В. К. Сарієнко, В. В. Сарієнко, В. Ф. Чайченко

АРИФМЕТИКА

НЕВІД'ЄМНИХ ЦІЛИХ ЧИСЕЛ

В. К. Сарієнко, В. В. Сарієнко, В. Ф. Чайченко

АРИФМЕТИКА НЕВІД'ЄМНИХ ЦІЛИХ ЧИСЕЛ

На допомогу вчителю початкових класів

Навчально-методичний посібник

Слов'янськ
2017

УДК 373.3.016:511-028.31(07)

ББК 22.1

САРІЄНКО В. К. Арифметика цілих чисел. (Невід'ємні цілі числа. Числові системи.)*:** Навчально-методичний посібник / ***В. К. Сарієнко, В. В. Сарієнко, В. Ф. Чайченко. – Слов'янськ: 2017. – 104 с.

Рецензенти:

Митник О. Я. – доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри психології національного університету імені М.П.Драгоманова (м. Київ).

Макаренко С. І. – проректор з науково-методичної роботи Донецького обласного інституту післядипломної педагогічної освіти, кандидат педагогічних наук, доцент.

Ляшова Н. М. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри природничо-математичних дисциплін ДВНЗ „Донбаськоий державний педагогічний університет.

Навчально-методичний посібник для вчителів початкових класів, студентів вищих педагогічних навчальних закладів.

У посібнику викладені теоретичні і практичні основи теорії арифметики невід'ємних цілих чисел, та числових систем. Матеріал подано відповідно до навчальної програми з математики для педагогічних вищих навчальних закладів спеціальності „Початкова освіта", вимог Державного стандарту початкової школи та змісту освітньо-професійної характеристики вчителя початкової школи.

Матеріал посібника є теоретичним підґрунтям відомостей з математики, визначених освітньо-професійною програмою підготовки вчителя початкової школи і викладених у підручниках з математики для початкових класів.

Оволодіння викладеним у посібнику матеріалом забезпечує вчителю глибоке проникнення в сутність тих математичних понять і відношень, які складають зміст математичної освіти молодших школярів в частині арифметики невід'ємних цілих чисел.

Рекомендовано Вченою радою Державного вищого навчального закладу "Донбаський державний педагогічний університет" як навчальний посібник для спеціальності „Початкова освіта" (протокол № 7 від 23 лютого 2017 р.).

Рекомендовано Вченою радою Донецького обласного інституту післядипломної педагогічної освіти (протокол № 4 від 16 грудня 2016 р.)

Передмова

Навчально-методичний посібник з курсу математики для студентів спеціальності «Початкова освіта» побудований з урахуванням системи математичних понять, які становлять теоретичні основи початкового курсу математики. Його створено з огляду на сучасні вимоги щодо істотного підвищення рівня математичної підготовки таких фахівців і посилення прикладної її спрямованості.

Мета посібника – сприяти поглибленому ознайомленні учителів початкових класів понять і відношень математики як профілюючого предмета, розкрити потенційні можливості теоретичних основ початкового курсу математики як засобу формування ключових та предметних компетенцій молодших школярів.

Шкільний курс математики вимагає від вчителя, насамперед, ґрунтовних математичних знань на рівні вільного оперування ними, бачення змістовно-логічних зв'язків між поняттями, твердженнями та процедурами (алгоритмами). Вимоги суспільства до суттєвого зростання предметної, методичної та наукової компетентності вчителя як високопрофесійного фахівця, спроможного до ефективної професійної діяльності, спричиняють появу необхідності розробки нових посібників, спрямованих на здійснення процесу методико-математичної підготовки учителів початкових класів як складової їх професійної педагогічної освіти.

Математика є наукова галузь, яка посідає одне з ключових місць у загальній системі наук. Зважаючи на це, вертикаль математичної освіти пронизує практично кожну професійну галузь. Потребу в певному обсязі математичних знань (від професійної складової до побутової) має практично кожна людина. Тому математика є однією з провідних і обов’язкових навчальних дисциплін протягом усього шкільного та професійного навчання.

Математика початкової школи закладає у свідомість людини основні первинні, найпростіші кількісні та просторові поняття і відношення, формує і розвиває логіку мислення, формує просторову уяву. Завдяки високому рівню абстрактності кожне математичне поняття вимагає свого опису, твердження – пояснення, висновок – обґрунтування. Якщо ці вимоги не витримуються, то в людини виникають певні незрозумілості, через які математика сприймається як незрозуміла, важка дисципліна.

