем професійної компетентності є не інформованість учня, а вміння використовувати нові інформаційні технології, які мають суспільну цінність, уміння вирішувати проблеми, які виникають в різних сферах діяльності. Тому основним напрямком удосконалення освіти початкової школи є формування у молодших школярів інформаційної компетентності, складовими якої є інформаційна культура і комп’ютерна грамотність.

У даний час в сфері використання комп’ютерних технологій в початковій школі можна виділити два основних напрямки: теоретичний та прикладний. Перший з них направлений на використання комп’ютера для засвоєння теоретичних основ розглянутих математичних понять. Прикладний напрямок використання комп’ютерних технологій представляється як технічний засіб навчання.

Історично дидактика завжди використовувала інформаційні засоби навчання. Це засоби зберігання, обробки і передачі інформації. До них відносяться книга, авторучка, калькулятор, звукова та відеоапаратура та ін., Їх удосконалення завжди підвищувало ефективність навчання.

Найбільш досконалим інформаційним засобом навчання на сьогодні є комп'ютер.

Використання комп'ютерних технологій в системі навчання має суттєво-значимі переваги перед репродуктивними методами та вербальним способом подання навчальної інформації; дає додаткові механізми впливу на розвиток пізнавального інтересу учнів; дозволяє поєднувати два види електронного навчання: рецептивне й інтерактивне. Особливо чітко ці можливості проявляються в початковій школі, оскільки дозволяють на більш високому рівні реалізувати такі принципи навчання, як науковість, наочність, доступність, принципи індивідуалізації навчання, свідомості і активності.

Використання інформаційних технологій як елемента *інформаційного компонента* в організації навчання спрямоване на встановлення асоціативних зв'язків не лише між окремими поняттями, термінами, фрагментами тексту в навчальному матеріалі, а й між окремими темами навчальної дисципліни. Так, в курсі математики початкової школи, відповідно до програми Л. Петерсон при вивченні загального поняття арифметичної операції розглядаються питання: над якими об'єктами виконується операція; в чому вона полягає; в чому полягає результат операції. При цьому звертається увага як на абстрактні операції (додавання або віднімання числових значень величин), так і на конкретні (вимірювання відрізка, поверхні, кількості речовини тіла, інтервалу між подіями тощо). Виконання зазначених операцій означає планомірну діяльність, що здійснюється за заданою програмою (алгоритмом). При цьому розрізняють нерозгалужені, розгалужені та циклічні програми. Знайомство з такими питаннями не лише допомагає успішно розв'язувати складні завдання шкільної програми (порядок дій у виразах, алгоритми дій з багатозначними числами, алгоритм переходу від одних одиниць вимірювання об'єктів до інших), але й готує учнів до засвоєння важливої для сучасного життя ідеї програмування.

Уведення засобів інформаційних технологій в традиційну модель навчання з передачею комп'ютеру частини функцій педагога (функції контролю, тренінгу тощо) допомагають перебудувати її в технологічному і в результативному аспектах, оскільки комп'ютер реалізує як функції викладача, так і свої специфічні функції. Застосування комп'ютерів у навчальному процесі дозволяє ефективно використовувати в практиці навчання систематичну поточну перевірку знань учнів (на основі єдиних знань, які розповсюджуються на стандартному носієві з автоматичною обробкою результатів перевірки і видачею чи статистичних даних про результати навчання). Використання інформаційних технологій в навчанні створює умови для інтеграції навчальних предметів, формування єдиної, цілісної наукової картини світу. Усвідомлення вчителями нових цілей початкової освіти істотно впливає на зміст навчання, виховання і розвитку молодших школярів.

Зміна пріоритетів у цілях початкової освіти:

а) змінює співвідношення між так званими «фундаментальними та прикладними» предметами (рідна мова, математика, природознавство, інформатика) і предметами «загальнокультурного розвитку» (образотворче мистецтво, музика, фізична культура тощо);

б) створює основу для розробки нових навчальних предметів, більш широкої та повноцінної реалізації завдання розвитку особистості;

в) відкриває широкі можливості для уведення поряд з обов'язковими уроками уроків за вибором і факультативних занять, які можуть претендувати на значну частку навчального часу в початковому навчанні.

Однією з основних завдань учителя початкових класів є завдання залучення учнів до комп'ютера, збору учнями необхідної інформації, способів її пошуку, зберігання та використання в практичній діяльності, тобто формування інформаційної компетентності.

Регулярне застосування електронних навчальних матеріалів не тільки сприяє розвитку інформаційної компетентності учнів початкових класів, а й дозволяє вирішувати цілий ряд психолого-педагогічних проблем.

Практика показує, що за умови дидактично продуманого застосування інформаційних технологій в рамках традиційного уроку з’являються необмежені можливості для індивідуалізації та диференціації навчального процесу, гарантується розвиток у кожного школяра власної освітньої траєкторії в отриманні знань. Таким чином, відбувається суттєва зміна навчального процесу, його переорієнтація на розвиток мислення, уяви як основних процесів пізнання, необхідних для якісного навчання; забезпечується ефективна організація пізнавальної і самостійної діяльності учнів; проявляється здатність до співпраці, самовдосконалення, самореалізації, творчості та ін.

Включення в існуючу систему навчання електронних навчальних розробок робить процес отримання знань комплексним, ефективним і формує у молодших школярів:

– здатність до системного мислення, до самостійних дій в умовах невизначеності та непередбачуваності;

– готовність нести відповідальність за виконувану роботу;

– здатність самостійно вирішувати проблеми, що виникають, у процесі практичної діяльності;

– готовність до позитивної взаємодії і співпраці з однокласниками;

– здатність швидко і гнучко застосовувати свої знання і досвід у розв’язанні практичних завдань;

– готовність до придбання нових знань і прагнення до самовдосконалення (самопізнання, самоконтролю, самооцінці, саморегуляції і саморозвитку);

– розуміння значення використання інформаційних технологій та володіння ними в процесі навчання та ін.

Для формування і розвитку ключових компетенцій в контексті інформаційної культури вчителя початкових класів необхідно розробити послідовну, логічно завершену систему навчальних завдань, вибудувану відповідно до проблемності, новизни, життєвості, практичності та ін.

Індивідуальна робота учня за комп'ютером створює умови комфортності при виконанні завдань, передбачених програмою: кожен учень працює з оптимальним для нього навантаженням. Використання комп'ютерних технологій розширює можливості пред'явлення навчальної інформації. Інформаційно-навчальний характер діяльності на уроках математики в процесі вивчення величин та їх вимірювання полягає в формуванні уявлень про довжину, масу тіла, об'єм та ін. Наприклад, при ознайомленні з протилежними поняттями «довше – коротше», «вище – нижче», «ширше – вужче» вчитель на екрані комп'ютера демонструє етюд картини природи, на якому зображені, наприклад, річка і струмок, сосна і чагарники, зруб дуба і ніжка гриба й формулюються питання: «Що довше (коротше) річка або струмок?», «Що вище (нижче) телеграфний стовп або чагарник?», «Що ширше (вужче) зруб дуба чи ніжка гриба?». Також доцільно спитати: «Що довше (коротше), дорога до школи чи шкільний коридор?», «Що ширше (вужче) автострада чи класна дошка?» тощо.

В якості ілюстрації наведемо фрагмент використання комп'ютерної технології при вивченні питання «Довжина відрізка». Елемент теми – вираження довжини відрізка в одиницях двох і навіть трьох найменувань.

З метою забезпечення тренувального режиму з автоматичним контролем завдань використовується електронна версія тренувальних завдань з даної теми.

Завдання 1.

Викоритовуючи знаки відношень «<», «>»,**«=»,** порівняйте величини:

9 м 3 дм ... 93 дм   5 дм 4 см ... 54 дм   47 дм 9 см .. 48 дм

7 дм 6 см ... 76 см   38 м 3 дм ... 39 м   25 м .. 78 дм

62 см .. 6 м 2 см   74 дм ..8 м   6 м 3 см ... 6 м 1 дм

Завдання 2

Виразіть довжини відрізків у одиницях двох найменувань:

45*дм* = □ *м* □ *дм*   87*см* □ *дм* □ *см*

53 *дм* = □ *м* □ *дм*   49 *см* □ *дм* □ *см*

60 *дм* = □ *м* □ *дм*   87*см* □ *дм* □ *см*

Завдання 3

Виразіть довжини відрізків у одиницях одного найменування:

6 дм 2 см = □ *см*   1 *м* 2 *дм* = □ *дм*

4 *м* 3 *дм* = □ *дм*   6 *дм* 9 *см* = □ *см*

5 *м* 9 *дм* = □ *дм*   8 м 4 дм = □ *дм*

У кожному із запропонованих завдань учням необхідно вибрати і «натиснути» керуючу кнопку з відповідним знаком відносин або відповідними цифрами. Якщо учень невірно вибрав знак відношення або цифру, тобто дав невірну відповідь, то йому надається можливість обміркувати відповідь, встановити помилку і виправити її. Після отримання правильної відповіді відбувається перехід до наступного завдання.

