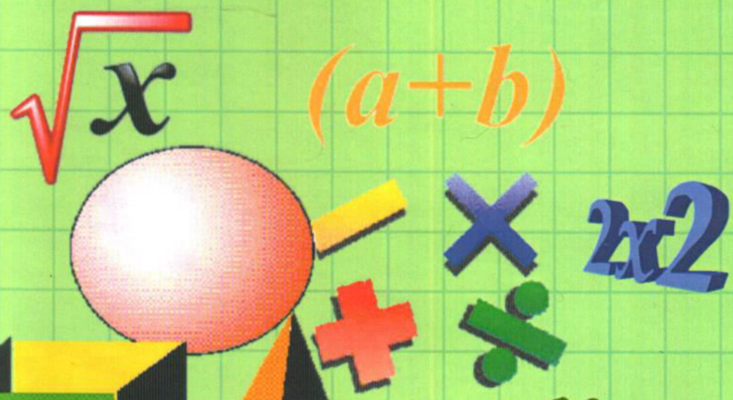
Сарієнко В. К.
Сарієнко В. В.
Пучков І.Р.

МАТЕМАТИКА

Навчально-методичний посібник



Сарієнко В. К.
Сарієнко В. В.
Пучков І.Р.

М А Т Е М А Т И К А

На допомогу учителю початкових класів

Частина 1

Множини. Відношення на множині
Елементи математичної логіки. Поняття. Судження

Слов'янськ
2017

УДК 373.3.016:511-028.31(07)
ББК 22.1

Сарієнко В. К., Сарієнко В. В., Пучков І. Р.
Математика. Навчально-методичний посібник: на допомогу вчителю початкових класів. Ч.1 / В. К. Сарієнко, В. В. Сарієнко, І. Р. Пучков. – Слов’янськ, 2017. – 74 с.

Навчально-методичний посібник призначений для вчителів початкових класів, працівників методичних кабінетів, для студентів ВНЗ, батьків школярів.

Посібник складений відповідно до змісту державного стандарту початкової освіти, освітньо-кваліфікаційних вимог до учителя початкової школи, освітньо-професійної програми підготовки учителя початкової школи.

У посібнику представлені основні математичні відомості з розділів, які є теоретичною основою початкового курсу математики з методичним віддзеркаленням на викладання у початкових класах.

Рецензенти:

Митник О. Я. – доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри психології інституту педагогіки і психології національного університету імені М.П.Драгоманова, м. Київ;

Чайченко В. Ф. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри педагогіки і методики початкового навчання інституту педагогіки і психології національного університету імені М.П.Драгоманова, м. Київ.

Божко В. О. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Донбаського державного педагогічного університету (м. Слов’янськ).

Ставіна Л. М. – методист Слов’янського міського навчально-методичного центру.

Дєлєскє С. В. – директор Слов’янської ЗОШ № 8, голова методичної ради.

Рекомендовано до видання вченою радою Донбаського державного педагогічного університету (протокол № 3 від 20.10.2016 р.) як навчально-методичний посібник для фахівців спеціальності „Початкова освіта”.

Рекомендовано вченою радою Донецького обласного інституту післядипломної педагогічної освіти (протокол № 6 від 19.12.2016 р.) як навчально-методичний посібник для фахівців спеціальності „Початкова освіта”.

© Сарієнко В. К., Сарієнко В. В., Пучков І. Р. 2017

Передмова

На сучасному етапі розвитку педагогічної науки зміна парадигми освіти з традиційної на інноваційну потребує такого фахівця, який має розвинене педагогічне мислення, здатний до перетворювальної, конструктивної діяльності та мобільності. Акцент з вузько профільного розуміння вчительської професії переноситься на становлення особистості професіонала, котрий володіє готовністю до безперервної самоосвіти, може визначати стратегію власного професійного розвитку, здатного до творчої, дослідницької діяльності, як найбільш дієвого фактору саморозвитку.

Наявність у сучасного педагога дослідницьких умінь, як невід'ємної риси його професійності, підтверджується вимогами Державного освітнього стандарту вищої професійної освіти і є невід'ємною складовою освітньо-кваліфікаційної характеристики учителя. Серед загальних характеристик якості спеціаліста виокремлюються знання теоретичних основ навчального предмету, уміння і навички пошукової діяльності, володіння сучасними методами обробки і використання інформації, вміння її використовувати у своїй професійній діяльності.

У всі часи розвитку суспільства математика посідала одне з провідних місць в системі господарської та наукової діяльності. На сьогодні в зв'язку з розвитком інформаційних технологій її значення значно підсилилося. Це підсилення відбивається в усіх життєвих сферах суспільства й школа, особливо початкова, в цьому процесі посідає першозначне місце.

У навчальному курсі з математики, як і в навчальному процесі взагалі, не ставиться завдання відкриття нових істин, а вимагається лише їх засвоєння. В цьому процесі забезпечується прискорений темп пізнання явищ дійсності, на вивчення, відкриття та дослідження яких знадобилось багато років. Процес навчання будується з урахуванням вікових особливостей учнів, у зв'язку з чим, відповідно, змінюються форми та методи пізнавальної діяльності. Багато видів знань на сьогодні здобувається учнями не шляхом безпосереднього споглядання та виучування об'єктів, а опосередковано, через розповідь вчителя, опис, пояснення, різноманітну інформацію. Причому, це відноситься не тільки до знань про природні об'єкти, але й до суспільних, філологічних та інших видів знань, що відображають усі сторони життя суспільства.

Навчальний матеріал, що вивчається у школі, представляє собою систему знань, здобутих у певній науковій галузі і зафіксованих у навчальних предметах. При цьому вони певною мірою інтерпретовані у відповідності з цілями навчання і виховання, віковими особливостями і можливостями учнів, з вимогами загальної та вікової психології. Але ця інтерпретація не змінює суті наукових знань та логіки наукової думки [12].

Початкова школа – це перша ланка середньої загальноосвітньої школи. Вимоги, що стоять перед школою, визначають основні напрямки роботи її початкової ланки. Математика – один з обов'язкових предметів початкової школи.

І це не випадково. Визнання математики обов'язковим навчальним предметом загальноосвітньої школи безпосередньо пов'язане з її роллю в науково-практичній і навіть побутовій діяльності людства.

Зміст освітньої галузі "Математика" в початковій школі забезпечує формування в учнів уявлень про натуральне число, засвоєння прийомів виконання арифметичних дій, ознайомлення з основними величинами, їх вимірюванням та окремими залежностями між ними, формування уявлень про окремі геометричні фігури, вироблення графічних умінь, оволодіння пропедевтичними відомостями з алгебри.

Об'єктивне, наукове представлення математичних знань, визначених для пізнання школярами посідає головне місце в навчальному процесі. Це представлення нормується державним стандартом, навчальними програмами та змістом навчальних знань, викладених у підручниках і методичних матеріалах, тому якість цих джерел повинна бути найвищого ґатунку й відповідати усім психологічним і логіко-дидактичним вимогам. Відповідно до цього, ключового значення набуває й професійна підготовка вчителів як з фундаментальних дисциплін, так і з методик їх викладання. Ці дві ланки є нерозривними, але перша є головною.

Утім, освітня практика початкової школи на сьогодні засвідчує певні проблеми як у системі підручникотворення, так і в системі фахової підготовки учителів, зокрема, в галузі математики у ВНЗ. Свідченням цього є, по-перше, значне скорочення бюджету часу на вивчення математики. По-друге, відповідно до сучасної концепції підготовки учителя початкової школи у ВНЗ, центр ваги перенесений з фундаментальної підготовки на методичну – методика викладання математики за обсягом удвічі перевищує підготовку із самого курсу математики. В той же час на сучасному етапі розвитку педагогічної науки відбувається зміна парадигми освіти з традиційної на інноваційну, що знайшло своє відображення в Державному стандарті початкової освіти. Серед загальних характеристик якості спеціаліста виокремлюються знання теоретичних основ навчального предмету, уміння і навички пошукової діяльності, володіння сучасними методами обробки і використання інформації, вміння її використовувати у своїй професійній діяльності. Відповідно відбуваються і зміни у змістовій частині навчальних предметів. що потребує оволодіння вчителями додатковою математичною інформацією.

У той же час доконаним є факт: за умов відсутності належних знань зі спеціальної дисципліни, методика втрачає підґрунтя творчої дисципліни і приймає рецептурний характер, що істотно знижує її ефективність.

Окремим рядком визначається і якість підручників з математики. Дослідження науковців, практика роботи вчителів засвідчують далеко не завжди високу якість шкільних підручників, зокрема, невідповідність віковим і психологічним особливостям дітей, відсутність спрямованості на набуття стимулів до навчання, а іноді взагалі ненауковий підхід до викладу матеріалу, порушення основних принципів дидактики, наявність змістових та смислових помилок, орієнтація на репродуктивний спосіб організації пізнавальної діяльності. Усе це істотно гальмує математичний розвиток дитини, знижує якість математичних знань, штучно створює уяву щодо виключної складності математики як навчального предмета і цим створює психологічний бар'єр у засвоєнні математичних знань. І з цієї причини допомога вчителю у підвищенні рівня спеціальної математичної підготовки визначає **актуальність** створення посібника з підготовки учителів з теоретичних основ початкового курсу математики, оскільки це сприятиме не тільки створенню базового підґрунтя для творчої діяльності учителя в організації навчального процесу, а й формуванню в свідомості учнів наукового змісту понять і відношень, що вивчаються, можливості виправляти недоліки, які, на жаль, ще мають місце у навчальній математичній літературі.

Метою цього посібника є відтворення та поглиблення теоретичних і практичних знань з основ початкового курсу математики, визначених державним стандартом початкової освіти та освітньо-професійною програмою учителя початкової школи, набуття вміння обґрунтовувати математичні поняття курсу початкової школи з логіко-дидактичних та наукових позицій, ознайомлення з основними методичними прийомами використання математичних знань в процесі викладання інших дисциплін початкової школи, створення дидактико-методичного підґрунтя до активізації самостійної пізнавальної діяльності молодших школярів у процесі вивчення математики.

Основними завданнями посібника є:

– набуття вчителями необхідних фундаментальних математичних знань, на основі яких будується курс початкової математики;

– формування умінь, необхідних для глибокого оволодіння її змістом і застосовуваними методами;

– створення необхідної математичної бази для удосконалення учителями методики викладання основних змістовно-методичних ліній курсу початкової математики;

– сприяння розвитку математичного мислення учителів і усвідомлення значення математичних методів в розвитку сучасного суспільства, їх ролі у вивченні людиною оточуючого світу;

– розвиток логіко-дидактичних умінь аналізу й творчого опрацювання навчальної та методичної математичної літератури;

– створення дидактико-методичної та предметно-наукової бази для розробки і впровадження інноваційних технологій навчання молодших школярів курсу математики.

У наслідок вивчення навчальної дисципліни учитель повинен

знати :

а) основні поняття з теорії множин, як основи поняття про число і числові операції та їх представлення у математичному матеріалі початкової школи;

б) основні поняття з теорії числових виразів, основні закони та властивості числових операцій та їх відображення у математичному матеріалі початкової школи;

д) основні поняття з теорії математичної логіки як основи пізнавальних процедур і операцій з математичними твердженнями і поняттями та їх відображення у математичному матеріалі початкової школи;

є) основні відомості з теорії числових систем як математичної основи ІКТ;

ж) основні поняття, закони і властивості з теорії невід'ємних цілих чисел та їх відображення у математичному матеріалі початкової школи;

з) основні поняття і властивості з теорії величин та їх відображення у математичному матеріалі початкової школи;

і) елементи теорії розширення поняття про число (раціональні та дійсні числа) та їх представлення у математичному матеріалі початкової школи;

уміти:

а) використовувати отриманні знання для обґрунтування відомостей, визначених програмою курсу математики початкової школи;

б) використовувати отриманні відомості з теоретичних основ початкового курсу математики для розв'язання дидактичних завдань у навчальному процесі;

в) використовувати набуті знання для поглибленого усвідомлення математичних відомостей учнями початкової школи у позакласній роботі;

г) використовувати базові знання з математики для розробки і впровадження творчих підходів до організації пошукової пізнавальної діяльності школярів.

Особливість курсу полягає в тому, що передбачені ним математичні відомості відповідають вимогам новітніх сучасних змістовно-теоретичних і методичних підходів до вивчення математики у початковій школі.

Основний зміст курсу математики відповідає освітньо-професійній програмі підготовки вчителя початкової школи і його освітньо-кваліфікаційній характеристиці у відповідності до вимог державного стандарту початкової освіти. Цей зміст концентрується в наступних розділах, кожний з яких виступає як окремий **модуль**:

Модуль 1. *„Множини. Відношення на множині"*. Зміст першого модулю передбачає ознайомлення слухачів з основним математичним поняттям –множиною. Виходячи з логіки побудови початкового курсу математики, множинні поняття і відношення являють собою теоретичний фундамент усіх математичних відношень, у тому числі й первинних. Отже, метою вивчення першого модулю програми є формування понять, що використовуються при розгляді інших розділів курсу і, в першу чергу, невід'ємних цілих чисел. До таких понять належать поняття множини, відповідності і відношення, ряд комбінаторних понять, які посідають певне місце в програмі з математики початкової школи. При цьому основна увага приділяється засвоєнню понять та властивостей теоретико-множинних операцій.

Модуль 2. *„Елементи математичної логіки. Поняття. Судження”.* Вивчення цього модулю передбачає ознайомлення з логічними законами математичного мислення, зі змістом і структурою понять, системою побудови суджень, структурою математичних тверджень. Цей модуль відіграє важливу роль у формуванні логічного мислення і усвідомлення логічної структури побудови початкового курсу математики.

Модуль 3. „***Числові вирази. Числові послідовності. Основні поняття. Рівняння, функції, графіки)”.*** Зміст модулю орієнтує, з одного боку, на повторення і узагальнення тих понять шкільної математики, які мають важливе значення для усвідомлення фундаментальних основ шкільної математики, а з іншого – на розгляд з єдиних позицій основних математичних понять і методів. Матеріал цього розділу слугує змістовною основою для вивчення програмних питань всіх інших модулів і, що головне, основних понять і відношень початкового курсу математики.

Модуль 4. „**Числові системи. Невід’ємні цілі числа”.** Матеріал цього модулю посідає центральне місце і в загально-професійній підготовці учителя початкової школи, і в плані формування науково-методичного підходу до викладання математики в початкових класах.

Весь матеріал модулю ділиться на ряд тем, що відображають різні підходи до введення поняття невід’ємного цілого числа, які знаходять втілення в діючих підручниках математики для початкової школи та курсу методики викладання математики. При вивченні матеріалу концентрується увага на теоретичних можливостях і особливостях реалізації методичних підходів до формування поняття числа в початковому курсі математики. В темі “Системи числення” основна увага приділяється розгляду десяткової системи числення і алгоритмам дій над числами в цій системі.

Вивчення розділу “Подільність чисел” має на меті теоретичне обґрунтування тих питань, які необхідні вчителю для розуміння більшості прийомів обчислень, що вивчаються в початковій школі, а також для засвоєння основних фактів теорії подільності. Вони можуть виявитися потрібними в подальшому викладенні матеріалу при розгляді різних методичних підходів до побудови початкового курсу математики і в практиці роботи вчителя. Це визначає рівень строгості викладання матеріалу: детально, з повними доведеннями повинні розглядатися всі основні факти теми, а їх практичне застосування ілюструватися достатньою кількістю прикладів.

Модуль 5. „Величини та їх вимірювання. Елементи геометрії” передбачає ознайомлення слухачів з одним з найскладніших і найважливіших понять шкільної математики – величинами. Це поняття найбільш завуальоване, розчинене в змісті початкового курсу математики і складає певні утруднення в усвідомленні його в зв'язку з високим рівнем абстрактності. Зміст цього модулю містить інформацію, яка є ключем до усвідомлення як самих понять „величина", „вимірювання", так і їх властивостей і видів (довжина, площа, об'єм, маса, швидкість та інших).

В зв'язку з тим, що в початковій школі (в першу чергу в системі розвиваючого навчання) значна увага приділяється оперуванню з скалярними величинами, до програми включено розділ "Величини". Вивчення матеріалу цього розділу може ґрунтуватися на аксіоматичній основі; в цьому випадку вдається уникнути логічних вад, пов'язаних з неоднозначним трактуванням ряду понять, а також показати можливість їх узагальнення з подальшою конкретизацією в залежності від тієї чи іншої сфери застосування. Значна увага повинна приділятися розгляду систем і одиниць вимірювання величин (як стандартних, так і нестандартних, але широко вживаних в різних галузях).

Поняття величини напряму пов'язане з вимірюванням. При цьому вимірювання геометричних об'єктів у програмі початкової школи є домінуючим. У зв'язку з цим постає нагальна потреба у розгляді основних геометричних понять, які визначені для вивчення програмою початкової школи. При цьому розгляд геометричного матеріалу, з одного боку, допомагає учителю додатково заглибитися у зміст геометричних понять і відношень, а з іншого – більш змістовно усвідомити поняття величини.

Зміст геометричного матеріалу, представленому в посібнику, становить пропедевтичну основу для наступного вивчення системного курсу геометрії у середній ланці школи. Окрім цього розгляд геометричного матеріалу має на меті адаптувати зміст геометричних знань учителя до програми і методики викладання цих знань у початкових класах.

Модуль 6. ***"Розширення поняття числа"*** має на меті узагальнення і поглиблення знань учителів про цілі, раціональні та дійсні числа, алгоритми арифметичних дій над ними; для розгляду і узагальнення властивостей відповідних числових множин (**N**, **Z**, **Q**, **R**). Це пов'язано з тим, що ознайомлення школярів з поняттям дробів передбачається стратегією математичної підготовки школярів з початкової школи.

У цьому ж модулі пропонується розгляд алгебраїчного матеріалу, оскільки він уводиться вже з першого класу і посідає одне з ключових місць у пропедевтиці алгебраїчних понять.

У першій частині посібника представлено матеріал перших двох модулів, а саме, „Множини" і „Елементи математичної логіки. Поняття. Судження."

У посібнику використовувалися матеріали з власного досвіду та частково з джерел, зазначених у списку літератури.

РОЗДІЛ І. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

Актуальність. *Поняття множини є фундаментальним поняттям у визначенні як поняття числа, так і числових відношень та операцій. У той же час протягом усього попереднього часу воно не використовувалося у шкільних підручниках початкової школи при уведенні зазначених понять і відношень. Склалася парадоксальна ситуація – методика ознайомлення школярів з арифметичними поняттями увесь час здійснювалося на основі теоретико-множинного підходу, а поняття множини навіть не згадувалося. Школярі ознайомлювалися з поняттям числа за допомогою наочності (палички, кубики, фрукти, ...). Певній кількості предметів присвоювалися назва і символ, які розташовувалися у певному порядку. Тобто методика „сповзала" на аксіоматичний підхід. В результаті математична модель поняття числа і числових операцій (арифметичних) вибудовувалася без основи, образно кажучи, як будинок без фундаменту. Засвоєння зазначених математичних понять в цьому разі здійснюється на рівні наочно-дійового мислення – найнижчому рівні розвитку мислення. Таке навчання спирається не на розуміння внутрішніх та зовнішніх зв'язків у числових відносинах, а на експлуатації пам'яті, вважаючи, що школярі колись усвідомлять їх зміст з досвідом.*

На жаль така позиція методики зазначених сподівань не виправдала, вона увійшла в суперечність з принципами дидактики, у першу чергу з принципом науковості та принципами послідовності і системності що, на жаль, знайшло своє відображення у змісті шкільних підручників.

Останнім часом методика дійшла до розуміння потреби математики до виправлення зазначених помилок і зняття зазначеної суперечності. Це розуміння знайшло своє відображення у державному стандарті початкової освіти і, відповідно, у програмних вимогах до математичної підготовки школярів початкової школи. Однак практика висвітлила низку утруднень у реалізації цих вимог. Зокрема, має місце невідповідність змістовних програмних завдань рівню знань учителів з теорії множин, а саме, засвідчений факт того, що вчителі початкової школи в більшості своєї не володіють на достатньому рівні знаннями з теорії множин, в результаті чого, більшість з них не може визначити поняття числа, додавання, поняття нуля та ін.