Початкова школа в системі математичної освіти посідає особливе місце. В молодшому шкільному віці рівень абстрактного мислення ще досить невисокий, тому обґрунтування математичних тверджень, опис понять часто важко піддається дитячому розумінню. Тільки глибоке знання основ математичних понять і відношень, на яких ґрунтується математичний матеріал надає учителю ключ до доступного пояснення його учням. Причому математичні знання вчителя повинні поширюватися значно далі, ніж необхідний обсяг для сьогодення. Адже у зв'язку з розвитком науково-технічного прогресу обсяг знань значно зростає, що знаходить свій відбиток і в шкільних програмах, зокрема й у програмах початкової школи. Цього вимагають і обов'язкові вимоги дидактичних принципів, зокрема, принципу наступності між початковою та середньою ланками освіти.

Засвоєння шкільного курсу математики в сучасних умовах набуває особливої актуальності. Зумовлено це тим, що все більше спеціальностей потребують застосування математичних знань, умінь і практичних навичок. Ознайомлення учнів із математикою як специфічним методом світосприйняття, розуміння ними діалектичного зв'язку її з реальною дійсністю, уявлення про математичне моделювання сприяють розвитку особистості, формуванню наукового світогляду школярів. Усе це зумовлює потребу переглянути методи математичної освіти, починаючи з початкової школи, і вдосконалити методико-математичну підготовку вчителів.

Посібник допоможе учителям систематизувати основні математичні поняття, оволодіти основними ідеями, фактами і процедурами, що лежать в основі розв'язання типових задач із вказаних розділів, сприятиме формуванню предметних математичних компетенцій (обчислювальних, інформаційно-графічних, логічних, геометричних, алгебраїчних), вмінню аналізувати матеріал початкового курсу математики.

Пропонований навчальний посібник написаний відповідно як до нинішніх вимог шкільних програм, так і на перспективу. Представлений у ньому матеріал у деяких випадках поданий у спрощеному варіанті, адекватному до рівня пояснення понять і тверджень, які передбачаються програмою початкової школи.

Аналіз навчального матеріалу шкільних підручників з математики свідчить про те, що вони містять низку змістовних недоліків, через які в учнів часто формується хибне уявлення про основні математичні поняття: „множина", „число" і „величина", які є базовими у початковому курсі математики. Це визначається їхнім винятковим значенням під час формування як найважливіших теоретичних закономірностей, так і практичних дій. Але в чинних шкільних підручниках значна кількість понять і тверджень уводиться на демонстраційному рівні без розкриття їх суті та пояснення зв'язків. Вивчення й аналіз причин низької якості засвоєння математичних понять школярами дає підстави зробити висновок, що головною причиною встановленого факту є низький рівень загальної методико-математичної підготовки вчителів шкіл до діяльності з формування основних математичних понять та уявлень.

Особливістю змісту курсу «Математика» є його професійна спрямованість, що базується на принципах взаємозв'язку математичного і методичного курсів та взаємозв'язку початкового курсу математики й того, що викладається у виші. Лише глибоке знання теоретичних основ початкового курсу математики дасть можливість вчителю розібратися в потоці нових шкільних підручників та напрямах науково-методичних систем.

У першій частині „Невід'ємні цілі числа" поданий матеріал, який містить у собі теоретичну базу поняття натурального числа, числа нуль і операцій над цими числами. Розглянуто два підходи: теоретико-множинний і аксіоматичний. Під час написання цього розділу було використано матеріали наукових матеріалів, підручників і посібників, представлених у списку використаної літератури.

У той же час, на відміну від представлених у списку та деяких інших підручників та посібників (окрім [8], [13]), у пропонованому посібнику докладно представлені ознаки подільності, які розглядаються не тільки в традиційному наборі (на 2, 3, 4, 5, 9, 25, 50), а значно цей перелік розширюється – представлено алгоритм визначення подільності на будь-яке просте число, зокрема, на 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... Пропонуються методичні рекомендації до викладу окремих, найбільш абстрагованих понять і операцій. Теми і розділи супроводжуються необхідним практичним матеріалом.