Закінчення роботи над кожним завданням фіксується позитивним сигналом. Запропоновані завдання відповідають віковим особливостям молодших школярів та рівню їх теоретичної та практичної підготовки. Отже, на початковому ступені навчання закладається фундамент не тільки математичної, але й інформаційної компетентності молодших школярів. Це означає, що методична складова інформативного компонента технології формування математичних понять взагалі і, зокрема, поняття величини, обумовлює:

– засвоєння молодшими школярами певного обсягу предметних знань, умінь і навичок у зв'язку з розв'язанням головного завдання – формуванням у молодших школярів нового для них типу навчальної діяльності і усвідомленням ними відповідної області реальної дійсності, в результаті чого відбувається забезпечення цілісного сприйняття світу, формуються системні знання, адекватні сучасному рівню освіти;

– орієнтацію на органічне (без переучування) включення молодших школярів у подальше навчання в школі, що враховує придбані ними теоретичні знання, практичні вміння та навички при розв'язанні конкретних завдань, цілі яких визначені навчальним стандартом початкової освіти України;

– максимальне сприяння формуванню і розвитку ключових компетенцій учнів з опорою на знання, отримані в період неформального навчання, на їх конкретно-чуттєве сприйняття;

– розвиток стійких пізнавальних інтересів і творчих здібностей в результаті формування навичок самостійної навчальної діяльності з придбання нових знань і вмінню ефективно працювати з різними джерелами інформації;

– використання вчителем нових інформаційних технологій та ін.[29/]

У організованій таким чином навчальній діяльності учень виступає

[29/]Тихоненко А. В. Изучение понятия величины в начальной школе / – Таганрог: ГОУВПО, 2009. – 268 с.

суб'єктом навчання, який керує своїми психічними процесами. У конкретній предметній області завдання формування і розвитку в учнів ключових компетенцій повинно вирішуватися шляхом застосування методичної системи навчання, що включає відповідні цілі, зміст, методи, засоби та організаційні форми навчання в їх взаємодії, і адекватні соціуму.

Таким чином, на початковому ступені освіти можна «закласти» міцний фундамент інформаційної компетентності молодшого школяра, що дасть можливість сформувати в учнів уміння раціонально використовувати інформацію в практичній діяльності.

4.3. Інформативний компонент технології вивчення величин та їх вимірювань в початковій школі

Інформативний компонент технології навчання молодших школярів становить зміст необхідної інформації, що відповідає вимогам державних освітніх стандартів з навчальної дисципліни.

Методична складова ***інформативного*** компонента технології навчання обумовлює:

а) засвоєння молодшими школярами певного обсягу предметних знань, умінь і навичок у зв'язку з розв'язанням головного завдання – формуванням у дітей нового для них типу діяльності (вчення) і освоєнням ними відповідної області реальної дійсності;

б) орієнтацію на органічне (безболісне, без переучування) включення молодших школярів у подальше навчання, з урахуванням придбаних ними знань, умінь, навичок, цілі і завдання які визначені і точно конкретизовані в змісті діючих програм навчання математики;

в) максимальне сприяння різнобічному розвитку молодших школярів з опорою на наочно-образне мислення, розвиток операцій розумової діяльності з подальшим формуванням і розвитком математичних ключових компетенцій.

Методичний аспект інформативного компонента технології навчання повинен задовольняти системі вивчення величин, він визначається сукупністю наступних вимог:

– дати інформацію про найважливіші геометричні та фізичні величини: довжину, площу, масу та об'єм, проміжки часу та одиниці їх вимірювання;

– навчити користуватися вимірювальними приладами (лінійкою, циркулем, палеткою для практичного вимірювання відрізків та поверхонь; вагами і важками до них (для вимірювання тіл),;

– навчити користуватися календарем та годинником для вимірювання інтервалів між подіями);

– навчити обчислювати довжину відрізка, периметр геометричної фігури площу прямокутника (квадрата) та ін.

Учні повинні знати:

– одиниці вимірювання відрізків (*мм, см, дм, м, км*) і основні співвідношення між ними;

– одиниці виміру поверхонь (*см*^{2}*, дм*^{2}*, м*^{2}) і співвідношення між ними;
– одиниці вимірювання кількості речовини і об'єму тіл і співвідношення між ними;
– основні одиниці часових інтервалів і відношення між ними;

Учні повинні вміти:

– розрізняти одиниці обчислення довжини відрізка і площі поверхні, маси і об'єму тіл, часових інтервалів, відтворювати по пам'яті правила знаходження периметра і площі прямокутника (квадрата);

– застосовувати отримані знання в практичній діяльності, вміти вимірювати відрізки та обчислювати їх довжину за допомогою лінійки; будувати відрізок заданої довжини; обчислювати периметр і площу прямокутника (квадрата); уміти обчислювати масу тіл за допомогою терезів і гир; уміти визначати час за годинником.

У початкових класах відбувається знайомство з такими скалярними величинами як довжина, площа, об’єм, маса, час та з їх властивостями, одиницями вимірювання і методами обчислення, що становить власне математичний аспект інформативного компонента технології формування поняття величини (в узагальненому вигляді представлений схемою № 4. 2.).

Схема 4.2.

Математичний аспект вивчення величин в професійній підготовці вчителя початкової школи з урахуванням адаптованого матеріалу у системі початкового навчання у відповідності до Державних вимог засвоєння учнями змістової лінії «Величини» представлений у таблиці № 4.1.

Таблиця № 4.1.

Державні вимоги до рівня засвоєння учнями змістової лінії «Величини» за роками навчання

Величини (протягом року) **1 клас**	
Довжина Одиниці вимірювання відрізка – сантиметр, дециметр, метр. Поняття довжини відрізка. Обчислення довжин відрізків. Запис результатів обчислення довжини відрізка. Порівняння довжин відрізків. Побудова відрізків заданої довжини	**Учень:** *порівнює* відрізки або смужки паперу «на око», накладанням або за допомогою різних мірок; ***знає, якими одиницями обчислюється довжина (сантиметр, дециметр, метр), їх скорочене позначення та співвідношення між ними;*** *розуміє,* які одиниці обчислення довжини доцільно використовувати в конкретному випадку; *вимірює* предмети або відрізки різними мірками; обчислює їх довжину; *записує* результати вимірювання відрізків з використанням різних одиниць *(см, дм, м)*; креслить *відрізок заданої довжини*.
Маса Поняття маси тіла (речовини). Одиниця обчислення маси тіла (речовини) – кілограм. Запис результатів обчислення маси тіл (за малюнками)	*знає,* що маса обчислюється у кілограмах, *знає* скорочене позначення одиниці обчислення маси – кілограм *(кг*); *порівнює* предмети за масою «на руку»; *записує* результати обчислення маси (за малюнками).
Місткість Поняття місткості . Одиниця обчислення місткості – 1 літр. Обчисленняя місткості посудини за допомогою літрової мірки. Запис результатів обчислення місткості посудини.	*розуміє,* що посудини мають місткість; *знає, що* одиницею обчислення місткості є літр і скорочене позначення – (*л*); *порівнює* посудини за місткістю; *обчислює* місткість посудини, використовуючи літрову мірку; *записує* результати обчислення місткості.
Вартість Вартість і ціна речі. Одиниці вартості – копійка, гривня. Співвідношення між одиницями вартості.	*знає*, що товари мають вартість, виражену грошовими одиницями; *знає,* що одиницями вартості товару є гривня, копійка, їх скорочене позначення *(грн, к.)* та співвідношення між ними; *виконує* найпростіші розрахунки з використанням монет і купюр; *використовує* знання з вивчених величин при розв'язуванні практично-зорієнтованих задач; *розрізняє* поняття «монета» і «копійка».
Час Поняття часу. Одиниці вимірювання інтервалів між зафіксованими подіями. Одиниці інтервалів – година, доба, тиждень. Обчислення тривалості інтервалів між фіксованими подіями. Визначення часу за годинником	*знає* назви днів тижня та їх послідовність; *знає*, що доба, тиждень, година – одиниці вимірювання інтервалів між фіксованими подіями. *визначає* час за годинником з точністю до годин, *записує* його результати; *використовує* у записах скорочене позначення одиниць обчислення часу (*год*); *використовує* знання про вивчені величини при розв'язуванні практично - зорієнтованих

	задач
Дії з іменованими числами (величинами) Порівняння, додавання і віднімання іменованих чисел (величин)	*порівнює* іменовані числа (з одиницями довжини, маси, місткості, вартості, часу) ; *додає і віднімає* іменовані числа (з одиницями довжини, маси, місткості, вартості, часу), подані в однакових одиницях вимірювання.
Величини (протягом року) **2 клас**	
Узагальнення і систематизація навчального матеріалу за 1-й клас Величини. Одиниці обчислення величин. Розв'язування практично-зорієнтованих задач	***Учень*:** *знає,* якими одиницями обчислюється довжина (сантиметр, дециметр, метр) і співвідношення між ними та їх скорочене позначення (*см, дм, м*); *знає,* якими одиницями обчислюється маса (кілограм); місткість (літр) та їх скорочене позначення (*кг; л*); *знає* якими одиницями обчислюється час (година, доба, тиждень) та скорочене позначення години (*год*); *знає*, що одиницями вартості товару є гривня і копійка, *знає* співвідношення між ними та їх скорочене позначення (*грн*, *к.*); *розрізняє* поняття «монета» і «копійка». *використовує* знання про вивчені величини при розв'язуванні практично-зорієнтованих задач
Маса Одиниця обчислення маси – центнер. Співвідношення між одиницями обчислення маси: центнером і кілограмом.	*знає,* якими одиницями обчислюється маса (кілограм, центнер) та скорочене позначення (*кг, ц*); *розуміє,* які одиниці обчислення величини доцільно використовувати в конкретному випадку; *використовує* знання про масу тіл та одиниці її обчислення (*ц, кг*) при розв'язуванні практично-зорієнтованих задач
Час Одиниці обчислення часу. Місяць, рік. Хвилина. Визначення часу за годинником. Співвідношення між одиницями часу	*знає* якими одиницями вимірюється час (рік, місяць, доба, година, хвилина) та скорочене позначення години і хвилини (*год, хв*); *знає* співвідношення між добою і місяцем, місяцем і роком; годиною і хвилиною; *визначає* час за годинником з точністю до 5-ти хвилин; *використовує* знання про час та одиниці його обчислення при розв'язуванні практично-зорієнтованих задач
Іменовані числа Додавання і віднімання іменованих чисел, поданих в одиницях обчислення довжини, маси, місткості, часу. Порівняння іменованих чисел. Перетворення іменованих чисел, виражених	*розуміє* зміст поняття «іменоване число»; *виконує* дії додавання й віднімання з іменованими числами, поданими в однакових одиницях вимірювання; *порівнює* іменовані числа, подані в одиницях довжини, маси, місткості, часу;