Причина такого становища полягає у тому, що, по-перше, учителі, отримавши навчальну інформацію з теорії множин у курсі математики в період навчання у ВНЗ, на практиці більше з нею довгі роки не стикалися, оскільки на це не націлювала шкільна програма, тому отриманні знання, *будучи не затребуваними, з часом згасли. По-друге, наслідком попередньої причини обумовлені й помилки у підручниках. По-третє, оскільки ані шкільна програма, ані зміст підручників не націлювали на впровадження у зміст навчання елементів теорії множин, то не націлювала на їх впровадження і офіційна методика.*

Отже, виходячи із сучасних вимог до вивчення початкового курсу математики та умов, які склалися в практиці навчання школярів, має місце потреба у відновленні та поглибленні знань з теоретичних основ множинного підходу до змісту початкового курсу математики.

Викладений у скороченій формі в цьому розділі матеріал надає можливість підготуватися учителю до навчання школярів знанням з програмного матеріалу, який стосується теорії множин, і використовувати його для якісного засвоєння учнями інших тем шкільного курсу математики.

Основні поняття.

1. *Множина.* Поняття множини є одним з головних понять математики. Поняття множини аксіоматичне. Воно не має означення. У описовому порядку це поняття можна представити як сукупність певних однорідних об'єктів. Термін *множина* походить від слова *багато*, але у це поняття вкладається узагальнюючий смисл. За виразом одного із засновників теорії множин Георга Кантора, *множина – це багато що, мислиме як єдине ціле*. Наприклад, шкільний клас 1″а″. Він складається з певної сукупності окремих учнів, але розуміється як певна одиниця, тобто як єдине ціле – 1″а″клас. А 1″б″ клас – це вже інша сукупність, яка теж складається з певної кількості окремих учнів. За певних умов узагальнено можна розглядати й інші сукупності, скажімо, армійські – рота, батальйон, полк, дивізія, які визначаються нумерацію – 1-й батальйон, 23-тя дивізія.

Множини позначаються великими буквами латинського алфавіту: *A, B, C, ...* Об'єкти, з яких складаються множини називаються *елементами множини*. Вони позначаються малими буквами латинського алфавіту: *a,b,c ...*

Якщо об'єкт *a* входить до складу елементів множини А, то говорять, що він *належить* множині А, що позначається $a \in A$, якщо ж не входить – то говорять, що елемент *a не належить* множині *A* і записують $a \notin A$.

Якщо кількість елементів у множині обмежена, то множина називається *скінченою*, а якщо не обмежена, то *нескінченною.*

Кількість елементів скінченої множини *A* позначається $n(A)$. Скажімо, якщо задана множина $A = \{a; b; c; d\}$, то $n(A) = 4$.

Якщо множина не має елементів, то вона називається *порожньою* і позначається символом $\varnothing$. Записують: $A = \varnothing$. Наприклад, якщо у коробці олівців немає, то говорять, що коробка порожня, або *множина олівців у коробці порожня.*

Множини задаються:

1) переліком. У цьому разі запис множини має такий вигляд: $A = \{a; b; c; d\}$;

2) графічно. У цьому разі в якості елементів виступають певні графічні моделі у вигляді креслень. Наприклад, задано три відрізки заданої довжини (кресляться відрізки);

3) аналітично, у вигляді формули, що відображає певну характеристичну властивість, яку має кожний елемент множини і не має жодний елемент, який цій множині не належить. Наприклад,
$A = \{x \,/\, x = 2n - 1, n \in N\}$. Читається: „$A$ – це множина таких елементів x, які визначаються формулою $x = 2n - 1$, де n – будь-яке натуральне число”.

Множина B, яка повністю складається з елементів множини A, називається *підмножиною* множини A, тобто, кожний елемент множини B є елементом множини A. Це записується так: $B \subset A$ *(див. рис. 1).* Наприклад, нехай задана множина $A = \{2, 3, 5, 8\}$. Тоді її підмножинами будуть 4 множини по 1 елементу, наприклад, $B = \{5\}$, 6 множин по 2 елементи, наприклад, $C = \{3, 8\}$, 4 множини по 3 елемента, наприклад, $D = \{3, 5, 8\}$.

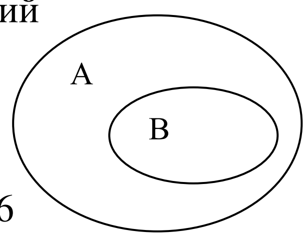


Рис. 1

До того ж, виходячи з даного означення, кожна множина є підмножиною самої себе, тобто $A \subset A$, а оскільки в кожній множині можна виділити безліч порожніх множин, то порожня множина є підмножиною будь-якої множини, тобто $\varnothing \subset A$. Ці дві множини називаються невласними підмножинами заданої множини. Усі інші підмножини – власними.

Дві множини називаються *рівними,* якщо вони повністю складаються з одних і тих же елементів. З попереднього означення випливає висновок, що якщо множина A є підмножиною множини B, а множина B є підмножиною множини A, то множини A і B будуть рівними, тобто $A = B$.

Вправи:

1. P – множина натуральних чисел, більших 7 і менше 14. З'ясуйте і запишіть, які з чисел 13, 10, 5, 7, 14 йому належать, а які не належать. Відповідь запишіть у символічній формі.
2. A – множина розв’язань рівняння $x^2 + 1 = 0$. Запишіть цю множину.
3. Запишіть множину букв в слові «математика» і множину цифр у записі числа 5125353.

4. Запишіть множину чисел, які більше, ніж 65 і менше, ніж 75 переліком і в аналітичній формі.

5. Укажіть характеристичну властивість елементів множини

А = {12, 22, 32, 42, 52, 62, 72, 82, 92}.

6. Запишіть за допомогою знака рівності та фігурних дужок речення:

а) X – множина чисел 0, 1,2, 3, 4, 5;

б) Y – множина букв у слові *математика*.

7. Запишіть, використовуючи символи, множину Р, якщо вона складається з натуральних чисел:

а) більших 100, але менших 200; б) менших 150; в) більших 25.

8. Перелічіть елементи наступних множин:

A – множина непарних однозначних чисел;

B - множина натуральних чисел менших або рівних 20;

C- множина двозначних чисел, які діляться на 10.

9. Вказати характеристичну властивість елементів множини:

а) {а, е, є, і, и, о, у, ю, я};

б) {78,76,74,72,70};

в) {111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999}.

10. Множина С складається з квадрата, кола і трикутника. Чи належать цій множині діагональ квадрата і центр кола?

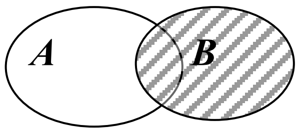
11. Покажіть, що завдання: «Збільшити кожне непарне однозначне число в 2 рази», можна задати двома способами завдання множини.

Операції над множинами.

<u>Об'єднанням</u> множин A і B називається множина $A \cup B$, яка складається з елементів, що належать хоча б одній з них.

Нехай задані множини A = {2, 4, 6, 8} і B = {5, 6, 7, 8, 9}, тоді згідно з означенням $A \cup B$ = {2, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. При об'єднанні множин кожний елемент входить в об'єднання один раз, тобто в об'єднанні враховується не кількість елементів об'єднуваних множин, а з яких елементів вони складаються.

Графічно це виглядає так:



$A \cup B$

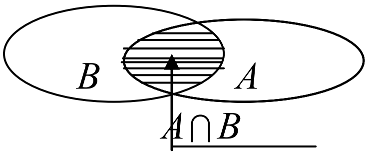
При об'єднанні множин виконуються комутативний (переставний) і асоціативний (сполучний) закони, тобто

$$A \cup B = B \cup A \qquad \text{і} \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Щоб практично створити об’єднання множин, слід виписати елементи однієї множини і дописати до них елементи другої множини, які відмінні від елементів першої.

<u>Перерізом</u> (перетином) двох множин A і B називається множина $A\cap B$, яка складається з елементів, що належать обом множинам одночасно.

Наприклад, для множин $A = \{2, 4, 6, 8\}$ і $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ перетином буде множина $A\cap B = \{6, 8\}$. Графічно це виглядає так:



При перерізі множин також виконуються комутативний (переставний) і асоціативний (сполучний) закони, тобто

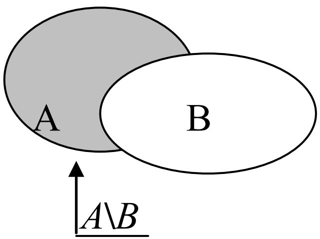
$$A \cap B = B \cap A \qquad \text{і} \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

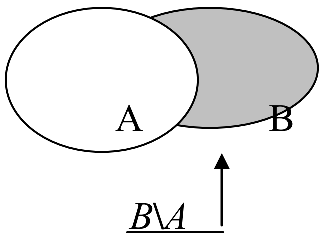
Операції перерізу і об’єднання пов’язані двома дистрибутивними (розподільними) законами:

1. $(A\cap B)\cup C = (A\cup C) \cap (B\cup C)$;
2. $(A\cup B) \cap C = (A\cap C) \cup (B\cap C)$;

<u>Різницею</u> множин A і B називається множина A\B, яка складається з елементів множини A, що не належать множині B.

Наприклад, для множин $A = \{2, 4, 6, 8\}$ і $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ різницею $A\backslash B$ буде множина $A\backslash B = \{2, 4\}$, а для різниці $B\backslash A$ буде множина $B\backslash A = \{5, 7, 9\}$. Графічно це виглядає так:

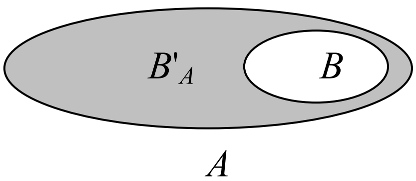




<u>Доповненням</u> множини B до множини A називається множина B'_A, яка складається з елементів множини A, що не належать множині B.

Нехай задана множина $A = \{2, 4, 6, 8, 9, 11\}$ і множина $B = \{2,4,6,8\}$. Тоді *доповненням* множини B до множини A буде множина $B'_A=\{9, 11\}$.

Графічно це виглядає так:



Множина, що складається з двох елементів, називається парою.

Множини називаються рівнозначними, якщо вони складаються з однакових елементів і в них збережений порядок елементів. Якщо порушена *хоча б одна з цих умов, то множини не рівнозначні.*

Множина називається упорядкованою, якщо для неї рівнозначність зберігається лише у випадку, коли в ній усі елементи однакові. Наприклад, $\{a; b; c; d\} = \{a; c; d; b\}$, якщо $a = b= c= d,$ тобто маємо множену $\{a; a; a; a\}$. В усіх інших випадках множини нерівнозначні. Упорядкована множина позначається $(a; b; c; d)$. Отже, пара $(a;b)$ буде упорядкованою, якщо виконується умова, що $(a;b) \neq (b;a)$. Наприклад, число 12 є парою цифр (1; 2). Число 21 складається з тих же цифр, але число 12 не дорівнює числу 21.

Будь-яка упорядкована множина називається *кортежем.* Кортеж з двох елементів називається кортежем довжини 2 (або парою), кортеж з трьох елементів називається кортежем довжини 3 (або трійкою), з чотирьох – довжини 4 і так далі...

Декартовим добутком множин A і B називається множина будь-яких упорядкованих пар виду $(a;b)$, де $a \in A,$ а $b \in B.$ Декартовий добуток позначається $A \times B$. Наприклад, нехай задані множини $A=\{a; b; c; d\}$ і $B = \{m; n;\}$, тоді $A \times B = \{(a;m), (b;m), (c;m), (d;m), (a;n), (b;n), (c;n), (d;n)\}$.

Кількість елементів (чисельність) об'єднання 2-х множин.

Як ми зазначали вище, кількість елементів скінченої множини A позначається $n(A)$.

Нехай задані дві скінчені множини A і $B,$ які мають відповідно чисельності $n(A) = a$ і $n(B) = b$. Утворимо з цих двох множин їх об'єднання, тобто утворимо множину $C = A \cup B$. Якщо вони не перетинаються, тобто не мають спільних елементів, то кількість елементів об'єднання цих множин буде дорівнювати сумі кількості елементів кожної з них, тобто $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = a + b$

Графічно це виглядає так: $\boxed{\text{A}} \cup \boxed{\text{B}} = \boxed{A \cup B}$

У вигляді переліку: $A =\{a; b; c; d\}$, $n(A) = 4$; $B = \{m; n;\}$, $n(B) = 2$.

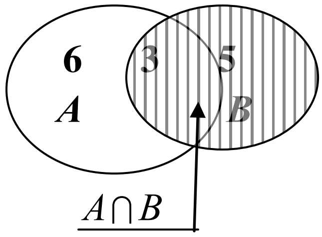
$A \cup B = \{a; b; c; d; m; n\}$, $n(A \cup B) = 4 + 2 = 6$.

Якщо ж множини A і B перетинаються, тобто мають спільні елементи, то кількість елементів їх об'єднання дорівнює сумі кількостей елементів кожної мінус кількість елементів перетину.

У вигляді переліку це виглядає так: $A =\{a; b; c; d; e; f\}$, $n(A) = 6$;

$B = \{a; b; c; m; n\}$, $n(B) = 5$. $A \cap B = \{a; b; c\}$, $n(A \cap B) = 3$, отже в цьому разі $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 6 + 5 - 3 = 8$. Отже у цьому разі формула має такий вигляд: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = a + b$.

Графічно це виглядає так**:**



Вправи:

1. Відомо, що $x \in A$. Чи випливає з цього, що $x \in A \cap B$?

2. Відомо, що $x \in A \cap B$. Чи випливає з цього, що $x \in A$?

3. Відомо, що $x \in A \cup B$. Чи випливає з цього, що $x \in A$?

4. Знайдіть об'єднання множин А і В, якщо:
а) $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{b, e, f, к\}$.
б) $A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$, $B = \{17, 26, 58\}$.
в)$A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$, $B = \{17, 26, 58, 5, 39, 81\}$.

5. З яких елементів складається об'єднання множини букв у слові «математика» і множини букв у слові «геометрія»?

6. M – множина однозначних чисел, P – множина непарних натуральних чисел.

З яких чисел складається об'єднання даних множин? Чи містяться в ньому числа 7 і 9?

7. Використовуючи координатну пряму, знайдіть об'єднання множин рішень нерівностей, в яких x – дійсне число:
а) $x > -2$ і $x > 0$;
в) $x > 5$ і $x < -7{,}5$;
б) $x > -3{,}7$ і $x < 4$;
г) $-2 < x < 4$ і $x > -1$;
д) $-7 < x < 5$ і $-6 < x < 2$.

8. Накресліть дві фігури, що належать перетину множин C і D, якщо:
а) C – множина ромбів,
D – множина прямокутників,
б) C – множина рівнобедрених трикутників,
D – множина прямокутних трикутників.

9. Відомо, що $x \in A \cap B$. Чи випливає з цього, що
а)$x \in B \cap A$; *б)* $x \in A \cup B$; в) $x \in B \cup A$?

10. Побудуйте три кола, що представляють множини А, В і С, які попарно перетинаються і позначте штрихуванням області, що зображують множини:

а) $A \cap B \cap C$; б) $(A \cap B) \cup C$; в) $A \cup B \cap C$; г) $A \cup B \cup C$.
Для кожного випадку зробіть окремий малюнок.

11. A – множина точок кола, B – множина точок прямої L. Зі скількох елементів може складатися перетин цих множин? Чи може воно бути порожнім?

12. Накресліть два трикутника так, щоб їх перетином: а) був трикутник; б) був відрізок; в) була точка.

13. Використовуючи координатну пряму, знайдіть об'єднання множин розв'язань нерівностей, в яких x – дійсне число:

а) $x > -2$ і $x > 0$; в) $x > 5$ і $x < -7{,}5$;

б) $x > -3{,}7$ і $x < 4$; г) $-2 < x < 4$ і $x > -1$;

д) $-7 < x < 5$ і $-6 < x < 2$.

18. Задані множини: A – натуральних чисел, які кратні 2; B – натуральних чисел, які кратні 3; C – натуральних чисел, які кратні 5.

а) Зобразіть за допомогою кругів Эйлера дані множини й заштрихуйте область, яка зображує множину $A \cap B \cup C$.

б) Сформулюйте характеристичну властивість елементів цієї множини та назвіть 3 елемента, які їй належать.

в) Чи вірно що, $A \cup B \cap C = (A \cup B) \cap (A \cup C)$?

19. Сформулюйте умови, при яких є істинною наступна приналежність:

а) $5 \in A \setminus B$; б) $7 \in A \setminus B$.

20. Відомо, що $x \in A \setminus B$. Чи випливає з цього, що:

а) $x \in A$; б) $x \in B$; $x \in A \cap B$?

21. Знайти різницю множин A і B, якщо

а) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$;

б) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{0, 7\}$;

в) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$;

г) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{6, 2, 3, 4, 5, 1\}$.

22. Знайдіть доповнення множини Y до множини X, якщо:

а) X – множина точок прямої AB, Y – множина точок відрізка AB;

б) X – множина точок квадрата, Y – множина точок круга, вписаного у цей квадрат;

в) X– множина прямокутників, Y– множина квадратів.

23. З яких чисел складається доповнення:

а) множини натуральних чисел до множини цілих;

б) множини цілих чисел до множини раціональних;

в) множини раціональних чисел до множини дійсних.

Для кожного випадку виконайте окремий рисунок.

Бінарні відповідності. Відношення на множині

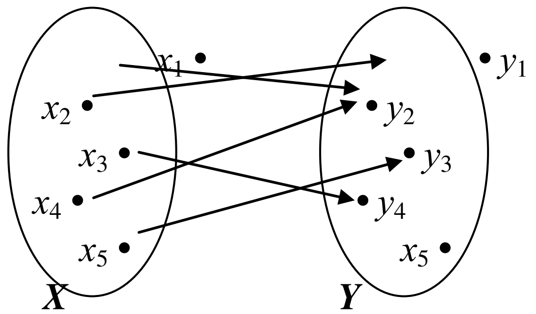
Десятеро школярів купили білети в театр на виставу. У кожному білеті були вказані ряд і місце, які зайняв кожний з школярів. Ніхто з них не міг зайняти інше місце, оскільки дані білету строго визначали місце кожного відвідувача, тобто білет встановлював *відповідність* між стільцями в залі і кожним відвідувачем. В узагальненому вигляді словники визначають поняття відповідності, як співвідносність між якимись об'єктами або явищами (С.Ожегов). У математиці під *відповідністю* розуміють залежність, визначену певними умовами між елементами двох або декількох множин певних об'єктів.

Прикладами відповідностей можуть бути відповідність між точками відрізка і числами, відповідність між черговими і днями місяця, між навчальними предметами і днями тижня та часом їх вивчення, порами року і температурою повітря та ін.

Ключове місце у відповідностях посідає відповідність між двома множинами. Такі відповідності називаються *бінарними*.

Суть бінарних відповідностей полягає в тому, що кожний елемент однієї множини в залежності від зазначеної умові пов'язується з одним або декількома елементами іншої множини. Зміна умови тягне за собою і зміну елементу, з яким заданий елемент першої множини пов'язується з елементом іншої множини. Це можна проілюструвати графічно так:

Нехай задані дві множини: X і Y та умова F, за якою кожному



елементу множини X відповідає певний елемент множини $\boldsymbol{Y}$ (відповідність позначена стрілками). Як бачимо в нашому прикладі, кожний елемент множини $\boldsymbol{X}$ пов'язаний стрілкою з якимось елементом множини $\boldsymbol{Y}$, можливо навіть і не з кожним. Цей зв'язок визначається певною умовою. Якщо умову змінити, то можуть змінитися й напрямки стрілок. У даному випадку стрілками визначаються пари $(x_i\ y_j)$, перший елемент яких належить множині X, а другий – множині Y. Отже ці пари є не що інше, як елементи декартового добутку $X \times Y$. Виходячи з формули кількості пар декартового добутку $n(X) \cdot n\ (Y)$, у нашому випадку їх 25 (5·5). Стрілок же маємо тільки 5, тобто вони визначають 5 пар з 25, які відповідають заданій умові *F*.

Отже, *бінарною відповідністю* між елементами множин *X* і *Y* називається будь-яка підмножина декартового добутку цих множин, яка відповідає умові *F*.