в одиницях двох найменувань	*перетворює* іменовані числа, виражені в одиницях двох найменувань
Величини (протягом року) **3 клас**	
Узагальнення і систематизація навчального матеріалу за 2-й клас Величини. Одиниці вимірювання величин. Іменовані числа. Порівняння іменованих чисел. Дії з іменованими числами.	***Учень/учениця :*** *застосовує* знання про величини, одиниці обчислення довжини (сантиметр, дециметр, метр); маси (кілограм, центнер), місткості (літр); часу (рік, місяць, тиждень, доба , година, хвилина), вартості (гривня, копійка) та співвідношення між ними при розв'язуванні сюжетних та практично-зорієнтованих задач; *перетворює* величини, виражені у двох одиницях найменувань; *порівнює* іменовані числа; *виконує* додавання й віднімання іменованих чисел, поданих в однакових одиницях вимірювання
Довжина Одиниця обчислення довжини – міліметр, кілометр. **Маса** Одиниця обчислення маси – грам, тонна. Співвідношення між одиницями вимірювання величин. Порівняння іменованих чисел. Додавання і віднімання іменованих чисел	*знає,* якими одиницями обчислюється довжина та їх скорочене позначення: міліметр (*мм*), сантиметр (*см*), дециметр (*дм*), метр (*м*) , кілометр (*км*) та маса – грам (*г)*, кілограм (*кг*), центнер (*ц*), тонна (*т*); *знає* співвідношення між одиницями обчислення довжини, одиницями обчислення маси; *розуміє*, які одиниці обчислення довжини та маси доцільно використовувати в конкретних випадках; *обчислює* довжини відрізків та *записує* їх результати з точністю до міліметрів; *порівнює*, *додає і віднімає* іменовані числа, подані в одиницях довжини, маси (без переходу через одиницю вимірювання); *використовує* знання про довжину, масу тіл та одиниць їх вимірювання при розв'язуванні сюжетних та практично-зорієнтованих задач
Час Одиниці обчислення часу – тисячоліття, століття. Одиниця обчислення часу – секунда. Співвідношення між одиницями обчислення часу Співвідношення між одиницями обчислення часу. Визначення часу за годинником. Календар. Визначення тривалості події, часу початку, закінчення події.	*знає,* якими одиницями обчислюється час (тисячоліття, століття, десятиліття, рік, місяць, доба, година, хвилина, секунда) , скорочене позначення години, хвилини і секунди (*год, хв, с*), знає співвідношення між одиницями обчислення часу; *визначає* час за годинником та записує його значення; *перетворює* іменовані числа, виражені у двох одиницях найменувань; *додає і віднімає* іменовані числа з одиницями часу (без переходу через одиницю вимірювання);

	визначає тривалість події, дату (час) початку, закінчення події, використовуючи відповідно або календар, або годинник
Величини (протягом року) **4 клас**	
Узагальнення і систематизація навчального матеріалу за 3-й клас Одиниці обчислення довжини: міліметр, сантиметр, дециметр, метр, кілометр. Співвідношення між одиницями обчислення довжини. Одиниці обчислення маси: грам, кілограм, центнер, тонна. Співвідношення між одиницями обчислення маси. Одиниці обчислення часу: секунда, хвилина, година, доба, місяць, рік, століття, тисячоліття. Співвідношення між одиницями обчислення часу. Одиниці вартості: гривня, копійка. Співвідношення між одиницями вартості. Порівняння іменованих чисел. Дії з іменованими числами	***Учень/учениця :*** *знає,* якими одиницями обчислюється довжина (*мм, см, дм, м, км*), маса (*г, кг, ц, т*), час (*с, хв, год*), вартість (*к., грн*), співвідношення між одиницями довжини, маси, часу, грошовими одиницями; *перетворює* більші одиниці обчислення величини у менші і навпаки; *порівнює* іменовані числа; *виконує* додавання і віднімання, множення і ділення на одноцифрове число іменованих чисел, виражених в одиницях довжини, маси, вартості, часу; *застосовує* співвідношення між одиницями обчислення величин при розв'язуванні практично-зорієнтованих задач
Швидкість Швидкість тіла у прямолінійному рівномірному русі. Одиниці швидкості. Залежність між швидкістю тіла , часом і пройденим шляхом при рівномірному прямолінійному русі та формули для їх обчислення	*розуміє* швидкість рухомого тіла як шлях, пройдений ним за одиницю часу; *знає*, якими одиницями обчислюється швидкість та їх скорочене позначення одиниць швидкості ($\frac{км}{год}, \frac{м}{с}$ та ін.); *знає* формули для обчислення швидкості руху тіла, шляху та часу; *знаходить* швидкість, час, шлях при розв'язуванні практично-зорієнтованих задач
Площа Площа. Порівняння плоских геометричних фігур за поверхнею. Одиниці обчислення площі – квадратний міліметр, квадратний сантиметр, квадратний дециметр, квадратний метр, квадратний кілометр, ар (сотка), гектар. Обчислення площі палеткою. Формула площі прямокутника, квадрата. Задачі на знаходження площі прямокутника та обернені до них	*знає,* якими одиницями обчислюється площа та їх скорочене позначення ($мм^2$, $см^2$, $дм^2$, $м^2$, $км^2$, *а, га*); *знає* формули для знаходження площі прямокутника, квадрата та *застосовує* їх при розв'язуванні практично-зорієнтованих задач; *знаходить* довжину однієї сторони прямокутника за відомими площею та іншою стороною

Вимоги до змісту інформативного компонента технології вивчення поняття величини в його методичному аспекті визначаються дидактичними цілями шкільного курсу математики і групуються як:

– цілі, обумовлені необхідністю фундаментальної підготовки вчителя початкових класів;

– цілі, обумовлені професійною спрямованістю підготовки вчителя;

– цілі, обумовлені необхідністю вдосконалення методичної діяльності вчителя;

– цілі, обумовлені прикладною спрямованістю підготовки вчителя початкових класів, досягнення яких визначається дотриманням принципів системи професійної підготовки вчителя початкових класів: *інтегративності, інваріантності, адекватності, системності, моделювання.*

Принцип інтегративності характеризується поєднанням теорії величин з методикою викладання математики взагалі та методикою вивчення величин зокрема, а також знань і умінь, одержуваних при вивченні інших галузей початкової освіти.. Найбільш значущими для методичної складової інформативного компонента технології вивчення величин є:

– знання основних шляхів реалізації ідей, понять і методів навчання теорії величин;

– вміння проводити аналіз шкільних програм, підручників і адаптувати відповідні матеріали щодо рівня розвитку учнів;

– знання основних закономірностей навчального процесу вивчення теорії величин у математиці і вміння будувати навчальний процес в умовах різноманіття підходів до побудови шкільного курсу математики і відповідно до освітніх стандартів шкіл України другого покоління;

– вміння здійснювати адекватний вибір викладу теорії величин в математиці та в інших освітніх галузях початкової школи («Мистецтво», «Технології», «Природознавство» тощо) відповідно до рівня підготовки учнів;

– володіння методикою індуктивного (від часткового знання до загального) і дедуктивного (від загального до конкретного) викладу матеріалу, організацією вивчення учнями властивостей величин, їх перетворень, а також їх числових характеристик; володіння методикою навчання розв'язання завдань теоретичного та практичного характеру, пов'язаних з поняттям величини в різних освітніх галузях;

– володіння прийомами формування розумової діяльності в процесі вивчення величин.

Принцип інваріантності змісту методичної системи навчання по відношенню до існуючих шкільних програм, підручників полягає в умінні вчителя викладати шкільний курс математики, зокрема, теорію величин і їх вимірювання, з використанням різних підручників, навчальних посібників, методичних рекомендацій до відповідних програм, методичних розробок уроків.

Принцип адекватності характеризується діяльністю вчителя в умовах різноманіття існуючих програм, підручників і навчальних посібників. Його дотримання обумовлено:

– визначенням ролі і місця теорії величин і їх вимірювань в системі методичної підготовки вчителя;

– можливостями вивчення теорії величин і їх вимірювань в професійній підготовці вчителя;

– реалізацією зв'язку вивчення теорії величин і їх виміру з курсом методики викладання математики і такими освітніми галузями знань, як: математична, інформативна, природнича, технологічна тощо;

– розробкою і створенням наочних посібників, відеокасет, мультимедіа з вивчення величин та їх вимірювань тощо.

Принцип системності характеризується дотриманням ієрархії знань і умінь учителя. Наприклад, вчитель початкової школи повинен знати:

– різні підходи до визначення поняття величини, аксіоматику додатної скалярної величини;

– поняття про вимірювання величин;

– еволюцію одиниць вимірювання величин;

– відомості з історії математики, пов'язані з поняттям величини;

– знати теоретичні та методичні підходи формування поняття величини в існуючих програмах навчання різних освітніх галузях початкової школи.

Принцип моделювання наукових знань характеризується ефективністю вивчення програмного матеріалу. Як студентам, так і вчителям, повинна бути надана можливість проведення самостійного наукового дослідження, теоретичної і практичної діяльності, оптимального вибору використання інформаційно-комунікативних технологій і технічних засобів у вивченні величин.

У відповідності до змісту існуючих програм навчання, нині діючих в Україні, можна виділити етапи діяльності вчителя з вивчення величин, на кожному з яких інформативний компонент технології вивчення величини представлений методичною інформацією.

1. З'ясування та уточнення наявних у молодших школярів уявлень про конкретну величину (на основі життєвого дошкільного досвіду дитини).

2. Формування поняття про конкретну величину (довжину, масу, об'єм та ін.), яка має певні властивості.

3. Порівняння однорідних об'єктів вимірювання (візуальне, за допомогою відчуттів, накладанням, шляхом використання інших мірок, прийнятих за одиницю виміру).

4. Ознайомлення з одиницями вимірювання об'єктів, вимірювальними приладами, їх шкалами і пристроєм (дошкільний досвід, спостереження практичної діяльності старших).

5. Формування вимірювальних умінь і навичок (учні повинні отримати чіткі уявлення про процес обчислення довжин відрізків, площ фігур, маси тіл, часових інтервалів та ін. через користування відповідними вимірювальними інструментами).

6. Додавання і віднімання однорідних величин, виражених в одиницях одного найменування.

7. Ознайомлення з новими одиницями величини і відношеннями між ними; переведення одних одиниць вимірювання однорідних об'єктів в інші (менших до більших і навпаки);

8. Систематизація знань про конкретну величину і одиниці її обчислення.

9. Формування загального принципу переходу від одних одиниць обчислення величини до інших.

10. Додавання і віднімання однорідних величин, виражених в одиницях двох (трьох) найменувань.

11. Множення і ділення числового значення однорідних величини на число.

12. Розв'язання практичних і текстових завдань, пов'язаних з поняттям величини.

Орієнтація на пропоновані етапи допоможе вчителю усвідомлено і цілеспрямовано організувати діяльність учнів під час вивчення величин та сформувати у них відповідні компетенції.

4.4. Методична компетентність учителя в процесі вивчення величин: маса, площа, час [30/]

Оскільки методико-математична компетентність учителя є однією із важливих складових його професійної діяльності, то й одним із завдань, що ставиться перед сучасним фахівцем, є удосконалення власного досвіду щодо формування початкових математичних знань учнів змістової лінії «Величини», способів їх діяльності та практичне застосування знань про величини під час розв'язування різноманітних завдань та задач.

[30/] Методична компетентність учителя в процесі вивчення величин **довжина і об'єм** детально розглянуті у розділі ІІ.

Маса.

Маса – це міра кількості речовини яка вміщується у предметі. Треба зазначити, що у разі зважування за допомогою терезів отримуємо масу предмета, а не його вагу. Узагальнюючи погляди науковців, методистів, учителів-практиків, можна запропонувати уявити процес ознайомлення молодших школярів з величиною маса на основі моделювання. Модель – це створений об’єкт у вигляді схеми, креслення, математичної формули, виразу, у вигляді запису розв’язання. Також модель відображає та відтворює у більш простому вигляді структуру, властивості, взаємозв’язки і відношення досліджуваного математичного об’єкта, у даному випадку величини «маса». Процес моделювання визначається заміною дій із реальними предметами діями з їхніми моделями.

В основі формування уявлень про обчислення маси предметів лежать: мускульні відчуття – порівняння маси предметів за відчуттями («важче», «легше»); встановлення відношень «важче», «легше» за допомогою вимірювальних інструментів – чашкових або електронних вагів (зважування предметів за допомогою ваг і гир (важків), коли вже вибрана одиниця вимірювання речовини). Основна система роботи з вивчення величини «маса» проходить у чотири етапи. Тут доцільно чітко дотримуватися етапів моделі вивчення основних питань. Вони такі:

Етап 1. Порівняння маси предметів «на око», «на руку» (на основі чуттєвого сприйняття учнів).

Етап 2. Порівняння за допомогою мірки (умовної і стандартної).

Етап 3. Порівняння за допомогою вимірювальних приладів.

Етап 4. Опрацювання завдань та задач на знаходження числового значення величини «маса».

Ці етапи становлять модель послідовного процесу вивчення маси в початковій школі. Основним і базовим методом у роботі з учнями під час вивчення маси є порівняння, яке спочатку відбувається без використання процедури вимірювання. Знаходження значення маси предметів є одним із способів їх порівняння. Процедура порівняння мас предметів є первинною по відношенню до процедури її обчислення.

Розглянемо особливості роботи під час вивчення маси з використанням прийому моделювання на кожному етапі вивчення цієї величини.

Моделювання на першому етапі: порівняння маси предметів «на око» або «на руку» (на основі чуттєвого сприйняття учнів).

Дітям пропонуються різноманітні предмети (книжка, щоденник, пенал, портфель тощо) порівняти «на руку». Діти беруть по предмету в кожну руку і встановлюють, який із предметів за відчуттями легший, а який важчий. Також, на цьому етапі можна змоделювати порівняння маси предметів не лише «на руку», але й за допомогою важелів без використання гир, тобто без процедури вимірювання. При цьому чашки терезів, по суті, замінюють дві руки. Тільки замість «баричних» [баричний – від грецької – важкий] відчуттів учень спирається на зорові відчуття. На одну чашку терезів кладеться один предмет, на другу – інший. За положенням чашок можна відповісти на запитання: який із предметів легший, а який важчий? Тож, під час ознайомлення з масою на початковому етапі важливо навчити дітей порівнювати предмети за їх масою без процедури вимірювання, на основі чуттєвого сприйняття змодельованих для порівняння ситуацій.

Моделювання на другому етапі: порівняння маси предметів за допомогою мірки (умовної і стандартної).

На цьому етапі підключається процедура вимірювання, але без спеціальних вимірювальних приладів. Зазначимо, що спочатку вчитель знайомить учнів з вимірюванням умовними мірками, а потім –

загальноприйнятими стандартними мірками. У залежності із застосуванням нами загальної моделі вивчення величини «маса» на даному етапі доцільно використовувати проблемні ситуації, які стимулюють та мотивують учнів до пошуку способів порівняння величини в тих випадках, коли ці величини неможливо порівняти лише на основі чуттєвого сприйняття, як це було на першому етапі. Тож, послідовність моделювання може бути такою:

1). **Проблемна ситуація 1** – неможливість порівняння предметів за масою «на око» або «на руку» – $\Rightarrow$ уведення умовної мірки.

2). **Проблемна ситуація 2** – порівняння однакових предметів за масою різними умовними мірками – $\Rightarrow$ уведення стандартної мірки.

1. Пропонуємо проблемну ситуацію, яка допомагає учням зрозуміти необхідність введення мірки як засобу порівняння двох предметів за масою, якщо їх неможливо приблизити один до одного і порівняти «на руку» чи на одних терезах, як на попередньому етапі.

Наприклад, два різні яблука лежать на різних столах, далеко одне від одного. На кожному столі є терези, уже знайомі дітям із попереднього етапу, але проблема полягає у тому, що яблука не можна покласти на одні ваги. Як при цьому відповісти на запитання: «Яке із двох яблук легше, а яке – важче?»

Учні, розв’язуючи поставлену проблему, можуть запропонувати такий спосіб: слід скористатися будь-якою умовною міркою, наприклад, квасолинами, цукерками тощо. Один учень з’ясовує на своїх вагах, скільки цукерок на одній чашці терезів урівноважують яблуко, яке знаходиться на іншій чашці терезів. Одночасно інший учень за іншим столом з’ясовує на своїх вагах, скільки таких цукерок треба взяти, щоб урівноважити друге яблуко. Результати зважування вони виражають відповідними числами: перше яблуко врівноважується 8 цукерками; друге яблуко – 10 цукерками. Після цього робиться висновок, що важче те яблуко, результат урівноважування якого виражений більшим числом.

2. Пропонуємо проблемну ситуацію, яка допомагає учням усвідомити необхідність уніфікації мірок, приведення їх до єдиного стандарту. Скажімо, учням пропонується виміряти масу одного й того ж предмету різними мірками, наприклад, яблуко: воно спочатку на терезах урівноважується за допомогою цукерок. Нехай його маса дорівнює 10 цукеркам. А потім цю ж цукерку урівноважуємо за допомогою квасолин. Нехай її маса дорівнює 8 квасолинам. Простим обчисленням виявляється, що яблуко врівноважується 80 квасолинами. Отже, предмет один і той же, а цукерку, а результат вимірювання отримали різний. Учні знаходять причину. Виявляється, вона полягає у тому, що використовувалися різні за масою мірки. Після такого висновку увага дітей звертається на те, що люди дійшли висновку і домовилися, щоб не було плутанини у знаходженні маси предметів, треба використовувати однакову мірку для обчислення маси всіх предметів. Тож, лише у використанні стандартної мірки результати обчислення маси предметів можливо порівнювати між собою.

Після такої роботи вчитель знайомить дітей з одиницею обчислення маси – кілограмом. Ця одиниця обчислення маси є більш знайомою дітям. Зазначимо, що оперування кілограмом дозволяє пропонувати учням більший спектр текстових арифметичних задач вже з 1 класу, де маса предметів, що обчислюється у кілограмах виражається одноцифровими числами.

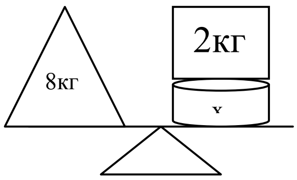
Пропонуємо дітям історичну довідку про виникнення одиниці обчислення маси – кілограм.

Кілограм – головна одиниця маси. Народився він наприкінці ХУІІІ століття у Франції, водночас із метром. Кілограм розглядався як маса одного кубічного дециметра чистої води при температурі 0°. Але таку мірку дуже складно зберігати. Вода забруднюється, випаровується або розплескується. І маса змінюється. Тому майстер-ливар Франції зробив гирю, яка за масою точно дорівнювала кілограму. У 1799 році вона була урочисто передана на зберігання в архів Французької республіки і почала називатися «архівний кілограм». З того часу кілограм – це маса гирі, яка з багатьма запобіжними заходами зберігається як еталон у Франції, у місті Серве. Наприкінці XIX ст. з неї зробили 43 точні копії і роздали їх у різні країни. Ця гиря являє собою невеликий циліндр із сплаву платини та ірідію, стоїть вона на пластинці з гірського кришталю і накрита двома скляними ковпаками.