Отже, щоб задати відповідність *F* між множинами *X* і *Y,* достатньо вказати підмножину *M* заданого декартового добутку множин *X* і *Y*.

Множина *X* у цьому добутку називається *областю відправлення* відповідності *F*, множина *Y* – *областю прибуття,* а множина пар (*Г*), які є підмножиною декартового добутку множин (визначених стрілками), називається *графіком* відповідності *F*. Малюнок, який наочно відображає графік відповідності, називається *графом.*

Деякі типи відповідностей. Якщо графік *Г* відповідності *F* між множинами *X* і *Y* співпадає з усім декартовим добутком $X \times Y$, то цю відповідність називають повною. Якщо ж графік відповідності *F* порожній, то *F* називають *порожньою* відповідністю. Наприклад, відповідність "дерево *x* росте там же, де й дерево *y*" порожня, якщо *X* – множина дерев тропічної пальми, а *Y* – множини дерев сибірського кедра.

Повна і пуста відповідності існують між будь-якими двома множинами *X* і *Y*. Якщо задані непусті множини *X* і *Y*, то між ними можна встановити цілий ряд інших відповідностей, вибираючи по-різному підмножини *Г* в декартовому добутку $X \times Y$.

Якщо відповідність *xPy* задана предикатом *P*(*x,y*), то протилежна їй відповідність задається запереченням цього предиката. Наприклад, відповідність „Число *x* більше числа *y*" буде протилежною відповідності „Число *x* не перевищує числа *y*", тобто предикатом P(x,y).

Відповідності *xPy* і *xQy* називають *несумісними*, якщо не існує жодної пари елементів (*x*; *y*), для якої одночасно виконувалися б умови *xPy* і *xQy*. Наприклад, для прямих несумісні відповідності x||y і $x \perp y$ – дві прямі не можуть бути одночасно і паралельними, і перпендикулярними.

Нехай задана відповідність *xPy* між множинами *X* і *Y*. Тоді *оберненою* їй називають відповідність $yP^{-1}x$ між множинами *Y* і *X*, таку, що $yP^{-1}x$ в тому і тільки в тому випадку, коли *xPy*. Наприклад, для відповідності „Число *x* ділиться на число *y*" оберненою буде відповідність „Число *y* є дільником числа *x*", тобто, число *x* ділиться на число *y* в тому і тільки в тому випадку, коли *y* є дільником числа *x*.

Щоб отримати графік відповідності P^{-1}, оберненої відповідності *P*, треба взяти графік відповідності *P* і поміняти місцями компоненти в кожній парі тобто поміняти місцями області відправлення і прибуття (на графі треба змінити на зворотний напрямок всіх стрілок).

Відношення на множині. Слід зазначити, що множини *X* і *Y* можуть бути як різнорідними, так і однорідними. Скажімо, *X* – множина відвідувачів театру, а

Y – множина стільців. Тут множини різнорідні. Якщо ж множини X і Y співпадають, то така відповідність називається *відношенням*. У цьому разі маємо декартовий добуток $X \times X$. Прикладами таких відповідностей можна назвати, відповідності між числами на множині чисел: число a більше, менше або дорівнює числу b; число a ділиться на число b та ін.; на множині прямих ліній: пряма a паралельна прямій b, пряма a перпендикулярна прямій b та ін. Отже, у цьому разі говорять про *відношення* між числами, прямими та ін.

На будь-якій множині X розглядають відношення *тотожності* і *відмінності*. Відношення тотожності задається множиною $Г$ пар виду $(x; x)$, де $x \in X$. Іншими словами, xRy в тому й тільки в тому випадку, коли x збігається з y. У цьому разі відношення *тотожності* позначають $x \equiv y$. Відношення, протилежне відношенню тотожності, називають відношенням *відмінності* і позначають $x \neq y$ або $x \not\equiv y$. Графік відношення відмінності складається з таких пар (x; y), що x і y різні.

Властивості відношень. Нехай на множині X задане певне відношення R.

1. Відношення R називається *рефлексивним*, якщо для будь-якого $x \in X$ істинним буде xRx, тобто певний елемент x знаходиться у відношенні R з самим собою. Наприклад, якщо R – відношення подільності, а X – множина чисел, то xRx означає, що число x ділиться само на себе. Аналогічно, якщо R – відношення рівності ($x=x$), якщо R – відношення паралельності, то кожна пряма паралельна самій собі та ін.

2. Відношення R називається антирефлексивним, якщо ні один елемент $x \in X$ не знаходиться у відношенні R з самим собою. Наприклад, якщо R – відношення перпендикулярності, то ніяка пряма не може бути сама собі перпендикулярною.

3. Відношення R називається *симетричним,* якщо для будь-яких елементів x і y з множини X з xRy випливає yRx. Наприклад, якщо R – відношення паралельності, то, якщо пряма x паралельна прямій y, то і пряма y паралельна прямій x, тобто з $x \parallel y$ випливає $y \parallel x$. Аналогічно, якщо $x = y$, то і $y = x$.

4. Відношення R називається *асиметричним,* якщо ні для яких x і y з множини X не може виконуватися одночасно xRy і yRx. Прикладом асиметричного відношення є відношення $x < y$, тобто, якщо $x < y$, то $y > x$.

5. Відношення R називається *антисиметричним*, якщо xRy і yRx одночасно виконуються лише тоді, коли $x = y$.

6. Відношення R називається *транзитивним*, якщо для будь-яких елементів x, y і z з множини X з того, що xRy і yRz випливає xRz. Наприклад, якщо R – відношення паралельності, то з того, що пряма x паралельна прямій y, а пряма y паралельна прямій z, випливає, що пряма x паралельна прямій z. Аналогічно, якщо R – відношення рівності, нерівності, подібності та ін.

7. Відношення R називається *антитранзитивним*, якщо з xRy і yRz не випливає xRz. Наприклад, якщо відношення R – відношення перпендикулярності, то з $x \perp y$ і $y \perp z$ не випливає, що $x \perp z$.

Розбиття множини на класи. Множину X всіх першокласників можна розбити, на підмножини, що складаються з учнів, що навчаються в 1-а, 1-б, 1-в ... класах. Ніякі дві з цих підмножин не мають спільних елементів (учень не може одразу вчитися в двох класах), а об'єднанням цих підмножин є множина всіх першокласників. Кажуть, що множина X розбита на попарно непересічні підмножини множини X: X_1, X_2 ,, X_3, ... Ту ж множину X можна розбити на непересічні підмножини й іншими способами, наприклад, на дівчаток і хлопчиків або по місяцях народження та ін.

Взагалі, можна говорити про розбиття даної множини на попарно непересічні підмножини або класи тоді, коли одночасно виконуються наступні умови:

1. Всі підмножини, що утворюють розбиття, не порожні.

2. Будь-які дві таких підмножини не перетинаються.

3. Об'єднання всіх підмножин є дана множина.

Так, множину натуральних чисел можна розбити на три підмножини – множину простих чисел, множину складених чисел і множину, що складається з одиниці. Цю ж множину можна розбити і на два класи – клас парних і клас непарних натуральних чисел.

Розбиття множини на попарно непересічні підмножини лежить в основі всіляких класифікацій: у мові, у білогії, у математиці. Поняття „клас" і його синоніми, „рід", „вид", широко застосовуються у всіх областях людської діяльності.

Відношення еквівалентності та порядку. Якщо відношення R на множині X має властивості рефлексивності, симетричності і транзитивності, то його називають відношенням *еквівалентності.* Прикладами відношення еквівалентності є відношення рівності, паралельності, відношення „навчатися в одному класі", жити в одному місті" та ін.

Відношення еквівалентності дозволяє розбити множину на класи. Дійсно, кожний елемент множини належить якійсь не порожній підмножині, немає елементів, які належать двом підмножинам одночасно, об'єднання усіх підмножин утворює всю вихідну множину.

Якщо відношення R на множині X має властивості асиметричності і транзитивності, то його називають відношенням *порядку.* Прикладами відношення порядку є відношення „більше", „менше", відношення подільності, відношення „бути старшим", бути вищим" та ін. Відношення порядку визначає відношення *„х наслідує у"* або *„х передує у".*

Якщо у відношенні порядку виконується властивість рефлексивності, то порядок називається *нестрогий*, наприклад, $x \leq y$ або $x \geq y$, якщо ж рефлексивність не виконується, то порядок називається *строгий* $(x>y$ або $x>y)$.

Якщо відношення порядку R (строгого або нестрогого) на множині X має властивість: для будь-яких елементів x и y з множини X виконується або xRy, або yRx, то R називається відношенням *лінійного порядку*, а множина X – *лінійно впорядкована множина*. Якщо множина X скінченна і складається з n елементів, то лінійне упорядкування X зводиться до нумерації його елементів числами 1,2,. . ., n. Наприклад, множина натуральних чисел відношенням „менше" упорядковується лінійно. Ставлення подільності впорядковує множину натуральних чисел нелінійно.

Вправи

1. Які властивості мають відношення:

а) учень *A* народився в тому ж році, що й учень *B*;

б) дерево *A* вище дерева *B*;

в) стовп *A* на 50 см нижче, ніж стовп *B*;

г) плавець *A* плаває швидше плавця *B*;

д) дівчинка *A* не старша за дівчинку *B*;

е) *A* – сестра *B*;

ж) *A* живе в одному домі з *B*;

з) *A* молодша за *B*;

і) *A* схожий на *B*;

к) учень *A* закінчив школу пізніше учня *B*;

л) число *a* не ділиться на число *b*;

м) трикутник *A* такий же, як і трикутник *B*.

Методичний коментар.

Останнім часом набирає ваги новий концептуальний підхід до розгляду основних математичних понять, операцій і відношень у початковому курсі математики, а саме, з позицій основних понять і відношень теорії множин, оскільки традиційна система уведення цих математичних понять, операцій і відношень здійснювалося необґрунтовано, бездоказово, на рівні наочно-образного мислення, з порушенням основних принципів дидактики. Новий підхід саме й надає основу для їх пояснення у відповідностями з цими принципами, зокрема, принципами науковості, свідомості і активності учнів у навчанні, систематичності й послідовності. А головне – цей підхід створює базу для розвитку творчої пізнавальної діяльності школярів у навчанні.

Конкретно.

Поняття множини забезпечує усвідомлення поняття числа, як кількісної характеристики певної скінченої множини.

В основі поняття числа нуль лежить поняття порожньої множини.

Ґрунтом для поняття основної операції арифметики – додавання є операція об'єднання множин, а для операції віднімання – різниця і доповнення множин.

Пояснення переставної (комутативної), сполучної (асоціативної) і розподільної (дистрибутивної) властивостей додавання та множення здійснюється на основі відповідних властивостей об'єднання і перерізу множин.

Природно, що ознайомлення школярів з цими теоретико-множинними поняттями, операціями і відношеннями повинно передувати уведенню поняття числа і арифметичних операцій з числами.

Для впровадження цих теоретико-множинних понять і відношень слід дотримуватися наступної послідовності:

1. Перший крок: слід увести загальне поняття множини, зокрема, на прикладі, учнів класу. Множину можна описово представити як сукупність предметів, які мають якусь спільну властивість. Тут розв'язання задач на визначення зайвого предмету є дуже важливим кроком у визначенні складу тієї чи іншої множини. Важливим тут є уведення поняття роду, тобто спільної властивості елементів, за якою визначається множина (меблі, овочі, трикутники...)

2. Наступний крок: уводиться поняття елементу множини, відношення приналежності елементу до заданої множини. Особливо важливим є акцентування приналежності елементу до даної множини, визначеної загальною умовою (родом). Корисною вправою тут є завдання щодо знаходження зайвого елементу.

3. Наступний крок: уводиться поняття кількості елементів множини (чисельності), як однієї з двох властивостей будь-якої множини (властивості: якісна – з яких елементів складається множина, кількісна – скільки елементів у множині). Тут же пояснюється символічне позначення кількості елементів множини за допомогою цифрової символіки, які називаються числами. Такий підхід пояснює походження числа, як кількісної характеристики скінченої множини.

4. Наступний крок: уводиться поняття порівняння множин шляхом утворення пар з елементів множин, що порівнюються. На основі порівняння уводиться поняття рівних і нерівних множин за кількістю елементів: більша – має більшу кількість елементів, менша – меншу (у математиці – більш потужна і менш потужна множина. На початковому рівні можна *допустити об'єктивований вираз „більша" множина і „менша" множина). Це порівняння доцільно здійснювати шляхом утворення пар з елементів різних множин*

5. Наступний крок: зазначається, що оскільки множина може мати будь-яку кількість елементів, то вона може складатися навіть з одного елементу.

6. Наступний крок: уводиться поняття підмножини як частини певної множини. Це можна проілюструвати на учнях класу, виділивши у ньому множини хлопчиків і дівчаток. Тут проводиться паралель з порівнянням множин за кількістю елементів: підмножина має меншу чисельність, ніж ціла множина.

7. Наступний крок – узагальнення. Визначення роду однорідних підмножин і утворення за їх допомогою загальної множини, наприклад, множина яблук і множина груш узагальнюються як множина фруктів; множина скрипалів, множина баяністів і множина піаністів узагальнюються як множина музикантів.

8. Наступний крок: уведення операції об'єднання множин (які не мають спільних елементів) як процес приєднання елементів однієї множини до елементів другої. На основі цієї операції уводиться теза: при об'єднанні множин утворюється нова множина, у якої кількість елементів більша, ніж у кожній з об'єднуваних. Наголошується, що оскільки змінюється кількість елементів у множині, то змінюється і число, яким позначається ця кількість. Процес зміни кількості елементів при об'єднанні множин позначати значком +.

9. Наступний крок: уводиться операція доповнення множини В до множини А, яка виконується як видалення множини В з множини А у випадку, коли множина В цілком входить у множину А.

10. Наступний крок: уводиться операція різниці множин, яка виконується шляхом видалення елементів із заданої множини. Інакше – видалення підмножини з множини. І знов, як і в додаванні, здійснюється перехід на розгляд кількісних змін у множині. Ця операція лежить в основі арифметичної операції віднімання.

11. Наступний крок: уводиться поняття числа 1 як чисельності (кількості елементів) одноелементної множини.

12. Далі – утворення нових чисел як результат зміни кількості елементів множини при об'єднанні з нею іншої одноелементної множини того ж роду і т.д.

Практичні матеріали такого характеру в підручниках математики є, їх лише слід систематизувати за логікою розширення теоретико-множинної основи.

Що ж до відношень, то вони посідають у початковому курсі математики одне з ключових місць. Відношення рівності і нерівності, відношення подільності, відношення еквівалентності і порядку, відношення приналежності, просторові відношення між геометричними об'єктами – усі вони, фактично, складають зміст математики. Окремою темою відношення у початковому курсі математики не розглядаються, вони розглядаються в контексті вивчення будь-якого тематичного матеріалу, але учитель повинен постійно тримати їх зміст і властивості в полі зору, зокрема, при розв'язанні практичних завдань. Наприклад, при розв'язанні задачі „Тані 15 років, це на 3 роки більше, ніж Альоні. Скільки років Альоні?". Учні за усталеною традицією, побачивши слова „на ... більше", додають до 15 років 3 роки, в той час, як треба від 15 відняти 3 роки. Суть цієї задачі полягає у формуванні в учнів розуміння асиметричної властивості відношення „бути старше", тобто, якщо $a > b$, то $b < a$. Часто намагання учителя довести до свідомості школяра суть цієї асиметричності потребують неабияких методичних зусиль і часу. Як поступити в цьому випадку?

По-перше, слід визначити, чий вік ми повинні обчислити? Альонин.

По-друге, слід з'ясувати, чий вік більший? Танін (про це чітко говориться в умові).

По-третє, (і це ключовий момент) Якщо Танін вік більший, то Алінин – менший, тобто Альонин вік на 3 роки менший. Так здійснюється перехід від „на ... більше" до „на менше". І далі вже здійснюється розв'язання за відомою схемою. Ця ж властивість лежить і в основі розв'язання нерівностей.

У процесі розв'язання рівнянь ключовим моментом є відношення рівності.

Відношення порядку лежить в основі вивчення упорядкованих множин, зокрема, в основі вивчення ряду натуральних чисел. Окрім традиційно вживаного способу показати дітям, що наступне число в натуральному ряді на 1 більше заданого, учням можна запропонувати й ще один, також дуже простий – спосіб парування. Наприклад, слід довести, що $7 = 6 + 1$. Для цього беруть 7, скажімо, червоних фішок і 6 зелених, утворюють з них пари, в результаті чого одна фішка залишається без пари. Отже, 7 на 1 більше, ніж 6. Цей спосіб узгоджується з класичним поясненням відношення „бути більше" ($a > b$, якщо існує таке число $c > 0$, що $a = b + c$).

Відношення еквівалентності лежить в основі переставного, сполучного та розподільного законів додавання і множення.

Особливе значення має транзитивна властивість у порівняльних операціях. Скажімо у відношеннях рівності і нерівності: якщо $a = b$, *а* $b = c$, *то* $a = c$; *якщо* $a > b$, *а* $b > c$, *то* $a > c$; *у відношенні подільності: якщо* $a \vdots b$, *а* $b \vdots c$, *то* $a \vdots c$. *(символ* $\vdots$ *відповідає слову ділиться).*

Отже, знання зазначених елементів теорії відношень надає можливість учителю винайти найбільш раціональні шляхи до засвоєння учнями навчального матеріалу з розділів математики, у яких відношення відіграють ключову роль.

РОЗДІЛ ІІ. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ. ПОНЯТТЯ. СУДЖЕННЯ

Поняття.

Загальнофілософське визначення терміну поняття формулюється так: *Поняття – це форма мислення, яка відображає істотні властивості, зв'язки і відношення предметів і явищ.*

З логічних позицій – це *думка*, *у якій узагальнюються та виділяються предмети певного класу за певними загальними та специфічними для них ознаками.* Кодовою формою поняття є *слово*.

За змістом поняття поділяють на класи – філософські поняття, математичні, фізичні, історичні та ін. За предметом нашого розгляду інтерес для нас становлять *математичні поняття.*

Скласти поняття про об'єкт – це означає вміти відрізнити його від інших подібних до нього об'єктів. Математичні поняття мають ряд особливостей. Головна полягає в тому, що математичні об'єкти, про які необхідно скласти поняття, в реальності не існує. Математичні об'єкти створені розумом людини. Це ідеальні об'єкти, що відображають реальні предмети або явища. Наприклад, в геометрії вивчають форму і розміри предметів, не беручи до уваги інші їх властивості: колір, масу, твердість і ін. Від усього цього відволікаються, абстрагуються. Результатом абстрагування є і такі математичні поняття, як «число» і «величина».

Будь-який математичний об'єкт має певні властивості. Наприклад, квадрат має чотири сторони, чотири прямих кута, рівні діагоналі. Можна вказати й інші його властивості.

Серед властивостей об'єкта розрізняють істотні і несуттєві. Властивість вважають істотною для об'єкта, якщо вона притаманна цьому об'єкту і без неї він не може існувати. Наприклад, для квадрата істотними є всі властивості, названі вище. Несуттєвим для поняття квадрата ABCD може бути властивість «сторона AD розташована горизонтально».

Обсяг поняття – це множина всіх об'єктів, що позначаються одним терміном.

Будь-яке поняття має не тільки обсяг, але й зміст. Зміст поняття – це множина всіх істотних властивостей об'єкта, відображених в цьому понятті. Між обсягом поняття і його змістом існує взаємозв'язок: якщо збільшується обсяг поняття, то зменшується його зміст, і навпаки. Так, наприклад, обсяг поняття «квадрат» є частиною обсягу поняття «прямокутник», а в змісті поняття «квадрат» міститься більше властивостей, ніж в змісті поняття «прямокутник» («всі сторони рівні», «діагоналі взаємно перпендикулярні» та ін.).

Поняття, що вивчаються в початковому курсі математики, зазвичай представляють у вигляді чотирьох груп. В першу включаються поняття, пов'язані з числами і операціями над ними: число, додавання, доданок, більше, менше та ін. До другої групи входять алгебраїчні поняття: вираз, рівність, рівняння, змінна, корінь та ін. Третю складають геометричні поняття: пряма, відрізок, трикутник, коло і т. д. Четверту групу утворюють поняття, пов'язані з величинами та їх вимірюванням (довжина, площа, об’єм, маса, час, швидкість та ін.

Поняття виконують в науці функцію опису. Опис об’єкта або явища являє собою одне або групу речень, у яких розкривається його сутність і як об’єкта, і як поняття.

Опис одним реченням утворює так звану згорнуту форму розкриття сутності об’єкта. Опис групою речень – розгорнуту.

Згорнута форма представляється у вигляді *означення,* побудова якого здійснюється за допомогою строгого правила. Розгорнута форма не потребує чіткого означення.

Означення бувають різних видів: через найближчий рід і видову відмінність, генетичні, семантичні, контекстуальні, синтаксичні та ін. Природничо-математичні науки, зокрема, математика, фізика, інформатика належать до категорії точних наук із високим рівнем абстрагування й формалізації. У формалізованих науках описи, як правило, чіткі, лаконічні, без зайвих прикрас, у них відбиваються лише істотні ознаки. Вони мають згорнуту форму. У цих науках превалюють два види означень: через найближчий рід і видову відмінність і генетичні. Щодо гуманітарних дисциплін, то в них превалюють розгорнуті означення, за винятком, можливо, мови, у якій також є багато згорнутих означень, але, скажімо, генетичних означень практично немає.

Описати об’єкт – значить дати відповідь на запитання: «Що це таке?». Відповісти на це запитання – значить виділити ті характерні риси, які притаманні лише цьому об’єктові і які дають нам змогу пізнавати об’єкт. Ці елементи називаються ознаками. У структурі означення через найближчий рід і видову відмінність вони дозволяють віднести об’єкт пізнання до певного роду об’єктів (множини об’єктів одного об’єму) і виділити його серед інших об’єктів цього роду, тобто визначити його вид. Залежно від цього ознаки поділяються на ознаки схожості (родові) й ознаки відмінності (видові).

У множині ознак об’єкта виділяються ознаки істотні та неістотні. Виділити істотні ознаки для визначення поняття – дуже важливий елемент пізнання. Істотність визначається необхідністю. Тобто залежно від мети опису дослідник (учень) повинен визначити в множині ознак схожості й відмінності такі, які є необхідними для розуміння суті об'єкта, і такі, які на сутність не впливають.

Отже, щоб описати об'єкт, треба шляхом аналізу визначити рід об'єкту, виділити істотні ознаки схожості (родові) й відмінності (видові) і сформулювати висновок (означення).

Означення через найближчий рід і видову відмінність. Означення цього виду складається з трьох частин (покажемо на прикладі означення прямокутника):

1) пояснювальна чистина (понятійна), у якій визначається назва об'єкту (наприклад, «Прямокутником називається...»);

2) родова частина, у якій формулюються ознаки схожості, які відносять об'єкт до того чи іншого роду (наприклад, «Прямокутник – це чотирикутник, ...». Найближча родова ознака – «чотирикутник»);

3) видова частина, у якій формулюються ознаки відмінності, які відносять об'єкт до того чи іншого виду, тобто, чим відрізняється цей об'єкт від інших об'єктів даного роду («... у якого всі кути прямі»). Видова ознака – усі кути прямі). Тут слід зазначити, що видових ознак може бути й не одна, а декілька, наприклад, в означенні трапеції: а) дві сторони паралельні; б) інші дві – не паралельні).

Отже, щоб сформулювати означення через найближчий рід і видову відмінність, слід: а) сформулювати назву об'єкта (пояснювальна частина означення), б) сформулювати істотні ознаки схожості об'єкта з об'єктами даного роду (найближчу родову ознаку), в) сформулювати істотні ознаки відмінності цього об'єкта від інших об'єктів цього роду (видові ознаки). Сформулювати речення, яке пов'язує зазначені ознаки (означення). При цьому родова і видова частини поєднуються, як правило, сполучним словом „який", „яка", „яке", „в якому", „у якого" та ін. У нашому прикладі це виглядає так: «Прямокутник – це чотирикутник, у якого всі кути прямі».

Цей вид означення відомий був ще за часів Аристотеля. Наука ним давно користується, але, як показали численні дослідження, учні його не знають і формулювати (а значить і описувати) об'єкт не вміють.

Генетичні означення – це такі, в яких указується спосіб побудови об'єкта. Схема формулювання генетичного означення така: 1) спочатку формулюється загальна ознака, яка відносить об'єкт, що визначається, до того чи іншого роду, а потім 2) формулюється спосіб утворення даного об'єкту. Наприклад, «Діагональ квадрата – це відрізок, який з'єднує його дві несусідні вершини».

У навчальній роботі дуже важливо ознайомити учнів із різними видами означень, навчити виокремлювати, які означення належать до якого виду й озброїти їх знаннями їх виводу й формулювання.

На перших етапах навчання цієї операції в учнів можуть виникнути певні труднощі у визначенні виду означення. Щоб подолати ці труднощі, слід звернути увагу школярів на те, що генетичним означенням описуються об'єкти, які в множині даного роду не мають інших об'єктів такого виду, наприклад, бісектриса – це тільки атрибут кутів. Тобто, немає в множині об'єктів даного роду таких, із якими можна було б порівнювати об'єкт, який визначається.

Тут слід зауважити, що для оволодіння технікою визначення виду означення вагому роль відіграє практика й досвід, які досягаються розв'язанням великої кількості спеціальних практичних вправ.

Важливим кроком в описі понять є визначення найближчого роду, до якого належить поняття. Це доволі складна процедура. Але тим не менш, вона в природничо-математичних науках більш логічно досяжна, ніж у гуманітарних.

Щоб доповнити картину опису понять, слід зазначити й факт, коли одне й те ж поняття визначається різними означеннями, тобто описується різними реченнями. Наприклад, квадрат можна визначити чотирма означеннями:

а) квадрат – це прямокутник, у якого усі сторони рівні;

б) квадрат – це ромб, у якого усі кути прямі;

в) квадрат – це прямокутник, у якого діагоналі взаємно перпендикулярні;

г) квадрат – це паралелограм, у якого всі сторони рівні, а кути прямі.

У таких випадках говорять, що усі означення є рівнозначними, але спочатку таку рівнозначність слід довести.

Порівняно з природничо-математичними науками, у гуманітарних превалюють розгорнуті означення. Їх характерною особливістю є певна довільність у представленні в означенні ознак схожості та відмінності. Вони не є суворо впорядкованими, як це представляється в природничо-математичних науках. Часто означення може залежати від мети опису, тому одне й те саме поняття може визначатися по-різному. Наприклад, таке поняття, як «Герой». Значення його в різних ситуаціях може бути різним. Суть його може залежати від різних поглядів й уподобань. У словнику С. Ожегова це поняття має декілька визначень: 1. Видатна своєю хоробрістю людина. 2. Головна діюча особа у літературному творі. 3. Особа, яка втілює в собі характерні риси епохи. 4. Особа, яка привертає до себе увагу. Можна додати й ще: визначна людина. визначний населений пункт. Можливі й інші визначення. Тобто розгорнуті означення можуть мати багатозначність, тоді як у природничо-математичних науках така багатозначність відсутня.

У початкових класах діти вже знайомляться з першими науковими поняттями, представленими в навчальних предметах. Але оскільки визначення понять вимагає виконання таких розумових операцій, як аналіз і синтез, то учні вже змушені входити у світ абстракцій. Оскільки ж рівень абстрактного мислення в молодших школярів ще не високий, то й опис понять, представлених у навчальних предметах, носить спрощений характер, іноді навіть на рівні «Подивіться на це... Воно називається ...». Наприклад, учитель креслить на дошці ламану лінію й говорить: «Подивіться на цю лінію. Така лінія називається ламаною лінією».

У середній ланці освіти з набуттям певної бази знань, пізнавального досвіду, розвитком абстрактного мислення зміст і методи опису теж ускладнюється, все ближче наближаючись до свого реального стану. Розширюється круг навчальних дисциплін, а з ним і нові форми означень.

Щодо інших видів означень (синтаксичні, семантичні, контекстуальні), то вони характерні для мовних описів, коли певний термін має багатозначність.

З аналізу структури опису понять можна виділити систему дій, які треба виконати, щоб описати поняття, безвідносно до виду формулювання.

Першим кроком в дослідженні об'єкта пізнання є його спостереження. У процесі спостереження учень (дослідник) визначає множину об'єктів, елементом якої є об'єкт, що вивчається. Цей крок дозволяє сформулювати пояснювальну частину означення. До того ж він утворює основу для подальшого кроку в системі дій.

Наступний, другий крок – порівняння об'єкта з іншими об'єктами даної множини та на його основі пошук і знаходження ознак об'єкта, тобто тих показників, за якими можна виділяти цей об'єкт з множини інших об'єктів.

Третій крок – виокремлення серед виділених ознак родових і видових, тобто ознак схожості й відмінності.

Наступний, четвертий крок – виділення серед обох видів ознак головних, істотних.

І останній, п'ятий крок – формулювання означення (згорнутого або розгорнутого).

Виконання цих дій вимагає певних розумових операцій, які передбачають наявність певного логіко-пізнавального інструментарію, тобто логічних засобів, необхідних для виконання процедури опису. Змістом такого логічного інструментарію для процедури опису є: порівняння, ознаки схожості й відмінності, ознаки істотні й неістотні, необхідні й достатні, способи визначення виду означення, правило формулювання означення, логічні уміння й навички оперування даними логічними поняттями, операціями, правилами.

Із наведеного аналізу випливає технологія навчання учнів описувати поняття:

по-перше, це ознайомлення учнів з сутністю поняття, його функцією та структурою;

по-друге, ознайомлення учнів з системою дій, які слід виконати з об’єктом, що відповідає даному поняттю, для проникнення в його сутність, тобто опис;

по-третє, це ознайомлення учнів з логічними засобами виконання цієї системи дій;

по-четверте, за допомогою системи спеціальних вправ вироблення в учнів уміння виконувати визначені дії за допомогою зазначеного логічного інструментарію. Як правило, для цього етапу достатньо 2–3 уроки. Надалі ці вміння закріплюються внаслідок поточної навчальної роботи з вивчення програмного матеріалу.

Вправи

1. За якими ознаками класифікують наступні об’єкти (можливі різні класифікації):

а) міський громадський транспорт;

б) військовослужбовців однієї військової частини;

в) потяги на залізниці;

г) спортсменів;

д) учнів школи;

е) кути (в геометрії);

ж) житлові будинки;

з) студентів у ВНЗ;

і) автомобілі?

2. За якими ознаками можна класифікувати учителів школи?

3. Виділити родові та видові ознаки в означення: „Правильним многогранником називається многогранник, у якого всі грані є рівними правильними багатокутниками, а всі багатогранні кути мають однакову кількість граней”.

Математичні речення.

Вивчаючи реальні процеси, математика описує їх, використовуючи як природну словесну мову, так і символічну. А щоб математичні висновки були достовірними, вони повинні бути істинними. Визначення істинності чи хибності математичних висновків здійснюється шляхом логічного міркування, тобто системи суджень. Судження у процесі міркування здійснюються у формі речень, які висловлюються усно або письмово як у мовній формі, так і в символічній. Речення, які визначають істинність судження носять форму твердження. Ці речення не можуть бути питальними, окличними або розповідними. Тому в математичний логіці такі речення не розглядаються. У логіці такі твердження мають назву *висловлення*.

Висловленням називається твердження, відносно якого можна визначитись, істинне воно чи хибне.

Висловлення, представлене простим реченням, називається елементарним і позначається малою буквою латинського алфавіту: *a, b, c,…* Наприклад, „Україна має вихід до моря”, або „Влітку річки покриваються кригою”. Висловлення, представлене складним реченням, називається складеним і позначається великою буквою латинського алфавіту: *A, B, C,…* Наприклад, *A*: „Водій натиснув на гальма і машина зупинилася”, або *B*: „Число 24 ділиться на 3 і на 7”.

Два складених висловлення, які одночасно істинні або одночасно хибні незалежно від смислу речень, називаються *еквівалентними*.

Якщо складене висловлення завжди істинне незалежно від значень елементарних висловлень, з яких воно складається, то воно називається *тотожньо істинним.* Тотожньо істинні твердження мають статус *закону*.

Операції алгебри висловлень

Розглянемо два простих висловлення: *A*: „Учень грає на роялі” і *B*: „Учень розв’язує задачу”. Складемо два складених речення: 1) „Учень грає на роялі і розв’язує задачу”; 2) „Учень грає на роялі або розв’язує задачу”. Ці два речення відрізняються лише сполучником. У першому випадку сполучник *і* зазначає, що ці дві дії учень виконує одночасно, що в реальності неможливо, а в другому – сполучник *або* зазначає, що учень виконує одну з двох операцій, що цілком можливо. Отже, використання того чи іншого сполучника змінює смисл і навіть значення істинності складеного речення. Таким чином, як можна зазначити, між значенням сполучення між простими реченнями і значенням смислу цілого складеного речення існує функціональна залежність. У цьому разі процедура поєднання простих речень у складене називається мовною операцією. А з позицій логіки, оскільки зазначені речення є висловленнями, ця процедура називається логічною операцією. Висловлення, логічні операції над ними, закони і властивості логічних операцій утворюють зміст розділу логіки – *алгебри висловлень.*

Операція заперечення. Нехай задано висловлення A: „Річка Дніпро впадає у Чорне море". Тоді речення $\overline{A}$: „Річка Дніпро не впадає у Чорне море" буде запереченням попереднього речення. Отже, *запереченням висловлення А називається висловлення* $\overline{A}$, *яке протилежне за змістом висловленню А.* Заперечення $\overline{A}$ читається: „не A". Аналізуючи зазначенні речення з позицій істинності, відмічаємо, що речення A – істинне, а його заперечення $\overline{A}$ – хибне.

Усе, вище висловлене, фіксується спеціальною таблицею, яка називається *таблицею істинності*, де $\overline{A}$ і A – назви операцій, І – істинне значення, Х – хибне.

A	$\overline{A}$
І	Х
Х	І

Операція диз'юнкція. Нехай задані висловлення A і B. *Диз'юнкцією висловлень* A і B *називається логічна операція, яка приймає хибне значення лише тоді, коли обидва висловлення будуть хибними. В усіх інших випадках диз'юнкція істинна.* Диз'юнкція позначається символом $\vee$, який відповідає у мові сполучнику „або". Записується $A \vee B$. Читається: „A або B". Розглянемо приклад: нехай задані висловлення: A: „Число 16 ділиться на 4" і B: „Число 16 ділиться на 5". Тоді диз'юнкція цих двох висловлень читається: „Число 16 ділиться на 4 або число 16 ділиться на 5". У скороченій формі – „Число 16 ділиться на 4 або на 5". Це твердження буде за означенням істинним, оскільки перше з них істинне. Отже, таблиця істинності диз'юнкції буде мати такий вигляд:

A	B	$A \vee B$
І	І	І
І	Х	І
Х	І	І
Х	Х	Х

Операція *диз'юнкція* комутативна: $A \vee B = B \vee A$ і асоціативна, тобто $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$.

Операція кон'юнкція. *Кон'юнкцією висловлень* A і B *називається логічна операція, яка приймає істинне значення лише тоді, коли обидва висловлення будуть істинними. В усіх інших випадках диз'юнкція хибна.* Кон'юнкція позначається символом $\wedge$, який відповідає у мові сполучнику

„і”. Записується $A \wedge B$. Читається: „*A* і *B*”. Кон’юнкція означає, що події, означені висловленнями, відбуваються одночасно. Розглянемо той же приклад: нехай задані висловлення *A*: „Число 16 ділиться на 4” і *B*: „Число 16 ділиться на 5”. Тоді кон’юнкція цих двох висловлень читається: „Число 16 ділиться на 4 і число 16 ділиться на 5”. У скороченій формі – „Число 16 ділиться на 4 і на 5”. Це твердження буде за означенням хибним, оскільки перше з них істинне, а друге хибним. Інший приклад – *A*: „Число 15 ділиться на 3” і *B*: „Число 15 ділиться на 5”. Твердження істинне, оскільки обидва висловлення істинні.

Отже, таблиця істинності кон’юнкції буде мати такий вигляд:

A	B	$A \wedge B$
І	І	І
І	Х	Х
Х	І	Х
Х	Х	Х

Операція *кон’юнкція* комутативна: $A \wedge B = B \wedge A$,

асоціативна $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ і

дистрибутивна $(A \vee B) \wedge C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ *і*

$$(A \wedge B) \vee C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C).$$

Операція імплікація. *Імплікацією двох висловлень А* і *В називається логічна операція, яка приймає хибне значення лише тоді, коли перше висловлення (умова) буде істинним, а друге (наслідок) – хибним. В усіх інших випадках диз’юнкція істинна.* Імплікація позначається символом $\Rightarrow$, який відповідає у мові логічній схемі „Якщо..., то...” тобто визначає причинно-наслідковий зв’язок. Записується: $A \Rightarrow B$. Читається: „Якщо *A,* то *B*”. Наприклад, *A:* „У добутку двох чисел один співмножник дорівнює нулю”. *B*: ”Добуток двох чисел дорівнює нулю”. Тоді імплікація цих висловлень має такий вигляд: „Якщо у добутку двох чисел один співмножник дорівнює нулю, то їх добуток дорівнює нулю”. Твердження істинне, оскільки обидва висловлення істинні.

Отже, таблиця істинності імплікації за означенням має такий вигляд:

A	B	$A \Rightarrow B$
І	І	І
І	Х	Х
Х	І	І
Х	Х	І

Для розуміння четвертого висновку можна зазначити таке: „З хибного випливає хибне, і це істинно”. Наприклад, А: ”Число 20 ділиться на 3”, В: „Число 20 ділиться на 7”. „Якщо число 20 ділиться на 3, то число 20 ділиться на 7”. І це істинно.

Операція еквіваленція. *Еквіваленцією двох висловлень A і B називається логічна операція, яка приймає істинне значення в разі, коли обидва елементарні висловлення одночасно істинні або хибні, і хибне значення – коли одне з них буде істинним, а інше – хибним.* Еквіалнція позначається символом $\Leftrightarrow$, який відповідає у мові логічній схемі „... тоді і тільки тоді, коли...”, або „... у тому і тільки в тому випадку, коли...”, тобто визначає взаємнозворотний причинно-наслідковий зв’язок. Наприклад, „Точка, яка розташована в середині кута, знаходиться на однаковій відстані від його сторін тоді і тільки тоді, коли вона лежить на бісектрисі цього кута”. Пряме наслідування: „Якщо точка знаходиться на однаковій відстані від сторін кута, то вона лежить на бісектрисі цього кута”. Зворотне наслідування: „Якщо точка лежить на бісектрисі кута, то вона знаходиться на однаковій відстані від його сторін”. Записується: $A \Leftrightarrow B$. Читається: „*A,* тоді і тільки тоді, коли *B*”. Твердження істинне, оскільки обидва висловлення істинні.

Отже, таблиця істинності еквіваленції за означенням має такий вигляд:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
І	І	І
І	Х	Х
Х	І	І
Х	Х	І

У математичній логіці визначено такий порядок дій: перша дія – кон’юнкція, наступна – диз’юнкція, наступна – імплікація, остання у ланцюгу – еквіваленція. Якщо у формулі є дужки, то дія в дужках виконується в першу чергу. Операція заперечення елементарного висловлення здійснюється безпосередньо перед операцією з цим висловленням. Заперечення групи висловлень виконується за правилом дужок.

Вправи:

Визначити істинність висловлення, представленого у вигляді логічної формули:

A: $a \wedge (b \vee c) \Rightarrow (c \wedge \overline{a}) \Leftrightarrow (\overline{a \vee b})$.   Оскільки еквіваленція є останньою операцією, то вона, фактично, ділить формулу на дві частини. Для

спрощення запису позначимо праву частину до знака ⇔ буквою *M,* а після нього – буквою *N*.
Для визначення істинності зазначеної формули складемо спеціальну таблицю, яка має назву *таблиця істинності.*

Розпишемо формулу за порядком дій, також випишемо всі варіанти значень елементарних висловлень *a*, *b* і *c*, виберемо для розв'язання один з них, наприклад, другий і виконаємо зазначені операції.

a	b	c	$b\vee c$	$a\wedge(b\vee c)$	$\overline{a}$	$c\wedge\overline{a}$	M: $a\wedge(b\vee c)\Rightarrow c\wedge\overline{a}$	$a\vee b$	N: $\overline{a\vee b}$	$M\Leftrightarrow N$
І	І	І								
І	І	Х	І	І	Х	Х	Х	І	Х	І
І	Х	Х								
І	Х	І								
Х	Х	І								
Х	І	І								
Х	І	Х								
Х	Х	Х								

Отже, у випадку, коли висловлення *a* і *b* істинні, а висловлення *c* хибне, зазначена формула приймає істинне значення. Причому, зміст висловлень значення не має.