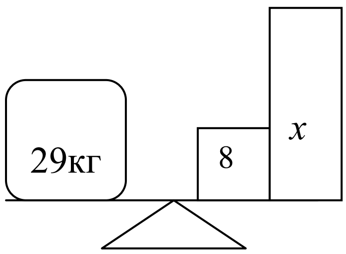
Моделювання на третьому етапі: порівняння маси предметів за допомогою вимірювальних приладів.

На цьому етапі продовжується процедура обчислення маси предметів, але вже за допомогою спеціальних вимірювальних приладів. Зазначимо, що спочатку вчитель знайомить учнів з різноманітними вимірювальними приладами та гирями в 1 кг, 2 кг, 3 кг. Він заздалегідь готує предмети, які можна було б урівноважити цими гирями. Разом з дітьми з’ясовується маса підручника, цукру, портфеля тощо. Також, виконуються вправи за такими моделями: учні знаходять невідому масу предмета у запропонованих варіантах.

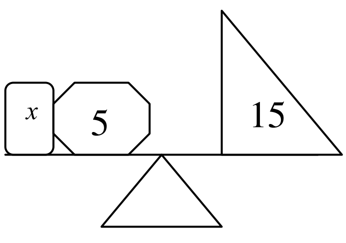
Варіант 1.



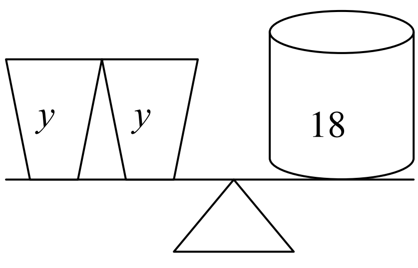
1



2



3



4

Варіант 2. Як гирями 1 кг, 2 кг, 5 кг, 10 кг можна зважити предмети масою 7 кг, 4 кг, 9 кг, 13 кг?

Моделювання на четвертому етапі: опрацювання завдань та задач на знаходження числового значення маси.

На цьому етапі відбувається: а) додавання і віднімання однорідних величин, виражених одиницями одного найменування (у зв'язку з розв'язуванням сюжетних задач); б) знайомство з новими одиницями обчислення маси в тісному зв'язку з вивченням нумерації чисел за концентрами. Перетворення однорідних величин, виражених одиницями одного найменування, у величини, виражені одиницями двох найменувань і навпаки: 1500 *кг* = 1 *кг* 500 *г*; в) додавання і віднімання значень величини маси, які виражені одиницями двох найменувань; г) множення і ділення величини на число.

Важливо зупинитися на тому, якими принципами повинен керуватися вчитель, щоб у процесі виконання різних завдань на уроці, діти не лише опановували певною сумою знань, умінь і навичок, але і всебічно розвиваючись, опановували систему ключових компетенцій. Тому процес виконання завдань не повинен зводитися тільки до відтворення отриманих знань, а повинен доповнюватися спостереженнями, практичною роботою, аналізом, порівнянням тощо. Послідовність завдань повинна бути такою, щоб попередні завдання готували учнів до виконання наступних. Це забезпечується органічним включенням раніше засвоєних знань у процес оволодіння новими знаннями. Варіанти завдань можуть бути такими.

Завдання на додавання і віднімання однорідних величин, виражених одиницями одного найменування (у зв'язку з розв'язуванням задач). Такі завдання ілюструють властивості додавання та віднімання мас.

Задача: В одному ящику 8 *кг* яблук, а в другому на 2 *к*г менше. Скільки кілограмів яблук у двох ящиках разом?

Завдання на знайомство з новими одиницями обчислення маси в тісному зв'язку з вивченням нумерації чисел за концентрами.

Перетворення однорідних величин, виражених одиницями одного найменування, у величини, виражені одиницями двох найменувань і навпаки. У концентрах «Тисяча» та «Багатоцифрові числа» учні знайомляться з новими одиницями вимірювання – грамом, центнером, тонною та співвідношеннями між ними.

Спочатку пропонується розповідь про нові одиниці вимірювання. Коли уводиться грам, то обов'язково слід зазначити, що 1 грам дорівнює 1/1000 кілограма. Доцільно показати гирі в 1г, 2 г, 10 г, 100 г, 200 г та порівняти їх з уже знайомими. У якості додаткової інформації дітям доцільно розповісти, що є ще менша одиниця обчислення маси – гран, вона майже у 20 разів менша за грам. Слово «гран» позначає «зерно». Користуються цією одиницею виміру, коли потрібна велика точність. В Англії, Америці та інших країнах, де прийнята англійська система мір, у гранах зважують ліки і коштовні метали. У цих країнах гран дорівнює 65 міліграмам. Існує й інший гран, що дорівнює 50 міліграмам. Ним користуються в усьому світі, коли зважують коштовний дарунок моря – перлини.

Співвідношення між одиницями обчислення маси закріплюються в процесі виконання таких вправ на перетворення:

а) виразіть

в кг	в грамах	в центнерах
2т 006 кг	1 кг 025 г	9 т 6 кг
8000 г	2 кг 050 г	8000 кг

б) порівняйте (поставте замість * знаки =, <, >)

12 т * 1200 кг	4 т 8 ц * 480 кг
32 г * 32 кг	220 ц * 20 т 2 ц

Завдання на додавання і віднімання величини маса, які виражені одиницями двох найменувань. Виконання таких завдань направлене на вираження одних одиниць обчислення маси через інші, що є основою виконання арифметичних дій з величиною маса. Наприклад:

а) поставте найменування, щоб рівності були правильними:

3 т 410 кг + 5 … = 3 т 910 кг;

3 т 410 кг – 5 … = 3 т 405 кг

б) знайдіть значення виразів:

5 т 380 кг + 4 т 930 кг ;   9 кг 305 г - 6 кг 987 г

Завдання, які розкривають властивості дій множення та ділення маси на число. Наприклад: «Маса кавуна 4 кг, а гарбуза у 3 рази більше. Яка маса гарбуза?». «У бочці 24 кг меду. Його розлили у 8 банок порівну. Скільки кілограмів меду в одній банці?»

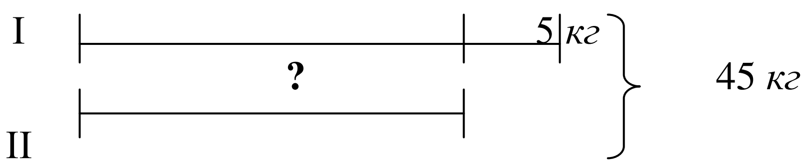
У 4 класі передбачається узагальнення набутих знань, умінь і навичок обчислення маси. Учні складають таблицю одиниць обчислення маси та заучують її напам'ять.

1 т = 1000 кг	1 ц = 100 кг
1 кг = 1000 г	1 т = 10 ц

У процесі виконання таких вправ закріплюються знання таблиці одиниць маси. Також важливим моментом під час вивчення маси є моделювання ситуацій та розв'язання простих та складених задач. У процесі розв'язання простих, а потім і складених задач, учні встановлюють і використовують взаємозв'язок між величинами: маса одного предмету – кількість предметів – загальна маса даних предметів, вчаться обчислювати кожну з величин, якщо відомі числові значення двох інших.

Наведемо приклади декількох задач.

Задача 1. Склади задачу за поданою графічною моделлю.



Задача 2. З яблуні зібрали 96 *кг* яблук. Їх розклали порівну у 6 ящиків.

а) Скільки кілограмів яблук вмістять 8 таких ящиків?

б) Скільки потрібно таких ящиків, щоб розкласти 768 *кг* яблук?

в) У задачі замість числа 8 постав число 9. Розв’яжи отриману задачу, не визначаючи масу яблук в одному ящику.

г) Склади задачу за табличною моделлю.

Маса яблук в ящиках	Загальна маса яблук	Кількість ящиків
однакова	96 *кг*	6
однакова	на 18 *кг* менше	?

Задача 3.

Невеликий хвойний ліс відфільтровує за 1 рік 35т пилу, а такий же листяний – 70 т пилу. На скільки тон пилу менше відфільтровує хвойний ліс, ніж листяний? Чому? Доведи свою відповідь.

По завершенні вивчення теми «Маса» у початкових класах рівень отриманих знань дає можливість учням: привести в систему їх життєвий досвід з вивчення поняття «маса»; навчитися оцінювати масу невеликих предметів за допомогою мускульних відчуттів («на руку»); познайомитися з деякими властивостями маси; мати уяву про різноманітні ваги; сформувати навички знаходження маси предметів за допомогою терезів; знати одиниці обчислення маси та застосовувати їх під час практичних завдань та розв’язування простих і складених задач.