Пропонуємо інші варіанти читачу розв'язати самому.

ЛОГІКА МАТЕМАТИЧНИХ СУДЖЕНЬ

Закони обчислення висловлень.

Закон суперечності. *Будь-яке висловлення* ***a*** *не може бути одночасно істинним і хибним.* Тобто $\overline{\boldsymbol{a} \wedge \overline{\boldsymbol{a}}} = 1$**.** Наприклад, твердження 5 > 3 є істинним, отже воно не може бути хибним. Це випливає і зі змісту операції кон'юнкції (з таблиці): якщо ***a*** істинне, то $\overline{\boldsymbol{a}}$ – хибне, а значить і $\boldsymbol{a} \wedge \overline{\boldsymbol{a}}$ – хибне, тоді його заперечення $\overline{\boldsymbol{a} \wedge \overline{\boldsymbol{a}}}$ буде істинним.

Закон виключення третього. *Будь-яке висловлення* ***a*** *може бути істинним або хибним і третього не дано.* Тобто $\boldsymbol{a} \vee \overline{\boldsymbol{a}} = 1$. Наприклад, твердження „Натуральне число ***a*** може бути парним або непарним і третього не дано", тобто, якщо істинним буде „число ***a*** – парне", то хибним буде

„число $\boldsymbol{a}$ – непарне”, отже диз’юнкція істинна. Якщо ж навпаки, то матимемо той же результат.

Закон відокремлення. *Якщо висловлення* ***a*** *істинне і з нього випливає висловлення* ***b****, то і твердження* ***b*** *істинне, тобто* $\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{a} \Rightarrow \boldsymbol{b}) \Rightarrow \boldsymbol{b}$. Наприклад, висловлення $\boldsymbol{a}$: „Фігура $\boldsymbol{P}$ є квадрат” істинне і висловлення $\boldsymbol{b}$: „Будь-який квадрат є прямокутник” теж істинне, то твердження „Фігура **Р** – прямокутник” теж буде істинне. У мовній формі це звучить так: „Якщо фігура ***Р*** *–* *квадрат, а квадрат є прямокутник, то фігура Р – прямокутник”.*

Закон сіллогізму. *Якщо висловлення* $a \Rightarrow b$ *істинне і висловлення* $b \Rightarrow c$ *теж істинне, то висловлення* $a \Rightarrow c$ *теж буде істинне.* Тобто,

$(\boldsymbol{a} \Rightarrow \boldsymbol{b}) \wedge (\boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{c}) \Rightarrow (\boldsymbol{a} \Rightarrow \boldsymbol{c})$. Наприклад, нехай задані три висловлення: $\boldsymbol{a}$: „Число a дорівнює 48”, $\boldsymbol{b}$: „Число b дорівнює 30”, $\boldsymbol{c}$: „Число c дорівнює 15”, тоді висловлення „48 > 30” – істинне, висловлення „30 > 15” теж істинне, а значить і висловлення „48 > 15” теж буде істинним.

Математичне доведення

Більшу частину знань про навколишню дійсність ми отримуємо за допомогою міркувань. Висновки в них будуть істинними, якщо вони є результатами висновків, побудованих за правилами логіки.

Умовивід – це спосіб отримання нового знання на основі деякого наявного знання. При цьому ми не звертаємося до дослідження предметів і явищ самої дійсності, а відкриваємо такі зв'язки і відносини між ними, які неможливо побачити безпосередньо.

Умовивід складається з посилки і висновку.

Посилка – це висловлення, що містить вихідне знання.

Висновок – це висловлення, що містить нове знання (підсумок), отримане з початкового. В умовиводах з посилок виводиться висновок. Наприклад, розглянемо твердження: „Якщо число 12 ділиться на 2 і на 3, то воно ділиться на 6”. Перше речення „Число 12 ділиться на 2” і друге речення – „Число 12 ділиться на 3” є посилки, а третє речення „Число 12 ділиться на 6” в цьому умовиводі є висновок.

Умовиводи бувають *дедуктивними* і *індуктивними*.

Дедуктивним називається умовивід, у якому із загального твердження робляться часткові висновки. Наприклад: „Будь-яке число, у якого сума цифр ділиться на 3, саме ділиться на 3”. Це твердження носить узагальнюючий характер, з якого випливають часткові висновки: „У числі 6471 сума цифр 18, вона ділиться на 3, значить і саме число 6471 ділиться на три”. Те ж стосується і числа 237, і числа, скажімо, 81255.

Визначення. *Неповна індукція – це умовивід, на підставі якого з того, що деякі об'єкти класу мають певну властивість, робиться висновок про те, що цю властивість мають усі об'єкти даного класу.* Іншими словами, це *умовивід, при якому на основі декількох часткових фактів робиться узагальнення.* Наприклад: „У закритій коробці 10 куль. Не заглядаючи у неї людина витягає по одній. Перша – біла, друга, третя, четверта, п'ята – білі. Людина робить висновок, що в коробці усі кулі білі”. Чи істинне це твердження? Звичайно, що воно не достовірне, тому вважати, що індуктивний спосіб мислення істинний, не можна.

Взагалі до висновків, отриманим за допомогою неповної індукції, треба ставитися критично, оскільки вони носять характер припущення, гіпотези і потребують подальшої перевірки: їх треба або довести, або спростувати. Незважаючи на те, що неповна індукція не завжди призводить до істинних висновків, роль таких умовиводів в процесі пізнання значна. У випадку циклічних процесів цей спосіб є достовірним. Метод, яким доводиться достовірність циклічних процесів називається *методом математичної індукції.* Наприклад, якщо повний місяць повторився один раз через 28 діб, другий раз – через 28 діб, знов і знов, скажімо 5 разів, то можна з достовірністю стверджувати, що це повториться і в шостий, і в сьомий раз, і завжди. Аналогічне явище спостерігається, якщо числовий ряд будується за певним законом, наприклад, 3, 7, 11, 15, 19 ..., тобто за законом $a_n = a_{n-1} + 4$, починаючи з другого. Тобто, наступне число буде 23.

Існує й третій спосіб міркування – *за аналогією.* Слово „аналогія” в перекладі з грецького означає „відповідність, схожість”. Взагалі, під аналогією розуміють умовивід, в якому на підставі подібності двох об'єктів в деяких ознаках і при наявності додаткової ознаки у одного з них робиться висновок про наявність такої ж ознаки у іншого об'єкта. Зауважимо, що в цьому описі суті поняття „аналогія” термін „об'єкт” використовується в широкому сенсі: ним може бути реальний предмет, модель, малюнок, числовий або буквений вираз, завдання і т.д. В якості ознак можуть виступати властивості об'єктів, відносини між ними, способи діяльності і т.д.

Аналогія допомагає відкривати нові знання, способи діяльності або використовувати засвоєні способи діяльності в змінених умовах. Висновок за аналогією носить характер припущення, гіпотези і тому потребує або доведення, або спростування. Наприклад, учень встановив, що число ділиться на 6, якщо воно ділиться на 2 і на 3. Потім, діючи за аналогією, зробив висновок: „Число a ділиться на 8, якщо воно ділиться на 2 і на 4”.

Щоб переконатися в помилковості отриманого висновку, досить привести контрприклад: число 12 ділиться на 2 і на 4, але не ділиться на 8.

Широко використовується аналогія в навчанні математики молодших школярів. Наприклад, якщо при вивченні класів встановлено, що в класі одиниць три розряди – одиниці, десятки, сотні, а в класі тисяч також три розряди – одиниці тисяч, десятки тисяч, сотні тисяч, то висновок про кількість розрядів в класі мільйонів і їх назви діти можуть зробити самостійно, за аналогією.

Аналогія може бути використана для встановлення відношень між, скажімо, числовими виразами. Наприклад, учні встановили, що $4\cdot(3 + 7) > 4\cdot 3 + 4\cdot 6$, оскільки $4\cdot(3 + 7) = 4\cdot 3 + 4\cdot 7$, а $4\cdot 7 > 4\cdot 6$. Розглядаючи потім вирази $3\cdot(8 + 9)$ та $3\cdot 8 + 3\cdot 7$, учні можуть за аналогією зробити висновок про те, що $3\cdot(8 + 9) > 3\cdot 8 + 3\cdot 7$. Перевірити його правильність можна або шляхом міркувань, аналогічних тим, що проводилися при виконанні першого завдання, або за допомогою обчислень.

Аналогія може бути використана і для висновків про спосіб дії на основі вивчення іншого способу. Так, після розгляду способу множення двозначного числа на однозначне на прикладі множення 27 на 3 [$27\cdot 3 = (20 + 7)\cdot 3 = 20\cdot 3 + 7\cdot 3 = 81$] дітям пропонується помножити 721 на 4. Діючи за аналогією, вони встановлюють, що

$712\cdot 4 = (700 + 10 + 2)\cdot 4 = 2800 + 40 + 8 = 2848.$

Далі за аналогією встановлюють, як помножити 6288 на 3 та ін.

Наступним кроком може бути узагальнення, тобто отримання правила множення багатозначного числа на однозначне, тобто використання неповної індукції [14].

Вправи

1. Поясніть, чому наведені нижче висловлювання вважають істинними:

а) $7> 5$;

б) $7 + 3 > 7 + 1$;

в) $(6 – 4) : 2 = (6 : 2) – 4 : 2$.

в) $(4 + 6) : 2 = 4 : 2 + 6 : 2$;

Сформулюйте правила, якими ви скористалися.

2. Відомо, що якщо в трикутнику кути при основі рівні, то він – рівнобічний. Чи випливає з цього, що:

а) трикутник з двома кутами по 40° – рівнобічний;

б) трикутник з двома сторонами по 4 см – рівнобічний?

3. Задані два твердження: А(x): „Число x парне” і В(x): „Запис числа x закінчується цифрою 4”. Чи знаходяться вони у відношенні наслідування?

4. Відомо, що запис числа закінчується цифрою 8. Чи слідує з цього, що дане число ділиться: а) на 2; б) на 4?

5. У чотирикутнику ABCD діагоналі рівні і в точці перетину діляться навпіл. Чи вірно, що ABCD: а) ромб; б) квадрат; в) прямокутник?

6. У чотирикутнику ABCD всі сторони рівні. Чи достатньо цього для того, щоб стверджувати, що ABCD: а) квадрат; б) ромб?

7. У чотирикутнику ABCD два кута прямі. Чи достатньо цього для того, щоб стверджувати, що ABCD – прямокутник?

8. Висловіть припущення, розглянувши кілька окремих випадків:

а) Якщо до однозначного числа приписали таку ж цифру. У скільки разів збільшилася кількість?

б) Є два числа, жодне з яких не ділиться на 3. Чи може (і за якої умови) сума цих чисел розділитися на 3?

в) Чи вірно, що квадрат парного числа є число, кратне 4?

9. Порівняйте значення виразів $(a + 6)\ (7 – a)$ і $a(a – 1)$, якщо a дорівнює 3; 0; 2.

Чи вірно, що при будь-якому цілому a значення першого виразу більше, ніж другого?

11. Задані вірні рівності: 74 – 47 = 27; 52 – 25 = 27; 63 – 36 = 27. Чи вірно, що різниця будь-якого двозначного числа і числа, записаного тими ж цифрами, але в зворотному порядку, дорівнює 27?

Способи математичних доведень

Математична логіка розглядає декілька методів доведення, найбільш уживаними з яких у школі можна назвати: синтетичний, аналітичний, метод від супротивного, метод повної індукції, метод дедуктивних доведень, метод математичної індукції та інші. Застосування методів пов’язане зі способами міркування: дедукцією та індукцією. Певну пропедевтичну роботу в цьому напрямку слід починати вже з початкових класів. Зміст цих методів полягає в наступному.

Синтетичний метод. Це метод, у якому міркування здійснюється від умови й уже відомих тверджень до твердження, яке доводиться.

Наприклад, доведення розподільної властивості додавання.

Умова: обчислити суму й добуток заданих чисел у їх операційному зв’язку .

Відомі твердження: правило виконання порядку дій у виразі зі скобками, порядок виконання дій різного ступеня.

Твердження, яке доводиться: зв’язок добутку одного числа з сумою двох інших та суми добутків першого з них з двома іншими.

Аналітичний метод. Метод доведення, при якому міркування рухається від твердження, яке доводиться, до відомих тверджень, від тези до аргументів, називають аналітичним. Логічна основа аналітичного методу така сама, як і синтетичного: з істинного твердження завжди випливає істинний наслідок (логічний закон відокремлення).

Умова: визначення зв'язку між суми добутків одного числа з двома іншими

Відоме твердження: порядок дій у виразі зі скобками.

Твердження, яке доводиться: зв'язок між сумою добутків одного числа з двома іншими з добутком суми двох чисел на третє.

Хід доведення: виконання дій обох виразів і порівняння результатів.

Метод доведення від супротивного. Для супротивних тверджень використовується логічний закон виключення третього. Отже, замість безпосереднього доведення даного твердження можна показати, що супротивне йому твердження неправильне. Наприклад, твердження про неможливість ділення на число нуль. Доведення будується на припущенні, що таке ділення можливе. Із цього випливає, що результатом множення числа нуль на число не рівне нулю може бути число, не рівне нулю, що є хибним, тобто не існує такого числа, яке будучи помножене на нуль дасть не нуль.

Метод повної індукції. Повною індукцією називається висновок, який ґрунтується на розгляді всіх окремих фактів, що стосуються даної ситуації. Якщо число цих фактів скінчене й усі вони розглянуті, то висновок, зроблений на основі повної індукції, вважається обґрунтованим. Наприклад, доведення, твердження, що добуток трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 3.

Д а н о: a – натуральне число.

Д о в е с т и: $a(a+1)(a+2)$ ділиться на 3.

Твердження: Добуток трьох послідовних чисел завжди буде ділиться на 3.

При $a = 1$ на 3 ділиться число $(a+2)$, при $a = 2$ на 3 ділиться число $(a+1)$.

Якщо ж a дорівнює 3 або більше, ніж 3, то $a = 3 \cdot k + x$, де число x (остача) може приймати значення 0, 1 або 2. Добуток $a \cdot (a + 1) \cdot (a+2)$ можна записати так: $(3 \cdot k + x) \cdot (3 \cdot k + x + 1) \cdot (3 \cdot k + x + 2)$. Розглянемо всі можливі випадки. При $x=0$ на 3 ділиться перший множник, при $x=1$ ділиться третій множник і при $x=2$ ділиться другий множник. Інших випадків бути не може. Отже, яким би не було число a, один із множників добутку $a \cdot (a + 1) \cdot (a + 2)$ ділиться на 3. Звідси й сам добуток ділиться на 3. Що й треба було довести.

Повну індукцію ще називають досконалою індукцією, оскільки, на відміну від неповної індукції, вона дає завжди правильні висновки.

Метод дедуктивних доведень. Це метод, за допомогою якого певне часткове твердження випливає із загального твердження. Наприклад, „Усі числа, що закінчуються нулем, діляться на 5”. Значить число 45 ділиться на 5.

Метод математичної індукції. Метод математичної індукції ґрунтується на аксіомі Пеано з означення поняття натурального числа, зміст якої полягає в наступному: «Якщо підмножина A з множини N натуральних чисел містить число 1 і разом із будь-яким натуральним числом a містить наступне за ним число a', то множина A співпадає з усією множиною натуральних чисел N».

Сам метод полягає в такому: якщо якесь твердження виконується для числа 1 і з припущення того, що воно істинне для числа n випливає його істинність для числа $n + 1$, то задане твердження істинне для усього ряду натуральних чисел. Цей метод широко використовується при доведенні багатьох фізичних і математичних циклічних явищ.

Існує й інша класифікація методів доведень: метод обчислень, метод системи логічних суджень, метод графічних побудов, комплексні методи (методи, у яких поєднуються декілька різних методів). Усі вони характерні для старшої школи. У початковій школі доведення здійснюються на конкретному числовому матеріалі, на часткових прикладах. Тут відбувається пропедевтика доведень. В окремих випадках здійснюється знайомство з методом від супротивного. Найбільш повно система доведень входить в практику навчання у старшій школі. Тут вже окрім зазначених використовуються й метод математичної індукції, і метод дедуктивних доведень та інші.

Одним із провідних логічних засобів виконання процедури доведення є порівняння. Воно здійснюється в процесі спостереження за станом і динамікою змін об’єкта або явища, викликаних певними умовами. Суть порівняння тут полягає у наступному: фіксується певний стан об’єкта або явища, потім створюються певні умови й знов фіксується його стан. Потім умови можуть знов змінюватися, і знов фіксується стан. І так певну кількість разів відповідно до змісту завдання й змісту об’єкта. Зафіксовані стани об’єкта порівнюються. Унаслідок порівняння встановлюється, як зміна умови вплинула на стан об’єкта. Так відбувається заглиблення в сутність відношень між умовами існування об’єкта і його станом, тобто вияснення впливу умов на стан об’єкта. Наприклад, у завданнях з логічним навантаженням при розв’язанні задач на перебір розглядається умова вибору першого елемента. Коли кількість варіантів вибору встановлено, умова змінюється й розглядається кількість варіантів вибору другого елемента, а з ним і кількість варіантів вибору пари з першого та другого елементів. Після цього умова знов змінюється, встановлюється кількість варіантів вибору третього елементу, а з ним і кількість варіантів вибору трійок. І так до тих пір, поки не будуть перебрані всі елементи. Таким чином доводиться, що кількість перестановок із n елементів обчислюється за формулою

$$P_n = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1.$$

У природничо-математичних дисциплінах причинно-наслідкові зв'язки виявляються в найбільш чистому вигляді. Формулювання теорем, властивостей, законів найчастіше висловлюються у формі складнопідрядного речення, в якому в чистому вигляді виявляються причинно-наслідкові зв'язки. Форма: „Якщо ..., то...". Перше речення (умова) – причина, друге (висновок) – наслідок. Причина обумовлює наслідок. Часто в певних межах ця причинно-наслідкова форма утворює цілий ланцюг: певна умова щодо якогось об'єкта або явища тягне за собою певний наслідок, а він, у свою чергу, стає причиною нового наслідку. Наприклад, „Якщо фігура є квадрат, то вона є прямокутник"; $\Rightarrow$ «Якщо фігура є прямокутник, то вона є чотирикутник"; $\Rightarrow$ „Якщо фігура є чотирикутник, то вона є многокутник"; „Якщо фігура є многокутник, то вона є замкнена ламана лінія", і т.д.

Разом з тим причина і наслідок можуть мінятися місцями, тобто як умова впливає на наслідок, так і наслідок може впливати на умову. У математиці це проявляється в обернених твердженнях. Наприклад, „Якщо діагоналі чотирикутника рівні і в точці перетину діляться навпіл, то чотирикутник є прямокутник". Водночас „Якщо чотирикутник є прямокутник, то його діагоналі в точці перетину діляться навпіл".

Знання про причинно-наслідкові відношення дають можливість проникати в суть досліджуваного об'єкта, виконують прогностичну функцію, тобто надають можливість передбачати образ майбутнього результату.

Вправи

1. Доведіть, що якщо до добутку двох послідовних натуральних чисел додати більше з них, то вийде квадрат більшого числа.

2. Різниця двох кутів дорівнює 10°. Доведіть, що ці кути не можуть бути вертикальними.

3. Доведіть, що якщо $x^2 + 3x + 1 < 0$, то $x < 0$.

4. Як зміниться сума двох чисел, якщо кожний доданок збільшити в три рази?

5. Яким числом може бути сума двох непарних чисел? Розгляньте кілька окремих випадків і висловіть припущення. Яким чином можна довести його істинність?

6. Дано чотири послідовних непарних числа. Чи вірно, що добуток крайніх чисел менше добутку середніх на 8?

7. Чи вірно, що:

а) різниця квадратів двох послідовних непарних чисел ділиться на 8;

б) добуток двох послідовних парних чисел кратне 8;

в) різниця між квадратом натурального числа, що не ділиться, яке не ділиться на 3, і одиницею ділиться на 3.

8. Покажіть, що обґрунтовуючи розв'язання наступних завдань, молодші школярі можуть використовувати повну індукцію:

а) заданий ряд чисел: 3545, 3550, 3555, 3560, 3565. Чи можна стверджувати, що кожне число цього ряду ділиться на 5?

Предикати

Розглянемо два речення: 1) Число 12 ділиться на 3.

2) Число x ділиться на 3.

Спільне між ними є те, що обидва вони є твердженнями. Різниця ж між ними полягає в тому, що відносно першого твердження ми можемо сказати, що воно істинне (або хибне), оскільки всі дані визначені, а відносно другого – ні, оскільки воно містить невідоме, задане у формі букви. Отже, перше твердження є висловленням, а друге – ні, але воно може перетворитися на висловлення, якщо букву замінити на конкретне число. При цьому при певних значеннях чисел воно буде істинним, а при інших – хибне. Таке твердження не є висловленням – воно називається *висловлювальною формою* або *предикатом*.

Отже, у висловлювальнній формі змінна може приймати будь-яке числове значення, при цьому значення отриманого при цьому висловлення буде приймати лише два значення – істинно або хибно. Таким чином ми засвідчуємо, що між значеннями змінної у висловлювальнній формі і значенням отриманого при цьому висловлення існує функціональна залежність. Виходячи з цього поняття предикату можна висловити так:

Предикатом називається логічна функція, яка визначена на множині будь-яких значень змінної і приймає значення з двохелементної множини $\{$*істинно; хибно*$\}$.

Предикати можуть мати одну, дві і більше змінних. Предикат з однією змінною називається одномісним (як у випадку з нашим прикладом), позначається $P(x)$, з двома – двомісним $P(x,y)$, від трьох – тримісним $P(x, y, z)$, ..., від n змінних – n-місним $P(x_1, x_2,..., x_n)$. Прикладом двомісного предикату можуть бути твердження: „Пряма x перпендикулярна прямій y", „Число x не ділиться на число y". Прикладом тримісного предиката –

„Пряма x перетинає прямі y і z". Смисловий аналіз одномісного предиката свідчить про те, що він виражає якість об'єктів, виражених змінною, а аналіз дво-, три, ..., *n-місного* предикатів – відношення між ними.

Кожному предикату P ставиться у відповідність певна підмножина його області визначення O_p, а саме, множина тих об'єктів які перетворюють предикат в істинне висловлювання. Ця підмножина називається *областю істинності предикату*. Вона позначається I_p. Наприклад, для предиката $P(x)$: „x – парне число" O_p – множина усіх цілих чисел, а I_p. – множина усіх чисел кратних 2.

Виходячи із означення предикату, кожне рівняння є предикат: рівняння з однією змінною – одномісний ($2x + 3 = 15$), з двома – двомісний ($2x + 3y = 18$), і т.д. Розв'язати рівняння – значить в області визначення O_p (множини усіх, скажімо, натуральних чисел) знайти таку множину чисел I_p (6 для першого рівняння і пару (3;4) для другого) при підстановці яких замість змінних, рівняння перетвориться на числову рівність. Аналогічно й для нерівностей.

Між предикатами виконуються ті ж операції, що й з висловленнями. Співпадають і значення цих операцій, зазначених у відповідних таблицях.

Запереченням предиката $P(x_1, x_2,..., x_n)$ називається предикат $\overline{P(x_1, x_2,..., x_n)}$, який виражає твердження, протилежне за значенням предикату $P(x_1, x_2,..., x_n)$. Заперечення здійснюється за допомогою частки *не*, яка ставиться у твердженні перед присудком. Наприклад, $P(x)$: „Число x ділиться на 3". Тоді предикат $\overline{P(x)}$ буде висловлюватись: „Число x не ділиться на 3".

Диз'юнкцією предикатів $P(x_1, x_2,..., x_n)$ і $G(x_1, x_2,..., x_n)$ називається предикат $P(x_1, x_2,..., x_n) \vee G(x_1, x_2,..., x_n)$, область істинності якого є об'єднанням областей істинності предикатів $P(x_1, x_2,..., x_n)$ і $G(x_1, x_2,..., x_n)$, тобто $I_{P(x...) \vee G(x...)} = I_{P(x...)} \cup I_{G(x...)}$.

Кон'юнкцією предикатів $P(x_1, x_2,..., x_n)$ і $G(x_1, x_2,..., x_n)$ називається предикат $P(x_1, x_2,..., x_n) \wedge G(x_1, x_2,..., x_n)$, область істинності якого є перетином областей істинності предикатів $P(x_1, x_2,..., x_n)$ і $G(x_1, x_2,..., x_n)$, тобто $I_{P(x...) \wedge G(x...)} = I_{P(x...)} \cap I_{G(x...)}$.

Імплікацією предикатів $P(x_1, x_2,..., x_n)$ і $G(x_1, x_2,..., x_n)$ називається предикат $P(x_1, x_2,..., x_n) \Rightarrow G(x_1, x_2,..., x_n)$, який приймає хибне значення лише в області, в якій предикат $G(x_1, x_2,..., x_n)$ хибний, а предикат $P(x_1, x_2,..., x_n)$ – істинний.

Еквіваленцією предикатів $P(x_1, x_2,..., x_n)$ і $G(x_1, x_2,..., x_n)$ називається предикат $P(x_1, x_2,..., x_n) \Leftrightarrow G(x_1, x_2,..., x_n)$, який приймає хибне значення лише в області, в якій один з предикатів або $G(x_1, x_2,..., x_n)$, або $P(x_1, x_2,..., x_n)$ – хибний, а інший – істинний.

Приклад. На множині $X = \{5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45\}$задані предикати $A(x)$: „Число x кратне 3” і $B(x)$: „Число x кратне 10”. Який предикат відповідає виразу $A(x) \wedge \overline{B(x)}$? Визначити множину істинності цього предиката.

Розв'язання. Зазначений вираз являє собою кон'юнкцію предикатів $A(x)$ і $\overline{B(x)}$, який має зміст „Число x кратне 3 і не кратне 10”. Такими числами в заданій множині є 15 і 45, тобто множина істинності заданого предиката є множина $I_{P(x)} = \{15; 45\}$.

Квантори

Окрім операцій алгебри висловлень над предикатами існують ще дві логічні операції – *операція узагальнення* і *операція виокремлення*. Справа в тому, що в будь якій множині, починаючи з двохелементної, кожний елемент має свої особисті властивості, які відрізняють його від інших елементів множини. Це надає можливість виділяти різні підмножини з даної множини, причому в цих підмножинах зберігаються основні властивості самої множини. Отже, розглядаючи властивості елементів підмножини, ми стикаємося з питанням приналежності тих властивостей елементів, які притаманні усій множині, і тих, які притаманні саме підмножині. Приналежність властивості до усієї множини виражається словами *„будь-який”, „кожний”, „усі”, „для всіх”*. Наприклад, „Кожний квадрат є прямокутник”. Тобто в множині прямокутників будь-яка фігура має властивості прямокутника (усі кути прямі) і немає такої, яка б його властивостей не мала. В той же час серед усіх прямокутників *існують* дві підмножини – прямокутники, які є квадратами, і прямокутники, які не є квадратами. В цьому разі говорять, що в множині прямокутників *існує* фігура „квадрат”, яка має усі властивості прямокутника (прямі кути, протилежні сторони паралельні, діагоналі в точці перетину діляться навпіл) і в той же час має свої особисті властивості, які відрізняють його від тих прямокутників, які не є квадратом (усі сторони рівні). Ці слова в логіці виконують логічні операції *узагальнення* (*„будь-який”, „кожний”, „усі”, „для всіх”, „завжди”*) і виокремлення (*„існує”*). Вони називаються *кванторами.* Слово з операції узагальнення – *квантор узагальнення,* який позначається значком ($\forall$), з операції виокремлення – *квантор існування,* який позначається значком ($\exists$). За допомогою кванторів легко в символічній формі виражати судження, наприклад, $(\forall a)\ (\exists b)\ (b = a + 1)$. Читається: „Для кожного натурального числа a існує наступне число b, яке на 1 більше a”.

Теореми

Поняття теореми. Будова теорем.

Теорема – це висловлення, істинність якого встановлюється через доведення.

З логічної точки зору теорема – це висловлення виду $A \Rightarrow B$, де A і B – висловлювальні форми з однією або декількома змінними. Речення A називають *умовою* теореми, а речення B – висновком.

Для розгляду структури і видів теорем є потреба розгляду так званих *необхідних* і *достатніх* умов імплікативних тверджень.

Умови називаються *необхідними,* якщо без наявності яких смисл твердження залишається невизначеним, тобто неможливо визначити його істинність. Наприклад, розглянемо твердження: „Щоб фігура була квадратом, необхідно, щоб вона була чотирикутником з рівними сторонами і прямими кутами”. Тобто називаються 3 умови – 1) це повинен бути чотирикутник; 2) сторони його повинні бути рівними; 3) кути його повинні бути прямими. Без наявності хоча б однієї з цих умов вид фігури не може бути визначеним. Отже кожна з цих умов є необхідною і для визначення істинності твердження потрібна їх одночасна наявність.

Умова, яка цілком забезпечує визначення істинності твердження називається *достатньою.* На тому ж прикладі сформулюємо твердження так: „Щоб у фігури сторони були рівними, *достатньо*, щоб ця фігура була квадратом”, тобто наявність зазначеної умови достовірно визначає істинність твердження.

Твердження, у яких умова є і необхідною, і достатньою називаються *еквівалентними.* Наприклад: „Якщо сума цифр числа ділиться на 3, то і само число ділиться на 3”. Необхідна умова для подільності числа на 3 є подільність суми цифр числа. Подільність самого числа є умовою достатньою, тобто для подільності суми цифр числа на 3 достатньо подільності самого числа на 3. Тобто, істинність необхідної умови автоматично передбачає істинність достатньої і навпаки. З цього випливає, що необхідна умова рівнозначна достатній, значить ці два твердження еквівалентні.

Отже, у цьому випадку твердження формулюють так: „Щоб число ділилося на 3, необхідно і достатньо, щоб сума цифр цього числа ділилася на 3”. Логічною формулою, яка відображає еквівалентність зазначених тверджень є *еквіваленція*, тобто $(\forall x \in P)\ (A(x) \Leftrightarrow B(x))$.

Повернемося до теорем.

Нехай задана теорема, записана у предикативній формі:

$$(\forall x \in P)\ (A(x) \Rightarrow B(x)).$$

Відповідно до мовної форми імплікації, її формулювання будується у вигляді умовного складнопідрядного речення: *„Якщо (умови), то (висновок)”.*

Отже, за своєю предикативною будовою теорема складається з трьох частин: 1) пояснювальна частина. У ній визначається круг об'єктів, про які буде йти мова в теоремі; 2) умова, у якій викладені відомі вихідні відомості про ці об'єкти та зв'язки між ними; 3) висновок, у якому викладається наслідок цих зв'язків.

Отже, нехай задана теорема $(\forall x \in P)\ (A(x) \Rightarrow B(x))$. Нехай предикат $A(x)$ являє собою перелік необхідних умов, а $B(x)$ – достатніх. У залежності від змісту і розташування предикатів $A(x)$ і $B(x)$ розглядається чотири види теорем.

1. Пряма теорема. Теорему будемо вважати прямою, якщо $(\forall x \in P)\ (A(x) \Rightarrow B(x))$, тобто її умова складається з необхідних умов твердження, а висновок – з достатніх. Наприклад: „Якщо в чотирикутнику сторони рівні, а кути прямі, то ця фігура – квадрат". З позицій необхідності і достатності умов зазначаємо, що цій теоремі необхідних умов дві: перша – сторони рівні, друга – кути прямі. Без наявності хоча б однієї з них, зробити висновок, що фігура є квадрат, неможливо.

2. Обернена теорема. Якщо у зазначеній теоремі поміняти місцями умову і висновок, тобто висновок стане умовою, а умова висновком, то отримаємо так звану теорему, обернену до даної, тобто $(\forall x \in P)\ (B(x) \Rightarrow A(x))$. На цьому ж прикладі: „Якщо чотирикутник – квадрат, то його сторони рівні, а кути прямі", тобто для кожної з умов щодо рівності сторін або прямих кутів цілком достатньо, щоб фігура була квадратом.

3. Теорема, протилежна прямій. Якщо у теоремі умовою і висновком будуть висловлення, протилежні умовам і висновку прямої теореми, то вона називається „теоремою, протилежною прямій", її запис буде: $(\forall x \in P)\ (\overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)})$. У цьому разі наведена теорема буде формулюватися так: „Якщо в чотирикутнику сторони не рівні, а кути не прямі, то цей чотирикутник – не квадрат".

4 Теорема, протилежна оберненій. Якщо у теоремі умовою і висновком будуть висловлення, протилежні умовам і висновку оберненої теореми, то вона називається „теоремою, протилежною оберненій", її запис

буде: $(\forall x \in P)\ (\overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)})$. У цьому разі наведена теорема буде формулюватися так: „Якщо чотирикутник не квадрат, то його сторони не рівні, а кути не прямі".

Розглянемо ще один приклад. *Пряма теорема.* Нехай задані два числа a і b, їх сума c і певне число $\boldsymbol{d}$. Якщо кожний з доданків ділиться на число $\boldsymbol{d}$, то і їх сума число c ділиться на число $\boldsymbol{d}$. Теорема істинна.

Розглянемо її інші види за тією ж пояснювальною частиною.

Обернена теорема: Якщо сума двох чисел число ***c*** ділиться на задане число ***d****,* то і кожний з доданків ділиться на задане число ***d***.

Теорема, протилежна прямій. Якщо кожний з доданків не ділиться на задане число, то і їх сума не ділиться на задане число.

Теорема, протилежна оберненій. Якщо сума двох чисел не ділиться на задане число, то і кожний з доданків не ділиться на задане число з доданків не ділиться на задане число.

Проаналізуємо ці види теорем на предмет їх істинності.

Пряма теорема *істинна* завжди (легко доводиться на загальному рівні).

Обернена теорема *хибна.* Дійсно, це видно з конкретного прикладу:

16 + 2 = 18. Сума чисел 16 і 2 – число 18 ділиться на 3, а кожний доданок не ділиться.

Теорема, протилежна прямій *хибна.* Дійсно, ані число 16, ані число 2 на число 3 не діляться, а сума їх ділиться.

Теорема, протилежна оберненій *істинна* (теж легко доводиться на загальному рівні).

Отже, зазначаємо, що однакова істинність теорем спостерігається в наступному порядку: якщо істинна (хибна) пряма теорема, то такою ж буде і протилежна оберненій. Аналогічний зв'язок і між оберненою теоремою і теоремою, протилежною прямій. Така залежність у математичній логіці має назву *закон контрапозиції.*

Вправи

У запропонованих реченнях пропуски замінити словами: „необхідно і достатньо", „необхідно, але недостатньо", „достатньо, але не необхідно":

а) для того, щоб сума чисел $m + n$ ділилася на ціле число p, ... , щоб на p ділився кожний доданок;

б) для того, щоб сума квадратів двох сторін трикутника дорівнювала квадрату третьої сторони, ... , щоб трикутник був прямокутним;

в) для того, щоб число ділилось на 6, ... , щоб воно було парним і ділилося на 3;

г) для того, щоб чотирикутник був квадратом, ... , щоб діагоналі його були взаємно перпендикулярні;

д) для того, щоб різниця двох чисел була парною, ... , щоб зменшуване і від'ємник були парними;

е) для того, щоб сума двох додатних цілих чисел була більше 10, ... , хоча б один з доданків був більше 9;

ж) для того, щоб протилежні кути чотирикутника були рівні, ... , щоб цей чотирикутник був паралелограм;

з) для того, щоб добуток двох чисел дорівнював нулю, ... , щоб один із співмножників дорівнював нулю;

і) для того, щоб трикутники були рівні, ... , щоб їх відповідні кути були рівні;

к) для того, щоб чотирикутник був паралелограм, ... , щоб його протилежні сторони були рівні.

Методичний коментар

Навчання – це, перш за все, спілкування. Будь-яке спілкування здійснюється за певними законами й правилами, які у своїй сукупності складають зміст особливої науки – логіки. Логіка у відповідності до сфер життєдіяльності людини розгалужується на декілька видів, зокрема: діалектична логіка, формальна логіка, математична логіка, побутова логіка. Кожна з них має своє предметне поле і свою систему законів. Скажімо, <u>діалектична логіка</u> розглядає будь-які процеси (суспільно-історичні, біологічні, культурологічні та ін.) у їх розвитку. Наприклад, неперервну послідовність і зміст подій у розвитку Франції після Великої Французької революції 1789 року. Ці події свідчать про поступові зміни у житті держави. Кожна з них є наслідком якихось подій і в той же час – причиною інших. Разом з розвитком подій змінюються й закони існування і функціонування держави. Тобто діалектична логіка розглядає події у динаміці.

<u>Формальна логіка</u> розглядає події з позицій статичних, постійних, віковічних законів, які не залежать від бажання людини чи навіть суспільства. Змістовно вона, як правило виражається у формі означень, законів, властивостей, теорем, лем, правил і фіксується у формі математичних, фізичних, хімічних формул, схем, креслень, діаграм. Усі події описуються, обґрунтовуються і представляються за допомогою строго визначених формулювань.

<u>Математична логіка</u> розглядає події лише з позицій істинності і хибності. При цьому зміст висловлень не має значення. Скажімо, висловлення: „Якщо Земля обертається навколо Сонця, то 2·3 = 6" буде істинним, оскільки обидва елементарні висловлення істинні, а в цьому разі імплікація істинна. Ця логіка саме й називається математичною, оскільки математика розглядає числові відношення у множині об'єктів незалежно від їх природи. Саме вона в першу чергу й лежить в основі будь-якої науки, яка користується математичним апаратом. Водночас її межі охоплюють усі процеси в будь-якій сфері де істотною є оцінка явищ з позицій істинності і хибності.

Предметом розгляду математичної логіки є твердження. Твердження саме й складають зміст математичної науки, у тому числі й початкового курсу математики.

<u>*Побутова логіка.*</u> *Якщо діалектична, формальна й математична логіки є науками об'єктивними, то побутова логіка є суб'єктивною, тобто виражає умовиводи кожної людини в залежності від її уподобань, тому вона не є для нас у цьому посібнику цікавою й з розгляду ми її випускаємо.*

Отже, для чого учителю початкової школи треба мати певний обсяг знань з математичної логіки? Яке місце повинна посідати математична логіка у його професійності?

По-перше, у загальному підході до математики як наукової галузі сутність математичних завдань полягає у визначенні істинності або хибності певних тверджень у полі числових або просторових відношень, що саме і є предметом математичної логіки.

По-друге, головним дидактичним завданням у процесі навчання школярів математиці є формування знань і умінь у побудові суджень у відповідності до законів логіки, розвиток доказового мислення, умінь описувати й перетворювати реальні й абстрактні об'єкти.

По-третє, практичним завданням кожного вчителя у математичній освіті учнів є розвиток у школярів здатності бачити в абстрактних моделях образи реальних об'єктів і явищ, уміти використовувати математичний апарат до їх дослідження і використання у практичній діяльності.

Усі ці завдання можна узагальнити одним реченням, яке виражає вимогу до вчителя – розвивати в учнів логіку мислення. А для цього сам учитель повинен бути освічений у цих питаннях, адже цей процес підкоряється закону: творче мислення в учнів може сформувати тільки творчий учитель, математиці може навчити тільки той, хто сам знає математику. Отже, логічне мислення може розвивати лише учитель, який сам має здатність логічно мислити, має знання й володіє уміннями із даної галузі.

Що ж до методичної конкретики, то учитель повинен знати закони побудови тверджень. Скажімо, при описі будь-якого поняття слід дотримуватись вимоги: у твердженні не повинно бути зайвих ознак або їх нестача. У процесі пояснення певних відношень і залежностей учитель повинен чітко визначати необхідні й достатні умови.