Площа

Методика формування уявлень учнів про площу фігур схожа з роботою над довжиною відрізка. Площа розглядається як властивість плоских фігур. Вже в дошкільному віці діти намагаються порівнювати предмети за поверхнею, але не вживають при цьому самі терміни «поверхня» і «площа». Вони порівнюють плоскі фігури шляхом накладання однієї на другу, зіставляючи предмети за їх поверхнею, яку вони займають на столі, на землі, на аркуші паперу тощо. У результаті такого порівняння учні усвідомлюють відношення між поверхнями – одна поверхня більша чи менша другої, чи вони рівні. Якщо не рівні, то закономірно постає питання; „А на скільки більше (менше)? Отже, вихід вбачається у числових характеристиках порівнюваних поверхонь. Такий перехід від порівняння поверхонь до порівняння чисел, які їм відповідають, відкриває шлях до поняття площі, як числової характеристики поверхні. Встановлення числової характеристики поверхні здійснюється *вимірюванням.*

Отже, у початковій школі в процесі вивчення геометричного матеріалу у дітей уточнюється уявлення про площу як про властивість плоских геометричних фігур. Більш чітким стає розуміння того, що фігури можуть бути різними і однаковими за площею, площа фігури не змінюється при зміні положення фігури на площині. Тому під час ознайомлення з такими поняттями як «рівні фігури на площині», «рівновеликі фігури», «рівно складені фігури» доцільно виконувати практичні завдання, в яких дослідницьким шляхом виявляються рівні фігури серед усіх інших даних за допомогою накладання. Цьому сприяють наступні практичні завдання: вирізання фігур із паперу; креслення та розмальовування фігур у зошиті; складання фігур із заданих частин, при цьому діти спостерігають співвідношення між всією фігурою та її частинами та роблять висновок, що частина менша цілої фігури; виокремлення різних фігур на заданому кресленні; поділ фігури на рівні або нерівні частини, порівняння отриманих результатів; складання різних за формою фігур із одних і тих же заданих частин, тобто побудова рівноскладених фігур.

У процесі виконання різноманітних завдань практичного характеру відбувається поступове формування поняття про площу фігури. Наприклад, завдання на порівняння площ фігур шляхом підрахунку числа однакових квадратів, на які розбита кожна фігура, можна провести так. Вчитель пропонує дітям розглянути фігури, які прикріплені на дошці (різноманітні як за формою, так і за розміром) та визначити «на око» яка фігура більша, а яка найменша. Відповідаючи на поставлене питання, учні відчувають утруднення при порівнянні площі поверхні окремих фігур. Учитель перевертає фігури зворотною стороною, де вони поділені на рівні квадрати. Учні перераховують кількість квадратиків, з яких складено ту чи іншу фігуру, порівнюють отримані числа і доходять висновку: та з представлених фігур має більшу площу у якій квадратиків більше, а та фігура, у якій квадратиків менше, має меншу площу. Подібні міркування підводять учнів до необхідності введення стандартної одиниці обчислення площі.

На наступному етапі школярі знайомляться з першою одиницею площі – квадратним сантиметром. Для того щоб учні освоїли процес обчислення площі поверхні геометричної фігури корисно практично виконати наступні завдання. Роздати кожному геометричну фігуру і запропонувати обчислити площу, користуючись моделлю квадратного сантиметра – квадратом із довжиною сторони в 1 см. Цю мірку вони вкладають по всій поверхні геометричної фігури. У процесі виконання такого завдання учні усвідомлюють, що обчислити площу поверхні геометричної фігури – значить встановити, скільки квадратних сантиметрів вона вміщує. Також учні практично впевнюються, що вкладати модель квадратного сантиметра у фігурі довго і незручно. Для більшої зручності можна скористатися формулою: $\boldsymbol{S = a \cdot b}$ (для прямокутника), або палеткою для фігур неправильної форми. Палетка – прозора пластинка на якій нанесено сітку із квадратних сантиметрів. Корисно щоб її діти самі виготовили на уроках праці. За допомогою палетки обчислюють приблизну площу поверхні неправильних фігур. Учні знайомляться з правилами її використання, вправляються у визначені площі поверхні фігур неправильної форми.

Такий підхід до усвідомлення поняття площі надає можливість ясно усвідомити сутність палетки, як приладу для обчислення площі фігур.

Надалі учитель знайомить школярів і з іншими одиницями виміру поверхні: *кв. дм*, *кв. м.* та ін.

Також учні практично впевнюються, що вкладати модель квадратного сантиметра у фігурі довго і незручно. Для більшої зручності можна скористатися палеткою для фігур неправильної форми.

Слід відмітити, що учні часто плутають поняття «площа прямокутника» і «периметр прямокутника». Щоб молодші школярі свідомо диференціювали ці поняття, доцільно запропонувати завдання на одночасне обчислення периметра і площі прямокутника. Також, у процесі розв'язання таких завдань, слід звернути увагу на те, що фігури, які мають однакову площу, можуть мати неоднаковий периметр, і що фігури, які мають однаковий периметр, можуть мати різні площі. Крім того, діти легко відмічають, що найбільшу площу при однаковому периметрі мають прямокутники з рівними сторонами (квадрати).

Завдання № 1. Порівняйте результати обчислення периметру і площі, які подані в таблиці та проаналізуйте їх.

Довжина	Ширина	Периметр	Площа
7 см	1 см	16 см	7 кв.см
6 см	2 см	16 см	12 кв.см
5 см	3 см	16 см	15 кв.см
4 см	4 см	16 см	16 кв.см

Завдання № 2. Які дії необхідно виконати, щоб обчислити площу прямокутника ABCD та його периметр?

а) побудувати прямокутник ABCD;

б) обчислити довжину суміжних сторін прямокутника ABCD;

в) взнати, на скільки довжина прямокутника ABCD більша його ширини;

г) обчислити добуток довжин всіх сторін прямокутника ABCD;

д) знайти суму довжин всіх сторін прямокутника ABCD;

е) знайти добуток довжини і ширини прямокутника ABCD.

Відповідь: а, б і е – для площі; а, б, д – для периметра.

Надалі учитель знайомить школярів і з іншими одиницями виміру поверхні: *кв. дм*, *кв. м.* та ін. При ознайомленні учнів з кожною новою одиницею вимірювання площі, формується наочний образ нової одиниці. Діти креслять у зошиті або на папері її модель – квадрат з відповідною довжиною сторони (1 см, 1 дм), потім вирізають її та використовують як мірку. При цьому вони вчаться вибирати мірки для оцінки різноманітних площ поверхонь. Важливо, щоб, виконуючи певні завдання, діти змогли виявити певну подібність та суттєву відмінність між одиницями обчислення величин: сантиметр – одиниця обчислення довжини; квадратний сантиметр – одиниця обчислення площі; довжина відрізка – число одиничних відрізків, які характеризують його довжину, тобто кількість сантиметрів, що вкладаються по довжині даного відрізка; площа поверхні фігури – кількість одиничних квадратів, які укладаються на поверхні даної фігури.

У відповідності з методичними основами формування уявлення про площу та одиниці її обчислення дають можливість учителю початкової школи систематизувати життєвий досвід дітей щодо поняття «площа», допомогти їм усвідомити форми геометричних фігур як образи предметів оточуючого світу, навчити узнавати геометричні фігури в предметах оточуючої дійсності, допомогти учням придбати навички зображення основних плоских геометричних фігур, навчити користуватися для обчислення та порівняння площ геометричних фігур палеткою; допомогти придбати певний досвід вимірювання поверхонь та обчислення площ фігур різними одиницями вимірювання, навчити використовувати певні одиниці обчислення площі в конкретних ситуаціях.

ЧАС

Життя людини тісно пов'язане з часом, з умінням його вимірювати, розподіляти та зберігати. Час – це процес, який не сприймається сенсорикою дитини безпосередньо. Якщо протяжність на площині та у просторі можна побачити за допомогою моделі – відрізка, масу відчути мускульно, то час не можна тактильно відчути або побачити. Цей процес сприймається людиною опосередковано, у порівнянні з тривалістю інших процесів, що оцінюються та сприймаються сенсорикою. Тож, тема «Час. Міри часу» вважається більш складною, з причини своєї абстрактності для сприйняття учнями початкової школи.

У результаті вивчення цієї теми (незалежно від освітньої системи або програми) у молодших школярів повинні бути сформовані чіткі уявлення про такі проміжки часу, як секунда, хвилина, година, доба, тиждень, місяць, рік, вік. Учні повинні засвоїти співвідношення між одиницями часу, що основані на «не десятковій» системі числення. Кожний учень повинен навчитися визначати час за годинником з точністю до хвилини. Використовувати у мові правильні вирази щодо визначення часу: «зараз 23 хвилини на дванадцяту», «зараз без чверті п'ята», «ми прийдемо о пів на шосту» тощо. Також школярі повинні навчитися використовувати календар, засвоїти послідовність назв днів тижня, місяців року.

Визначаючись з методикою опрацювання теми «Міри часу» та технологією формування уявлень про тривалість часових проміжків, вчитель повинен враховувати абстрактну сутність цього поняття. Тож під час формування уявлень дітей про величину велику роль відіграє бесіда, розповідь, різноманітна наочність, звернення до чуттєвого досвіду дітей тощо.

Учитель має навчити дітей користуватися календарем. Календар – це система відліку тривалих проміжків часу, в якій встановлено певний порядок рахунку днів у році та вказано початок відліку. Дітей слід познайомити з різновидами календарів: настільні, настінні, відривні, перекидні тощо. Доцільно вести активну практичну роботу за календарем. Користуючись календарем вони встановлюють скільки місяців у році, з якого місяця починається і яким закінчується рік, послідовність місяців, їх тривалість у днях, назву місяців за порами року, кількість тижнів у році. За календарем діти знаходять на який день тижня приходяться свята, дні народження, підраховують кількість днів канікул,
їх початок та кінець тощо. Наприклад:

Завдання 1. Розв’яжіть задачу за календарем: «Іванко на канікулах був у таборі 7 тижнів, а останній час провів у бабусі в селі. В селі він був на 2 тижні менше, ніж у таборі. Скільки тижнів тривали літні канікули?»

Завдання 2. Марійка записала слова: понеділок, вівторок, середа, четвер, п’ятниця, субота, неділя. Що міститься під цими словами? Що позначає проміжок часу від понеділка до неділі?