Розв'язання будь-якого числового прикладу передбачає визначення істинності числового значення. Розглядаючи будь-який числовий приклад, наприклад: „Обчислити суму 3 + 5", учитель повинен бачити в ньому те, чого в підручнику не вказано, а саме, рівність, у якій невідома сума, тобто 3

+ 5 = а. Отже, розв'язуючи цей приклад, учень повинен знайти таке значення а, при якому ця рівність з невідомим компонентом перетвориться у числову рівність, тобто при а = 8 маємо числову рівність 3 + 5 = 8. В даному випадку ми маємо елементарний приклад предиката, тобто висловлювальної форми, у якій змінна а може приймати різні значення, але числова рівність буде істинною лише при значенні 8. В інших випадках вона буде хибною. У цьому разі учитель говорить, що приклад розв'язано невірно, у обчисленні допущена помилка.

Розглянутий факт має й іншу форму, ідентичну з цією, але невідомим виступає один з доданків, а сума відома, тобто 3 + а = 8. Ця форма предикату розглядається у початковому курсі математики як рівняння.

Отже, з позицій логіки кожне рівняння – це предикат. А множина значень змінної, при яких предикат перетворюється в істинне висловлювання, утворює область істинності предиката. Ці значення змінних називаються коренями рівняння. У початковій школі програмою передбачається вивчення рівнянь з однією змінною, які представляють собою одномісний предикат. А з позицій алгебри чисел, розв'язати рівняння – значить знайти таке значення а, при якому зазначена рівність з невідомим компонентом перетвориться у числову рівність, тобто при а = 5 маємо числову рівність 3 + 5 = 8. Числове значення змінної, яка перетворює рівняння у числову рівність, називається коренем рівняння.

Значне місце в практичному матеріалі посідають логічні вправи на знаходження невідомого числа у числовому ряді. Це завдання виду: „Задана числова послідовність: 21, 28, 35, ... Визначити наступне число у послідовності". Це завдання являє собою судження за аналогією. Учень визначає, що число 28 на 7 більше, ніж 21, а число 35 – на 7 більше за 28. Наступне за аналогією повинне бути на 7 більше, ніж 35, тобто число 42.

Серед завдань з підвищеним логічним навантаженням пропонуються й вправи на визначення властивостей об'єктів за зв'язками з іншими однорідними об'єктами. Наприклад: „Три дівчинки – Олена, Тетяна і Марина відпочивали у таборі. Кожна з дівчинок займалася одним з видів спорту: тенісом, плаванням та волейболом. У перший же день Марина і волейболістка ходили милуватися водоспадом, Тетяна старша за тенісистку, а волейболістка ровесниця тенісистки. Яким видом спорту займалася кожна дівчинка? Розв'язок цієї логічної задачі спирається на закон суперечності, тобто висловлення А не може бути одночасно істинним і хибним: Марина не може бути волейболісткою, а Тетяна тенісисткою і оскільки тенісистка ровесниця волейболістки, а Тетяна старша за *тенісистку, то Тетяна – плавчиха. Тоді Марина і Олена не можуть бути плавчихами. Значить Марина – тенісистка, а Олена – волейболістка.*

Важливе місце посідають у поясненнях математичних зв'язків доведення їх істинності. Тому знання способів доведення і володіння їх технологією є ключовими для учителя.

За синтетичним і аналітичним методами здійснюється розв'язання будь-якої арифметичної задачі. Ці методи дають змогу визначити алгоритм розв'язання.

Окреме місце посідає закон від супротивного. Він більше використовується у доведенні пізнавальних задач. Наприклад, чому не можна ділити на нуль? Доведення тут передбачає припущення, яке суперечить твердженню, що на нуль не можна ділити. Робиться припущення, протилежне заданому, а саме, „А припустимо, що на нуль ділити можна". Шляхом елементарних обчислень за формулою $a : 0 = b$, робиться висновок, що припущення хибне. Значить вихідне твердження істинне.

Взагалі метод від супротивного – основний спосіб пізнання світу дитиною. Коли дитині щось забороняється і вона не розуміє чому, то вона робить припущення, а що буде, якщо можна? Отримавши негативний наслідок, дитина усвідомлює сенс заборони. У практиці цей метод ще називають методом проб і помилок. Цей спосіб посідає значного місця і в доведенні математичних тверджень, коли прямим шляхом довести істинність твердження довести важко або неможливо, користуються методом від супротивного.

Певну нішу в системі доведення істинності тверджень займає і метод дедуктивних доведень. Він надає змогу робити часткові висновки із загального твердження. Наприклад: „Добуток будь-якого числа на число нуль дорівнює нулю". З цього загального твердження випливає часткове – $5 \cdot 0 = 0$.

Важливого значення в грамотному будуванні наслідкових тверджень (імплікативних і еквівалентних) має знання їх логічної побудови. Нагадаємо, що такі твердження формулюються у формі умовних складнопідрядних речень, які мають логічну схему „Якщо..., то ...". Перше речення (умова) – причина, друге (висновок) – наслідок. Причина обумовлює наслідок. Часто в певних межах ця причинно-наслідкова форма утворює цілий ланцюг: певна умова щодо якогось об'єкта або явища тягне за собою певний наслідок, а він, у свою чергу, стає причиною нового наслідку. Наприклад, „Якщо фігура квадрат, то вона є прямокутник"; $\Rightarrow$ „Якщо вона є прямокутник, то вона є многокутник"; $\Rightarrow$ „Якщо фігура многокутник, то вона є замкнена ламана лінія". Аналогічні ланцюжки складають основу практично всіх явищ.

Разом з тим, причина і наслідок можуть мінятися місцями, тобто як умова впливає на наслідок, так і наслідок може впливати на умову. У математиці це проявляється в обернених твердженнях. Наприклад, „Якщо задане число а парне, то воно ділиться на 2”. Водночас „Якщо число а ділиться на 2, то воно парне”.

Знання про причинно-наслідкові відношення дають можливість проникати в суть досліджуваного об’єкта, виконують прогностичну функцію, тобто надають можливість передбачати образ майбутнього результату.

Але описуючи формулювання тверджень, слід зазначити, що часто в підручниках вони подаються у вигляді, в якому структура «Якщо..., то...» завуальована певним мовним оборотом, представлена в неявному вигляді. Наприклад, переставна властивість додавання переважно звучить: „Від перестановки місць доданків сума не змінюється”. Як бачимо, у цьому формулюванні відсутня пряма схема «Якщо..., то...». Отже, перед учнями стоїть задача виділити в твердженні елементи, які належать до умови, і ті, що належать до висновку. Для усвідомлення суті твердження цей крок є одним із головних. Логічний аналіз твердження підказує, що його треба починати з виявлення: а) який об’єкт досліджується; б) у якому стані він знаходиться; в) яке перетворення з ним здійснюється або які інші об’єкти на нього впливають; г) які причини викликають перетворення; д) які результати (наслідки) заподіяного впливу або перетворення; е) як це фіксується в символічній формі.

Проаналізуємо зазначений приклад.

1. Який об’єкт досліджується? Відповідь: „Сума двох чисел”.

2. Які дії з ним треба виконати згідно з дослідницькою задачею? Відповідь: „Необхідно ці числа додати”.

3. Що треба зафіксувати після такої дії? Відповідь: „Слід зафіксувати отриману суму”.

4. Яке перетворення здійснюється? Відповідь: „Доданки міняються місцями і знов додаються”.

На цьому умовна частина закінчується. Вона формулюється так: „Якщо при додаванні двох чисел доданки поміняти місцями” ...

5. Що отримується в результаті додавання? Відповідь: „Така сама відповідь”.

6. Далі йде висновкова частина, яка формулюється: „... то їх сума не зміниться”.

Отже, у формі причинно-наслідкового зв’язку властивість має бути сформульований так: «Якщо при додаванні два числа поміняти місцями, то *їх сума не зміниться”.*

Цей аналіз дає ключ до перетворення неявного формулювання у явну форму «Якщо..., то...». Тобто учням необхідно визначити задані елементи та їхній взаємо зв’язок або операцію з ними, що складають умову й результати перетворення, а потім записати їх за схемою: «Якщо... (необхідні умови), то... (достатні) умови».

Аналіз суті тверджень дає можливість визначити таку систему дій для їх правильного формулювання:

1. Спостереження заданих предметів або явищ.

2. Пошук зв’язків і відношень між ними, визначення серед них істотних, усталених, прямих й обернених, необхідних і достатніх.

3. Формулювання словесних положень, у яких відображаються знайдені зв’язки й відношення.

4. Кодування основних понять і відношень у символічну форму.

5. Доведення сформульованого твердження.

Виконання цих дій вимагає у дослідника (учня) використання таких логічних засобів:

а) понять причини й наслідку;

б) ознак схожості й відмінності;

в) ознак необхідних і достатніх, істотних і неістотних;

г) понять закону, теореми, ідеї, властивості;

д) операцію порівняння;

е) правило формулювання законів, ідей, теорем, принципів, властивостей;

є) способи доведення тверджень, висловлених у них;

ж) уміння оперувати цими поняттями, правилами, способами.

Вікова психологія свідчить, що у малечому віці в дітей домінує наочно дійове мислення („Дивись, як я роблю й роби так само”, „Дивись, як це робиться і повторюй за мною”). З набуттям досвіду наочно-дійового мислення й пізнанням оточуючого світу в дитини поступово починає формуватись наочно-образне мислення. Типовим для такого мислення є виконання завдання „за зразком”. До віку початківця рівень розвитку наочно-образного мислення досягає такого рівня, що дитина вже стає спроможною засвоювати системні знання на репродуктивному рівні у цілеспрямованій навчальній діяльності, але в надрах наочно-образного мислення до цього віку вже починає формуватися більш високий рівень мислення – словесно-логічний, тобто абстрактне мислення. Саме абстрактне мислення забезпечує найвищий рівень якості пізнавальної діяльності, оскільки *предметом вивчення школяра стають абстрактні об'єкти: природничо-математичні, мовні, естетичні, суспільні й навіть філософські. Усі вони передбачають, перш за все їх узагальненість або відокремленість у визначених межах, які саме й виражаються у формі логічних операцій узагальнення і відокремлення.*

Логічна операція узагальнення формує в школярів абстрактне уявлення факту поширення певного явища на всю множину заданих об'єктів. Скажімо, вивчаючи переставний або розподільний закони додавання, учень повинен усвідомити, що доведене твердження на декількох числових прикладах поширюється на всю множину чисел. Таких тверджень багато і в множині арифметичних й алгебраїчних операцій та відношень, і в множині геометричних об'єктів, і в множині природничих, мовних та ін.

Таке ж важливе місце в логіці висловлень посідає і операція відокремлення, яка дає можливість у певній багатоелементній множині виокремити кожний об'єкт, який має свою особливість відносно усіх інших об'єктів заданої множини. Таку особливість, наприклад, має число нуль у множині дійсних чисел: воно не має знаку, на нього не можна ділити, будь-яке число на нього помножене дає в результаті нуль. У множині геометричних об'єктів, скажімо у множини прямокутників є такий прямокутник як квадрат, який на відміну від інших прямокутників має свої властивості, будучи в той же час прямокутником.

Отже, знання учителем логічних операцій узагальнення і відокремлення, які представлені в математичній логіці як квантори узагальнення та існування, надає йому можливість продуктивно організувати процес розвитку абстрактного мислення у молодших школярів, яке, власне кажучи, й становить основу творчої пізнавальної діяльності.

Логічні вправи для учителя

1. Висловлення A означає: „Сергій уміє грати в шахи", а висловлення B : „Сергій уміє грати на трубі". Прочитайте висловлення:

а) $A \vee \overline{B}$; б) $\overline{A} \wedge \overline{B}$; в) $\overline{A} \vee \overline{B}$; г) $\overline{A} \vee B$; д) $A \vee \overline{B}$; е) $A \wedge \overline{B}$; є) $A \wedge B$; ж) $A \wedge B$; з) $A \vee B$.

2. Висловлення A означає: „Мій товариш живе у селі", висловлення B: „Він – токар", висловлення C: „Він уміє добре плавати".

Прочитайте висловлення: а) $(A \vee B) \wedge C$; б) $(A \wedge C) \vee (C \wedge B)$; в) $(A \wedge B) \vee C$; г) $(A \vee C) \wedge (B \vee C)$.

3. Позначимо висловлення: A: „Сьогодні спекотно"; B: „Сьогодні дощить"; C: „Сьогодні небо хмарне"; D: „Сьогодні я піду в парк";

E: „Сьогодні я буду читати книгу". Запишіть у вигляді формул наступні висловлення:

а) Сьогодні спекотно і не дощить;

б) Сьогодні небо хмарне і я піду в парк або буду читати книжку;

в) Якщо сьогодні не буде дощити, то я піду в парк і буду читати книжку.

г) Сьогодні дощить, небо хмарне, тому я не піду в парк, а буду читати книжку;

д) Якщо сьогодні буде дощити і буде хмарно, то не буде спекотно.

4. З елементарних висловлень: A: „Це число ціле"; B: „Це число додатне"; C: „Це число просте"; D: „Це число кратне 3" скласти висловлення:

а) $(A \wedge \overline{D}) \Rightarrow C$; б) $(A \vee B) \wedge (D \vee \overline{C})$; в) $\overline{A \vee B}$; г) $(A \wedge C) \Rightarrow D$. Прочитати ці висловлення і визначити, які з них істинні.

5. Сформулюйте словесно висловлення: A: B: C:

а) $A \wedge B \Rightarrow C$, де A: „Фігура F – ромб", B: „Фігура F – прямокутник", C: „Фігура F – паралелограм".

б) $\overline{A} \vee B \Rightarrow \overline{C}$, за тими ж значеннями висловлень A, B, і C.

в) $C \Rightarrow A \vee \overline{B}$, г) $\overline{C} \Rightarrow A \wedge \overline{B}$.

6. Записати у вигляді логічних формул, замінивши прості речення символами:

а) „Влітку я поїду в Карпати або на море, а мій товариш буде відпочивати вдома або поїде до бабусі в село";

б) „За даними телеметричної апаратури та доповідям космонавтів бортові системи і наукова апаратура функціонують нормально";

в) „Число 56 ділиться на 2 і на 7, але не ділиться на 3";

г) „Якщо сума цифр числа ділиться на 3, то й саме число ділиться на 3, а якщо сума цифр ділиться на 9, то й само число ділиться на 9";

д) „Якщо до книгарні заходить студент, то він переглядає наукову літературу, якщо домогосподарка, то цікавиться літературою з кулінарії або в'язання, а якщо школярі, то йдуть у відділ де детективи або пригоди".

Предикати, квантори.

7. „На множині $P = \{1, 2, 3, 4, ..., 19, 20\}$ задані предикати:

$A(x)$: „ x не ділиться на 5", $B(x)$: „ x – парне число", $C(x)$: „ x – число просте", $D(x)$: „ x – число, кратне 3". Знайти множину істинності предикатів:

а) $A(x) \wedge B(x)$; б) $B(x) \vee D(x)$; в) $C(x) \wedge D\overline{(x)}$; г) $A\overline{(x)} \wedge C(x)$

д) $A(x) \wedge B(x) \vee \overline{D(x)}$; е) $A(x) \vee C(x)$.

8. На множині $P = \{5, 10, 15, 18, 20, 24, 25, 30, 35, 37, 40\}$ задані предикати: $A(x)$: „ x – число ціле", $B(x)$: „ x – непарне число",

$C(x)$: „ x – число кратне 10”, $D(x)$: „ x – число, кратне 3”. Знайти множину істинності предикатів:

а) $\overline{A(x)} \wedge B(x)$; б) $\overline{B(x) \vee D(x)}$; в) $C\overline{(x)} \wedge D(x)$; г) $A(x) \wedge C\overline{(x)}$

д) $A(x) \vee D(x)$; е) $A(x) \vee \overline{C}(x)$.

9. Прочитати твердження:

Зразок 1: $(\forall a)\ (\forall b)\ (\exists c)\ (a + b = c)$. Це твердження читається так: „Для будь-яких чисел a і b існує таке число c, що $a + b = c$”. Або інакше: „Для будь-яких чисел a і b існує їх сума”. Є і третє формулювання: „Дія додавання виконується завжди”.

Зразок 2: $(\forall a)\ (\forall b)\ (\forall c)\ ((a > b) \wedge (b > c) \Rightarrow (a > c))$.

Це твердження читається так: „Для будь-яких чисел a, b і c, якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$”.

а) $(\forall a)\ (\forall u)\ (\forall c)\ ((a \parallel b) \wedge (b \parallel c) \Rightarrow (a \parallel c))$. Сформулювати твердження обернене даному.

б) $(\forall a)\ (\forall b)\ ((a \vdots 13) \wedge (b \vdots 13) \Rightarrow (a + b \vdots 13))$. Сформулювати твердження, протилежне даному.

в)$(\forall_{\triangle ABC})$ $(\angle A + \angle B + \angle C = 180^{\circ})$. Сформулювати твердження обернене даному.

г) $(\forall a)\ (\forall b)\ (\forall c)\ (a > b \Rightarrow a + c > b + c)$. Сформулювати твердження, обернене даному.

д) $(\forall_{\triangle ABC})\ (\forall_{\triangle MNP})\ ((AB = MN) \wedge (AC = MP) \wedge (\angle A = \angle M) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\triangle ABC = \triangle MNP))$. Сформулювати твердження, обернене даному.

е) $(\forall_{[AB]})\ (\exists_{т.}c)\ ([AC] = [BC])$. Сформулювати зазначену теорему.

Логічні вправи для школярів

2 клас

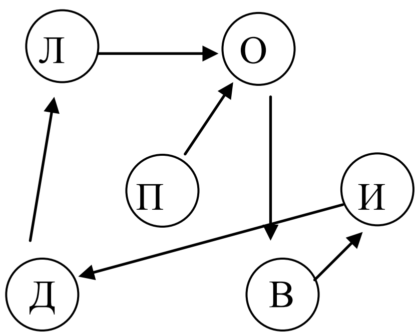
1. Яке слово слід записати замість знака питання?

а) рак $\longrightarrow$ рука б) мило $\longrightarrow$ мир в) камера $\longrightarrow$ мер

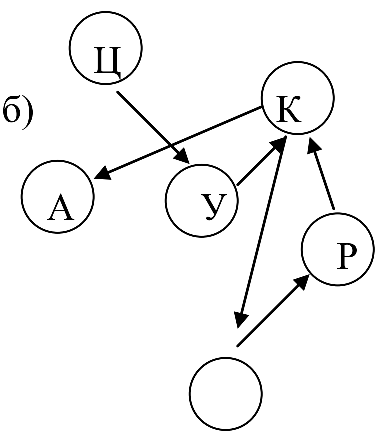
мак $\longrightarrow$? сила $\longrightarrow$? сирота $\longrightarrow$?

2. Прочитайте слова, зашифровані у схемах.

а)



б)



Е

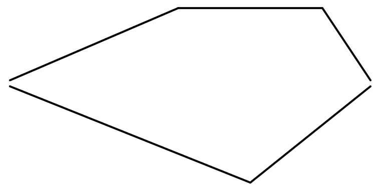
3. Дайте спільну назву кожній парі слів:

тигр, лев;	дівчина, хлопчик;
жито, пшениця;	дуб, береза;
черевики, чоботи;	скрипка, флейта.

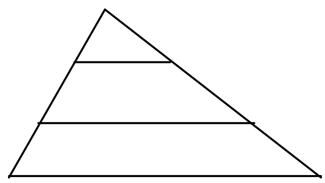
Придумайте свої приклади з двох і трьох слів.

4. Назвіть зайве слово:
число, ділення, віднімання, додавання, множення;
коло, трикутник, чотирикутник, квадрат, п’ятикутник;
віз, літак, автомобіль, будинок, трамвай, тролейбус;
береза, вітер, сосна, клен, дуб.
Придумайте й свої приклади.

5. Поділіть п’ятикутник двома відрізками на 3 трикутника:



6. Порахуйте, скільки на малюнку трикутників і скільки чотирикутників.



7. Кожний поверх будинку має висоту 3 м. З балкона одного з поверхів кинули вгору м’яча. Вгору він пролетів 5 м, а до низу 14 м. З якого поверху кидали м’яч?

8. Від сосни до берези 4 м. Хлопчик пробіг від сосни до берези і назад декілька разів, пробігши 28 м. Скільки разів хлопчик пробіг відстань між деревами і біля якого він зупинився?

9. Було 5 аркушів паперу. Декілька аркушів розрізали навпіл і стало 7 аркушів. Скільки аркушів розрізали?

10. На подвір’ї ходять вівці й кури, разом – 7. Курей на одну більше, ніж овець. Скільки всього лап?

11. За 2 груші дають 3 яблука. Скільки груш дадуть за 15 яблук?

12. Сума трьох послідовних чисел дорівнює 18. Які це числа?

13. Сума трьох послідовних парних чисел дорівнює 24. Які це числа?

14. Сума трьох послідовних непарних чисел дорівнює 15. Які це числа?

15. Степан вищий за Маринку, але нижчий за Іринку. Хто самий вищий?

16. На лавці сидять бабуся, дідусь і онука. Бабуся сидить біля онуки, але не біля дідуся. Де сидить онука?

17. Петрик на 22 роки менший за маму але на 2 роки старший за сестричку. Скільки років сестричці, якщо мамі 27.

18. У класі 32 учні. З них відвідують гурток англійської мови 20 учнів, а французької – 17. Скільки учнів відвідують обидва гуртки?

19. Розглянуто 27 чисел. Серед них 15 чисел кратних 3, 20 чисел кратних 2. Скільки серед них чисел кратних 6? Скільки чисел кратних лише 2? Скільки чисел кратних лише 3?

20.У брата й сестри було 8 яблук. Коли сестра віддала братові 3 яблука, то їх у них стало порівну. Скільки яблук мав кожен з них спочатку?

21. У банку, глечик і пляшку налили воду, квас і молоко. Вода і молоко – не в пляшці, у банці не вода і не квас. Яку рідину налили у кожну з посудин?

3 клас

1. Розгляньте множини. Які з них можна назвати рівними?

$A = \{0, 3, 6, 10\}$; $B = \{3, 6, 10\}$; $C = \{0, 3, 60, 10\}$; $D = \{10, 3, 6, 0\}$.

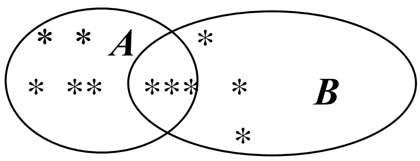
2. Запишіть множину букв слова *математика.* Чи буде ця множина рівною з множиною букв слова *математик*?

3. Чи рівні між собою множини цифр, з яких складаються числа 32402149 і 291412330?

4. Виписати усі підмножини множини $A = \{2, 3, 6, 7\}$.

5. Утворіть об'єднання множин букв слів „Заміс" і „Міський". Прочитайте слово, яке утворилося.

6. Задані дві множини точок *А* і *В*.



Обведіть лінією множину, яка є об'єднанням цих двох множин.

7. Елементами множин *А* і *В* є точки. Розташуйте в кругах Ейлера так, щоб у множині *А* було 6 елементів, у множині *В* – 8 елементів, а в об'єднанні – 9 елементів.

8. Яке слово утворюється перетином букв двох імен – Мирон і Миролав?

9. Число 48 ділиться на 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48.

Число 60 ділиться на числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

На які числа діляться обидва числа?

10. Задані дві множини точок *А* і *В*.

Яка з них є підмножиною іншої?

Обведіть лінією множину, яка є різницею   * *   * ***B***   *
множин *A* і *B*.   *   *

11. Задані дві множини:

$A = \{a, b, c, 3, 6, 10\}$; $B = \{a, c, d, 3, 5, 10\}$. Запишіть множину, яка є різницею множин: а) А і *B*; б) *B* і *A*.

12. Скільки проміжків між 5 точками?

13. Побудуйте коло і трикутник так, щоб вони мали одну спільну точку; дві спільні точки; три спільні точки; чотири; шість.

14. У двох рядках розміщені числа за певною закономірністю. Знайдіть і вилучіть зайве:

$A = \{4, 9, 19, 39, 59, 79\}$; $B = \{4, 7, 13, 25, 49, 98\}$;

15. На гілці сиділо 4 синиці і 6 горобців. 5 птахів полетіло. Чи був серед них хоч один з горобців?

16. Задані 7 чисел. Відомо, що перше більше п'ятого, друге менше третього, п'яте більше третього, шосте більше першого, сьоме менше другого, а четверте більше шостого. Розташуйте числа по порядку зростання.

17. До магазину привезли 25 ящиків з яблуками трьох сортів. Кожен ящик містить яблука одного сорту. Доведіть, що серед них обов'язково буде мінімум 9 ящиків одного сорту.

18. Є два бідони. Один з них вміщує 5*л*, а другий – 7*л*. Як за допомогою цих бідонів налити з крану рівно 6*л* води?

19. Розшифруйте числовий ребус:

$$\begin{array}{r} \mathrm{A\ A\ A} \\ {}^{+}\mathrm{A\ 5\ B} \\ \hline \mathrm{8\ C\ 6} \end{array}$$

20. Заєць-хвалько вихвалявся, що добре знає математику. Коли ж його запитали, де більше капусти: у трьох відрах по чотири капустини чи в чотирьох відрах по три капустини, то він знітився. А ви як думаєте?

Примітка: ***Паліндром*** *– це слова чи словосполучення, читаються однаково*: *чи спереду назад, чи ззаду наперед. Наприклад*: *„Потоп", „Зараз", „І ніс у сіні", „Кіт утік".*

21. Допишіть літери, щоб утворився паліндром:

а) А__Н__ , __И__ __П, __ИЛ__В, О__о, __ИР __В, С__р і __и__,

Мо__ __з уз__р__м, К__т у__і__.

б) Продовжити паліндроми:

А роза упала на ... (А.А. Фет) (А роза упала на лапу Азора)

Я иду с мечем судия! (Г.Р. Державин) (Я иду с мечем судия!)

Аргентина манит ... (Аргентина манит негра)

Кит на море ... (Кит на море романтик)

Иди, Сеня, не с_ _ _ . (Иди, Сеня, не сиди.)

Щоденно село голе, ... Дощ. (Щоденно село голе, сонне. Дощ).

... татар бережу (Уже ребра татар бережу)

І ... кіло бараболі Кучмі. (І мчу кіло бараболі Кучмі).

І що сало?... (І що сало? Ласощі)

22. У бджоли очей стільки ж, як і в людини та й ще стільки, та ще півстільки. Скільки очей у бджоли?

23. Чверть білого хліба коштує на 40 копійок дешевше, ніж половинка. Скільки коштує півтори хлібини?

24. Півтора літри молока коштує на 8 грн. дорожче, ніж півлітра. Скільки коштує стакан молока (чверть літра).

25. Журавель запросив лисичку на обід о 12-й годині та прождав її ще стільки ж та ще 15 годин. О якій годині прийшла лисичка?

26. Трилітрова банка соку коштує 12 грн. Скільки коштує банка, якщо сік дорожчий за банку на 6 грн?

27. Якщо від задуманого числа відняти 4, до різниці додати 9 і результат помножити на 3, то отримаємо 45. Яке число задумали?

28. Якщо до задуманого числа додати 8, від суми відняти 12, до отриманої різниці додати 13 і результат поділити на 4, то отримаємо 5. Яке число задумали?

29. Як розрізати 3 яблука, щоб поділити порівну між 4 друзями?

30. Петро, Дмитро і Денис пішли на рибалку. Усього впіймали 16 рибин. Петро з Дмитром упіймали 11 рибин, Денис з Петром – 12 рибин. Скільки рибин упіймав кожний?

31. Чверть доби кіт Лекс полює на мишей, половину доби він спить, третину часу, що залишилося, він їсть, решту часу він гріється на сонечку. Скільки часу кіт Лекс розмірковує, що буде робити завтра?

32. З Полтави до Житомира одночасно вирушили два туристи. Один пішов пішки, а другий половину шляху пролетів на літаку зі швидкістю у 100 разів більшу за швидкість пішохода, а другу половину шляху проїхав на повозі, запряженій биками, зі швидкістю у 2 разів меншу за швидкість пішохода. Хто прибуде до Житомира раніше і на скільки?

4 клас

1. Укажіть на логічні помилки, приберіть зайві слова або добавте потрібні в наступних означеннях:

а) промінь – це пряма, обмежена з однієї сторони:

б) відрізком називається пряма, обмежена з двох сторін;

в) квадрат – це прямокутник, у якого протилежні сторони рівні, а кути прямі:

г) діаметр кола – це пряма, яка проходить через його центр;

д) чотирикутник, це ламана лінія з чотирьох відрізків;

е) об'єднання множин – це множина, яка складається з елементів, що належать обом множинам;

є) переріз множин – це множина, яка складається з елементів, що належать обом множинам;

ж) множенням називається процес знаходження суми декількох доданків;

з) корінь рівняння – це число, яке при підстановці замість змінної, перетворює його в рівність;

і) рівняння – це рівність двох виразів;

к) трикутник – це замкнена ламана лінія з трьох відрізків, що лежать в одній площині;

л) прямокутник – це чотирикутник, у якого кути прямі, а протилежні сторони рівні;

м) кут – це фігура, яка утворена двома променями, які мають спільну точку.

2. Виділити родові та видові ознаки в наступних означеннях:

а) квадрат – це прямокутник, у якого всі сторони рівні;

б) порожня множина –це множина, яка не має жодного елемента;

в) різниця множин *A* і *B* – це множина, яка складається з елементів, що належать множині *A* і не належать множині *B*;

г) коло – це крива лінія, яка є замкненою і всі точки якої знаходяться на однаковій відстані від однієї точки, яка називається центром;

д) кут – це геометрична фігура, яка утворена двома променями, що виходять з однієї точки;

е) числовий вираз – це запис, який складається з чисел, пов'язаних знаками арифметичних дій і символами, що визначають порядок їх виконання;

є) значення числового виразу – це число, яке отримується в результаті виконання дій у цьому числовому виразі;

ж) числова рівність – це два числових виразів, які мають однакове значення і поєднаних знаком рівності;

з) квадрат – це чотирикутник, у якого всі сторони рівні, а кути прямі.

3. Розв'язати логічні вправи:

а) у скільки разів збільшиться задане число, якщо його помножити на 100 і від добутку це число відняти?

б) як зміниться сума, якщо один з доданків збільшити на 10?

в) як потрібно змінити ділене і дільник, щоб частка залишилася незмінною?

г) у вазі 20 цукерок. Скільки треба взяти цукерок, щоб у вазі їх залишилося не більше 9?

д) стрибок зайця у 2 рази коротший за стрибок лисиці. Чи дожене лисиця зайця, якщо він стрибає утричі частіше, ніж лисиця?

е) брат і сестра вийшли одночасно: брат з дому, а сестра зі школи. Через 10 хвилин з'ясувалося, що брат був ближче від дому, ніж сестра від школи. Хто йшов швидше?

є) чи можна скласти прямокутник з 16 однакових паличок? А квадрат? А трикутник?

ж) чи можна скласти прямокутник з 15 паличок? А трикутник?

з) скільки прямокутників можна утворити з периметром 12 *см*?

і) скільки прямокутників можна утворити з площею 24 кв.см?

к) маса трьох гарбузів 28 *кг*. Маса одного з них дорівнює двох інших разом. Яка маса кожного гарбуза?

4. Розв'язати завдання на ознаки понять:

а) Розбери на множини зазначені поняття відповідно до їх родової (спільної) ознаки: сова, горобець, вовк, сосна, літо, грак, весна, дуб, верба, зима, ластівка, ведмідь, осінь, тюлень, орел, явір, лисиця;

б) визначити найближчий рід понять: прямокутник, трикутник, корінь рівняння, сума двох чисел, коло, квадрат, парне число, об'єднання множин, порожня множина, відрізок;

в) що спільного і чим відрізняється поняття: трикутник і прямокутник, парне число і непарне число, об'єднання множин і переріз множин, множення чисел і ділення чисел, квадрат і прямокутник, діаметр кола і радіус, числова рівність і числова нерівність;

г) добрати родове поняття до кожної пари видових понять:

слива, вишня
день, ніч
куртка, пальто
туфлі, босоніжки
літо, осінь
слон, верблюд
місто, село;

д) визначити назву кожної множини:

тонна, центнер, кілограм, грам;
Київ, Харків, Одеса, Донецьк, Львів;

морква, буряк, помідор, огірок;

книжка, ручка, олівець, лінійка, циркуль, зошит.

5. Рівняння і нерівності:

а) яке рівняння не має розв'язку? $56 + x = 56$,

$190 - x = 300$,

$x : (20 - 4 \cdot 5) = 5$,

$x - 21 = 22$,

$x + 5 = 11$;

$49 - x = 50$.

б) розв'яжіть рівняння: $85 + x = 85 - x$;

в) розв'язати нерівності: $x + 37 > 5 + 37$; $49 + x = 50$;

г) при яких значеннях виконуються рівності:

$a + b = 1$, $a - b = 1$, $a + b = 0$, $a - b = 0$,

$a \cdot b = 1$, $a : b = 1$, $a : b = 0$, $a \cdot b = 0$.

д) яку найменшу кількість однакових букетів можна скласти з 18 жовтих і 24 червоних троянд, щоб у кожному букеті була однакова кількість жовтих і червоних троянд?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПІДСУМКОВОГО САМОКОНТРОЛЮ ЗНАНЬ
(Є.Косоротова, С. Якименко [7])

I *варіант*

1. Сукупність предметів у математиці називають ... .

Як називається:

а) множина засушених рослин;

б) множина людей, які керують літаком?

2. Які з трьох множин рівні?

$\{4, 6, 9, 16\}$; $\{4, 6, 9, 18\}$; $\{16, 6, 9, 4\}$.

3. Які з цих суджень є істинними, а які – хибними?

а) Усі риби вміють літати.

б) Усі птахи мають крила.

в) Усі гриби – неїстівні.

г) Дві доби становлять 48 годин.

4. Василь склав задачу. Щоб її розв'язати, потрібно тричі застосувати дію віднімання. Які запитання Василь поставив у задачі?

Татові – 48 років.

Мамі – 45 років.

Сину – 25 років.

5. Три подруги зібрали 90 горіхів. Вони поділили їх так: найстарша взяла собі на 10 горіхів більше від середньої, а наймолодша – на 10 горіхів менше від середньої. Скільки горіхів узяла кожна дівчинка?

6. Три дівчинки тримали в руках кульки, прапорці та квіти. Що тримала кожна з дівчаток, якщо Наталка і Тетяна не тримали прапорців, Валентина милувалась квітами своєї подруги, а в Тетяни не було в руках предметів круглої форми?

7. Під час прогулянки хлопчик з батьком зайшли в тир. Батько запропонував хлопчикові зробити 10 пострілів, причому дозволив за кожні два попадання в ціль зробити ще один постріл. Всього хлопчик зробив 13 пострілів. Скільки разів він попав у ціль з перших 10 пострілів?

8. Перетворіть кожне хибне судження на істинне.

а) У прямокутника завжди всі сторони рівні.

б) Периметр квадрата дорівнює одній з його сторін.

в) Не всі парні числа діляться на два.

9. Зобразіть за допомогою кругів Ейлера співвідношення між обсягами понять:

A – рослини;

B – дерева;

C – кущі;

O – хвойні дерева;

E – трави.

II *варіант*

1. Запишіть одним словом:

а) множину зібраних марок;

б) множину корів.

2. Які елементи для цих множин є спільними? Випиши їх.

{3, 6, 9, 12, 15}; {4, 6, 8, 12, 16}; {5, 6, 7, 8, 9, 12}.

3. Покажіть співвідношення між поняттями за допомогою кругів Ейлера: A – тварини; B – вовки; C – білочки; O – лисиці.

4. Які з цих суджень є істинними, а які – хибними?

а) Деякі люди не вміють малювати.

б) Прямокутник не є трикутником.

в) Тюльпани не є квітами.

5. Надійка знає віршів менше від Костика, Світлана знає більше віршів, ніж Ліда, а Костик – менше, ніж Ліда. Миколка знає віршів більше, ніж Світланка. Хто з дітей знає віршів найбільше, а хто — найменше?

6. Дітям подарували дві ляльки й одного зайчика. Яку іграшку подарували кожній дитині, якщо Тані й Олі подарували неоднакові іграшки, а Каті й Тані – однакові?

7. Перетворіть хибне судження на істинне.

а) Усі чотирикутники – прямокутники.

б) Усі трицифрові числа є парними.

в) Жодний метелик не має крил.

8. Лимон дорожчий від яблука в три рази і коштує 60 копійок. Скільки яблук може купити Денис за ці гроші?

9. У кімнаті стояло кілька стільців на чотирьох ніжках і кілька табуреток на трьох ніжках. Скільки було стільців і скільки табуреток, якщо всього було 17 ніжок?

Список використаних джерел

1. Виленкин Н. Я. Математика : Учеб. пособ. для студ. пед. ин-тов по спец. «Педагогика и методика начального обучения» / Н. Я. Виленкин, А. М. Пышкало и др. – М., Просвещение 1977. –352 с.
2. Гесь О. Планета міркувань : Навч. пос. 2 кл./Ольга Гесь. – К., Ін-тут сучас. підручн., 2008. 160 с.: іл..
3. Гесь О. Планета міркувань : Навч. пос. 3 кл./Ольга Гесь. – К., Ін-тут сучас. підручн., 2008. 160 с.: іл.
4. Затула Н. І. Математика : Навч. посіб. / Н. І. Затула, А. М. Зуб та ін. – К., Кондор, 2006. – 560 с.
5. Косоротова Є. І. Математична логіка 2 кл. : Навчальний посібник /

Є. І. Косоротова, С. І. Якименко. – Тернопіль, Навчальна книга – Богдан, 2010. – 88 с.

6. Косоротова Є. І. Математична логіка 3 кл. : Навчальний посібник / Є. І. Косоротова, С. І. Якименко. – Тернопіль, Навчальна книга – Богдан, 2010. – 80 с.
7. Косоротова Є. І. Математична логіка 4 кл. : Навчальний посібник / Є. І. Косоротова, С. І. Якименко. – Тернопіль, Навчальна книга – Богдан, 2010. – 80 с.
8. Митник О. Я. Творча математика [навч. пос. для 2, 3, 4 кл.] / О. Я. Митник. –К., Початкова школа, 2007.
9. Митник О. Я. Логіка. [навч. пос. для 2, 3, 4 кл.] / О. Я. Митник. –К., Початкова школа, 2007.
10. Сарієнко В. К. Логіко-дидактичні проблеми розвитку логічного мислення молодших школярів при вивченні математики / В. К. Сарієнко : Инновационная деятельность в образовании: Материалы VII международной научно-практической конференции. Часть II // Под общ.ред. Г. П. Новиковой – Ярославль-Москва : Изд.”Канцлер”, 2013. – 828 с.: – С. 623-632.
11. Сарієнко В. В. Структура наукового знання і пізнавальної діяльності школярів у навчанні / В. В. Сарієнко // Інновації як чинник суспільного розвитку: теорія і практика : матеріали ІІІ Міжнар. наук.-практ. конф. 30–31 травня 2012 року : у 2 ч. – Суми, 2012. – Ч.2. – С. 83–86.
12. Сариєнко В. К. Математика : Навч.-метод. пос. (на допомогу вчит. поч. класів). / В. К. Сарієнко, В. В.Сарієнко, І. Р. Пучков. – Слов’янськ, 2017. –72 с.
13. Стойлова Л. П. Математика :Учебник для студ. ф-тов нач. обуч. / Л. П. Стрйлова. – М., «Академия», 1999. – 424 с.

ЗМІСТ

Сарієнко Владислав Костянтинович
кандидат педагогічних наук, доцент
Сарієнко Володимир Владиславович
кандидат педагогічних наук, доцент
Пучков Ігор Русланович
кандидат педагогічних наук, доцент

МАТЕМАТИКА

Множини. Відношення на множині
Елементи математичної логіки. Поняття. Судження

Навчально-методичний посібник
(на допомогу вчителю початкової школи)

Художнє оформлення: Плахотський О. В.

Коректор: к. п. н., доц. Тищенко Л. М.

Рекомендовано до видання
вченою радою ДВНЗ „Донбаський державний педагогічний університет”,
вченою радою Донецького обласного інституту післядипломної освіти