У процесі ознайомлення учнів з поняттям «рік» необхідно використати телурій (від лат. *tellus* – «Земля». Це прибор для наочної демонстрації річного руху Землі навкруги Сонця та добового обертання Землі навкруг своєї осі). За допомогою телурію стає можливим показ того, що за той час, поки Земля робить один оберт навкруги Сонця, Місяць обертається навкруг Землі 13 разів, оскільки період обертання Місяця навколо Землі стабільно 28 діб. Учитель пояснює, що Земля обертається навкруг Сонця за 365 діб 6 годин і 14 хвилин. У зв’язку з цим для зручності підрахунків три роки називають звичайними, а четвертий – високосним. Він довший на один день, тому що за рахунок 6 годин і 14 хвилин за 4 роки набігає одна доба. Для підрахунку кількості днів у простому та високосному роках можна за календарем скласти числові вирази та знайти їх значення:

$$28 + 30 \cdot 4 + 31 \cdot 7; \qquad 29 + 30 \cdot 4 + 31 \cdot 7.$$

У цих записах 28 і 29 – кількість днів у лютому; $30 \cdot 4$ – кількість днів у 30-денних місяцях; $31 \cdot 7$ – кількість днів у 31-денних місяцях. З дітьми слід вивчити, які місяці мають 30 днів, які 31 день, а який місяць має 28 днів або 29 днів. Цей факт пов’язаний з тим, що оберт навкруг Сонця земля робить за 365, 2422 діб. У зв’язку з цим астрономічне положення Землі на орбіті не співпадає з календарним. А місяць Лютий обраний в зв’язку особливим положенням Землі відносно інших планет сонячної системи.

Поняття доби пояснюється через знайомі дітям поняття частин доби – ранок, день, вечір, ніч. Крім того, розкривається уявлення часової послідовності – вчора, сьогодні, завтра, післязавтра. Доба – це проміжок обертання Землі навкруг своєї осі. Доцільно продовжувати роботу з календарем: діти визначають, скільки діб в одному тижні, повторюють дні тижня, їх послідовність, знайомляться з відношенням – 1 *доба* = 24 *годин*.

При закріпленні обчислень часу можна запропонувати завдання таких видів.

– Скільки годин складають 2 доби?

– Скільки діб у двох тижнях?

– Рибальське судно було в морі чотири доби, а інше – три доби. На скільки годин більше було в морі перше судно, ніж друге?

– Порівняйте: 1 тиж. * 8 діб; 2 тиж. * 14 діб; 25 год * 1 доба;
1 міс. * 35 діб; 1 міс * 28 діб.

За допомогою моделі годинника формуються та конкретизуються уявлення дітей про одиничні інтервали часу: година, хвилина, секунда на практичній основі методом співставлення. Так, уявлення про годину формується через сприйняття вже звичної дітям тривалості уроку, уроку з перервою. При вивченні хвилини та секунди доцільно виконати практичні завдання наступного характеру: згадайте, скільки слів кожний із вас прочитав за хвилину; запишіть по порядку двозначні числа за 1 *хв*; визначте, скільки кроків можна зробити за 1 хвилину тощо.

Важливим моментом у формуванні поняття про час є практичні вправи з годинником або циферблатом. Спочатку слід розповісти дітям про різновиди годинників. Історично самими найпершими вважаються сонячні годинники, у деяких випадках люди користувалися квітковими годинниками, на зміну сонячним прийшли пісочні годинники, які використовуються і в наш час, існують водяні годинники, а зараз розповсюджені механічні та електронні. Вважається, що при ознайомленні з поняттям часу корисно спочатку використовувати пісочні годинники, ніж годинник зі стрілками, оскільки дитина бачить, як сиплеться пісок і може зафіксувати певний образ процесу плину часу. Їх також зручно використовувати в якості проміжної міри при виміру часу.

Пісочні годинники якнайкраще демонструють час як інтервал чергування подій: початок висипання піску – кінець висипання піску. Якщо цей інтервал прийняти за 1, то події, які в цей час відбулися на уроці демонструють безповоротні інтервали меншої протяжності.

Формування уявлень про тривалість фіксованого інтервалу часу в одну годину відбувається за допомогою циферблата. Спочатку слід пояснити загальну побудову циферблату, призначення стрілок (маленька – годинникова, велика – хвилинна), числові позначення на циферблаті, навчити «читати» – скільки годин і скільки хвилин показують стрілки на даний момент. Можна провести бесіду з розкриттям питань:

– на скільки рівних частин розподілено циферблат годинника числами, що поставлені на них? (На 12 рівних частин);

– скільки хвилин проходить у разі просування великої стрілки годинника від однієї числової позначки до іншої? (П’ять хвилин);

– як взнати, скільки хвилин в одній годині? ($5 \cdot 12 = 60$. 1 *год* = 60 *хв*).

При ознайомленні дітей з наступною міркою часу – секундою можна запропонувати таку ситуацію. Дітям пропонується прослухати дві мелодії. Одна із них триває одну хвилину, а інша – 55 секунд. Після прослуховування учитель задає питання: «Яка мелодія триває довше?». «Як можна виконати це завдання?». Природно, що на слух діти не зможуть відповісти або пояснити свої думки. Тоді вчитель пропонує їм під час повторного прослуховування мелодії порахувати, скільки разів секундна стрілка на циферблаті буде зупинятися. В процесі такої роботи діти з’ясовують, що під час звучання першої мелодії стрілка зупинялася 60 разів і пройшла повне коло, тобто мелодія тривала одну хвилину. Друга мелодія тривала менше, тому що за час звучання стрілка зупинялася 55 разів.

Для закріплення та конкретизації вмінь і навичок оперування з одиницями часу пропонуються наступні різновиди завдань.

1. «Вистава тривала 90 *хв*, а кінофільм 1год 20 *хв*. На скільки хвилин вистава тривала довше, ніж кінофільм?». Для розв'язання задачі необхідно спочатку перетворити одиниці часу – 1 *год* 20 *хв* = 80 *хв*, а потім виконати арифметичну дію віднімання.

2. «На старому станку токар виготовив за 6 годин 96 деталей, а на новому станку він ту ж норму зробив за 4 години. На скільки деталей більше став виготовляти токар за 1 годину?». Для розв'язання цієї задачі необхідно з'ясувати продуктивність праці токаря (кількість деталей виготовлених за 1 годину) на старому станку, на новому станку, отримані результати порівняти.

Завдання на знаходження частини числа, в яких роль числа визначено одиницями часу.

1. Андрій готував уроки 1 *год* 20 *хв*. На задачі з математики він витратив $\frac{1}{4}$ частину зазначеного часу, на вірш – $\frac{1}{5}$ частину зазначеного часу, а решту – на завдання з мови. Скільки часу Андрій виконував завдання з мови?

2. «Скільки годин складає третя частина доби? Яку позначку фіксують стрілки на годиннику, якщо цей інтервал почнеться з початку доби? З 6 години ранку?». Щоб відповісти на ці запитання треба згадати, скільки годин у добі, як знайти одну третину від цілого (від 24 годин). а потім додати кількість годин до початку зазначеного інтервалу.

Вивчені одиниці часу включаються в задачі на кмітливість.

1. «Два хлопчики грали в шахи 1 *год* 10 *хв*. Скільки часу грав в шахи кожний хлопчик?» *Міркування:* Оскільки дія відбувалася одночасно, то час не ділиться на двох, тож кожний із хлопчиків грав 1 *год* 10 *хв*.

2. Опівночі пішов дощ. Чи можна чекати через 48 *год* сонячну погоду?

3. Трьом дівчаткам запропонували питання: «Скільки вам років?».

Наташа відповіла: «Я молодша за Тамару на 4 роки». Маша сказала: «Мені разом з Наташею 21 рік». А Тамара відповіла: «Нам всім разом 32 роки». Скільки років кожній з дівчаток?

4. Годинник з боєм відбиває один удар за 1 секунду. Скільки часу треба годиннику, щоб він відбив 12 годин?

5. Кожного дня опівдні відправляється пароплав з Гавра через Атлантичний океан в Нью-Йорк і в той же час пароплав тієї ж самої компанії відбуває з Нью-Йорка в Гавр. Переїзд в тому і протилежному напрямку продовжується рівно 7 днів. Скільки пароплавів своєї компанії, які йдуть в протилежному напрямку, зустрічає пароплав на своєму шляху з Гавра в Нью-Йорк?

Задачі на визначення кінця події.

1. Школярі пішли на екскурсію в історичний музей об 11 *год*. Дорога до музею і назад зайняла 1 *год*. Огляд музею тривав 55 *хв*. О котрій годині школярі повернулися з екскурсії?

2. Коли закінчилося заняття гуртка «Цікава математика», якщо воно розпочалося о 15 *год* і тривало 1 *год* 45 *хв*?

Задачі на встановлення початку події.

1). Дорога до школи займає у Віри 12 *хв*. Коли вона повинна вийти із дому, якщо в школі треба бути о 8 *год* 15 *хв*?

2. У порту завантаження теплохода тривало 5 *год* і закінчилося о 21 *год*. О котрій годині розпочалося завантаження теплохода?

Задачі на встановлення тривалості події.

1. Тролейбусний рух у місті розпочинається о 5 *год* 10 *хв* ранку і триває до 22 *год* 45 *хв*. Яка тривалість тролейбусного руху в нашому місті?

2. Скільки часу тривало заняття *гуртка «Юний дослідник», якщо розпочалося о 17 год і закінчилося о 18 год 30 хв*?

Пізнавальні задачі.

1. Мурашина сім'я за 50 днів знищує приблизно 30 *кг* шкідливих

комах. Скільки шкідливих комах може знищити мурашина сім'я за літні місяці?

2. Сорока живе 27 років, а вік ластівки становить третю частину віку сороки. Ворона живе на 40 років довше ластівки. Скільки років живе ворона?

3. У 1747 році німецький хімік Мариграф, який проводив досліди з буряком, отримав з нього цукор. Скільки років ми ласуємо цим продуктом?

Визначення тривалості часу між двома подіями в межах двох або декількох століть.

1. Урочиста брама Київської Русі – «Золоті ворота» – споруджена в 1037 р. У якому столітті відбулася ця подія? Який вік «Золотих воріт» нині?

2. Храм-пам'ятник «Козацькі могили» будувався в 1908 – 1914 рр. У якому столітті здійснювалося будівництво храму? Скільки років він будувався? Скільки років йому виповниться у 2024 році?

3. Український поет Т.Г.Шевченко народився 9 березня 1814 р. Через скільки років, місяців і днів відзначалося 200-річчя з дня народження поета?

4. 29 квітня 1648 року в урочищі Жовті Води розгорнулися запеклі бої військ Богдана Хмельницького з польським військом. Це була перша велика битва козацького війська під час визвольної війни українського народу у XVII столітті. Коли буде відзначатися 400-річчя перемоги у битві під Жовтими Водами?

5. Леся Українка народилася 25 лютого 1871 року. Коли буде відзначатися 150-річчя з дня народження української поетеси?

6. Український просвітитель Григорій Сковорода народився 3 грудня 1722 року. Коли виповниться 300 років від дня його народження?

Формування уявлень про ту чи іншу конкретну величину і про способи її вимірювання мають свої особливості, але можна виділити спільні етапи, які мають місце при вивченні кожної величини.

Схема 4.3.

Етапи формуються поняття про величину

- Вияснити та уточнити уявлення дітей про дану величину як міру об'єкту
- Порівняння однорідних величин (візуально, накладанням, прикладанням, за допомогою відчуттів, шляхом використання різноманітних мірок).
- Знайомство з одиницями вимірювання величини і з вимірювальним прибором.
- Формування вимірювальних умінь і навичок.
- Додавання і віднімання однорідних величин, виражених одиницями одного найменування (у зв'язку з розв'язуванням задач).
- Знайомство з новими одиницями вимірювання даної величини в тісному зв'язку з вивченням нумерації чисел за концентрами. Перетворення однорідних величин, виражених одиницями одного найменування, в величини, виражені одиницями двох найменувань і навпаки: 1500 м - 1 км 500 м.
- Додавання і віднімання величин, які виражені одиницями двох найменувань
- Множення і ділення величин на число

Питання та завдання для самоконтролю

1. Наведіть приклади завдань, які використовують для розкриття властивостей величин.

2. Назвіть загальні етапи формування в учнів початкової школи уявлень про величини.

3. Методика навчання учнів вимірюванню різних величин має певні загальні дії. У чому вони полягають?

4. Відомі загальні етапи введення поняття величини в початкових класах. У чому їх зміст при вивченні поняття маси?

5. Покажіть на прикладах, як можна використати поняття маси при вивченні арифметичного матеріалу?

6. Опишіть методику знайомства учнів з мірами маси.

7. Покажіть на прикладах, як можна використати історичну довідку під час вивчення певної величини.

8. Наведіть приклади завдань, що зорієнтовані на закріплення знань учнів про систему мір маси.

9. Розкрийте методику формування в учнів поняття площі фігури.

10. Наведіть приклади завдань, що унеможливлюють плутання понять «площа прямокутника» і «периметр прямокутника».

11. Якими знаннями і уміннями повинні оволодіти учні в результаті вивчення площі фігури?

12. Якими знаннями і уміннями повинні оволодіти учні в результаті вивчення маси?

13. Якими знаннями і уміннями повинні оволодіти учні в результаті вивчення часу?

14. Якими знаннями і уміннями повинні оволодіти учні в результаті вивчення об'єму?

15. Як проілюструвати учням знаходження приблизного значення площі фігури?

16. Сформулюйте програмні вимоги до результатів вивчення учнів поняття часу.

17. Наведіть приклади завдань, які використовують для розкриття поняття про одиниці вимірювання часу.

18. Покажіть на прикладах, як можна використати поняття про час при розв'язанні простих та складених задач?

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аристотель. Метафизика. – М. – Л. : Соцэкгиз, 1934. – 348 с.
2. Бурдун Г. Д. Международная система единиц / Г. Д. Бурдун, В. Н. Калашников, Л. Р. Тоцкий / под ред. Г. Д. Бурдун. –М. , –1964. – 168 с.
3. Виленкин Н. Я. Математика / Н. Я. Виленин, А. М. Пышкало, Л. П. Стойлова, В. В. Рождественская. – М., Просвещение, 1977. – 352 с.
4. Депман И. Я. Возникновение системы мер и способов измерения величин / И. Я. Депман. – М.: Наука, 1980. – 190 с.
5. Джеммер М. Понятие массы в классической и современной физике / М. Джеммер [Пер. с англ.]. – М.: Аст-пресс, 1986. – 189 с.
6. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия : в 3-х томах / под ред. А. П. Юшкевича. – М. : Наука, 1970. – Т. 3. – 380 с.
7. Каган В. Ф. Очерки по геометрии / В. Ф. Каган. – М. : МГУ, 1963. – 572 с.
8. Коваль Л. В. Математичне мовлення педагога – взірець для учнів / Л. В. Коваль, Н. Бєльчєва // Учитель початкової школи. – 2017. – № 4. – С. 9–13.
9. Колмогоров А. Н. Величина / А. Н. Колмогоров //БСЭ, 3-е изд. – М., – 1971. Т. 4.
10. Лебег А. Об измерении величин /А. Лебег. – М.: Учпедгиз, 1960. – 204 с.
11. Ляпин Е. С. Алгебра и теория чисел / Е. С. Ляпин, А. Е. Евсеев. – М., Просвещение, Ч. 1. –1974. – 342 с.
12. Ляшова Н. М. Логіко-дидактичні проблеми вивчення величин у початкових класах / Н. М. Ляшова, В. К. Сарієнко // Почат. школа. – 2009. – №7, – С. 18–24.
13. Ляшова Н. М. Логіко-дидактична структура курсу математики початкової школи (у схемах і таблицях): навчально-методичний посібник / Н. М. Ляшова. – Слов'янськ: 2016. – 92 с.
14. Математическая энциклопедия. – М.: Советская энциклопедия, 1984. – Т. 4. – 1197 с.
15. Митник О. Я. Величини: особливості розкриття змісту поняття молодшим

школярам / О. Я. Митник, В. К. Сарієнко. // Учитель початкової школи. –№3. – 2018. – С. 18 – 22.
16. Нова українська школа: порадник для вчителя / Під заг. ред. Бібік Н. М. – К.: ТОВ «Видавничий дім «Плеяди», 2017. – 206 с.
17. Навчальні програми для загальноосвітніх навч. закл. із навчанням українською мовою. 1– 4 класи. – К.: Видавничий дім «Освіта», 2012. – 392 с.
18. Ожегов С. И. Словарь русского языка /С. И. Ожегов. – М.: Советская энциклопедия: Изд. 18. – 1986. – 846 с.
19. Онопрієнко О. В. Інтеграція у навчанні молодших школярів математики / О. В. Онопрієнко, С. О. Скворцова //Початкова школа. – 2017. – № 9. – С. 22 –29.
20. Програми для середньої загальноосвітньої школи (1 – 4 класи) // Освіта. – К., – 2006. – 432 с.
21. Сарієнко В. К., Математика: посібник для студентів спеціальності «Початкова освіта» / В. К. Сарієнко, В. В. Саріенко. – Слов'янськ: ДВНЗ «ДДПУ», 2013. – 101 с.
22. Сарієнко В. К. Особливості вивчення властивостей геометричних фігур у початкових класах / В. К. Сарієнко, В. Ф. Чайченко // Початкова школа. – № 5, – 2017. – С. 15–20.
23. Стойлова Л. П. Математика / Л. П. Стойлова. – М., Просвещение, 2007. – 280 с.
24. Стойлова Л. П. Математика : Учебник для студ. высш. учеб. завед. / Л. П. Стойлова. – М., «Академия», 1999. – 424 с.
25. Тихоненко А. В. Изучение понятия величины в начальной школе / А. В. Тихоненко. –Таганрог, ТГПИ, 2009. – 268 с.
26. Тихоненко А. В. К вопросу о формировании ключевых математических компетенций младших школьников / А. В. Тихоненко. // Начальная школа, – 2006. – № 4. – С. 78– 84.
27. Тихоненко А. В. Технология изучения понятия величины на уроках математики в начальной школе / А. В. Тихоненко. – Ростов н/Д, изд. ГОУВПО, 2006. – 280 с.

28. Ткачев А. П. О моделировании при изучении величин в начальных классах / А. П. Ткачев // Начальная школа. – 2006. – № 11. – С. 81– 83.
29. Урбан М. А. Изучение массы и системы единиц измерения массы на основе общей для группы основных величин модели / М. А. Урбан // Начальная школа. – № 11. – 2009. – С. 22 – 28.
30. Физические величины. Справочник по физике /под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлиховой. – М., Наука,1991. – 240 с.
31. Энциклопедический словарь. – М., «Советская энциклопедия», 1991. – 1456 с.
32. Legendre A. M. Elements de geometrie / A. M. Legendre. – Paris. – 1974. –574 p.
33. Globalphysics.ru›physics/mass/22-**massa**.html.

З М І С Т

Тихоненко Алевтина Варфоломіївна
доктор педагогічних наук, професор

Сарієнко Владислав Костянтинович
кандидат педагогічних наук, доцент

Сарієнко Володимир Владиславович
кандидат педагогічних наук, доцент

Ляшова Надія Миколаївна
кандидат педагогічних наук, доцент

Чайченко Валентина Федорівна
кандидат педагогічних наук, доцент

**ВЕЛИЧИНИ
У
ПОЧАТКОВІЙ ШКОЛІ**

(на допомогу вчителю початкової школи)

Навчально-методичний посібник
Частина 3

Художнє оформлення Плахотский О. В.

Коректор к. п. н., доц. Тищенко Л. М.

Рекомендоване до видання
_____ лютого 2018 р.