Зміст, обсяг і структура посібника визначені багаторічним вивченням досвіду викладання математики вчителями початкової школи, змістом навчальних підручників і посібників з математики, остаточним рівнем математичних знань учнів-випускників початкової школи.

Сучасні вимоги Галузевих стандартів підготовки майбутніх учителів початкових класів, нова концепція особистісно-зорієнтованої освіти, зміни, які відбуваються в початковій школі, обґрунтовують необхідність змін і в методико-математичній підготовці студентів педагогічних університетів до роботи з молодшими школярами, що актуалізують дослідників до розроблення шляхів оновлення та вдосконалення цієї підготовки, одним з яких і є даний посібник. Автори сподіваються, що навчально-методичний зміст посібника сприятиме якісному засвоєнню й усвідомленню студентами базових математичних понять і фактів, без яких професійна підготовка майбутнього вчителя початкової школи не може бути достатньою.

Посібник написано на основі джерел, зазначених у списку літератури, а також власного багаторічного досвіду викладання математики на факультеті підготовки вчителів початкових класів.

Посібник розрахований на вчителів початкової школи та студентів факультетів підготовки вчителів початкових класів вищих навчальних закладів 2 – 4 рівнів акредитації.

НЕВІД’ЄМНІ ЦІЛІ ЧИСЛА

Розділ І. Сутність кількісного натурального числа та арифметичних дій

1. Теоретико-множинна суть кількісного натурального числа

На сучасному етапі математика набула такої глибини розвитку, що стала універсальним інструментом для становлення та досліджень будь-якої науки. Завдяки цій універсальності вона зайняла особливе місце в системі наук. Її методи використовуються як у технічних областях, так і в суто гуманітарних. Тому її не можна віднести ні до гуманітарних, ні до природничих. Рівень абстрактності в математиці є таким високим, що нині вона розглядає не тільки кількісні відношення і просторові форми реального світу, а й будь-які уявні відношення і форми, які мають свої основи в реальному світі. Це надає можливість значно розширити поле математичних досліджень, вторгнутися в такі заповідні області як психіка, біоенергетика, які довго вважалися недоступними. Це стало наслідком високого рівня абстрагування від конкретного змісту об’єктів, що вивчаються. Але абсолютний відрив від змісту неможливий, бо без нього втрачається смисл самої математики. Високий рівень абстракції і конкретний зміст – це дві протилежності єдиного цілого, містком між якими виступає *модель*.

Математична модель – це наближений опис будь-якого класу явищ реального світу, виражений за допомогою математичної символіки [17, с.21]. Модель – це не саме явище, а його наближений образ, позбавлений низки властивостей цього явища. Наприклад, у фізиці в молекулярно-кінетичній теорії для розкриття властивостей та встановлення закономірностей поводження і взаємодії газів розглядається поняття ідеального газу. У реальності газоподібна речовина складається з дрібних часточок – молекул, між якими діють різні сили взаємодії. Розміри молекул дуже малі порівняно з відстанями між ними, тому й сили взаємодії між ними надто малі. Тому для спрощення міркувань та розрахунків прийнято об'ємом молекул та силами взаємодії між ними зневажати і вважати, що взаємодія між молекулами полягає лише у співударах, причому прийнято вважати, що при співударах енергія не витрачається. Завдяки введенням таких спрощень вивчення реального газу замінюється вивченням його наближеного образу – моделі під назвою ідеальний газ. Метод моделювання є дуже ефективним засобом дослідження, бо надає можливість розглядати певні властивості та відношення об'єкта відокремлено від самого об'єкта, узагальнювати ці властивості, поширюючи їх на інші однорідні об'єкти.

Математичні моделі побудовані на відволіканні від будь-яких властивостей об'єктів реального світу і зосереджують увагу лише на їхніх кількісних і порядкових відношеннях та просторових формах. А засобом утворення такої моделі стало *число*. Воно виконує роль однієї із загальних властивостей скінченної множини – її *чисельності.*

Розглядаючи множину будь-яких елементів, у ній можна виділити дві характеристичні властивості: якісну і кількісну. Якісна визначає, з яких елементів складається множина, кількісна – скільки елементів у множині. Кількісна властивість множини і є *чисельність.*

Виникнення чисел, як і всіх інших математичних понять, було результатом практичної діяльності людини. Уже на стародавніх етапах розвитку суспільства наявною була потреба в кількісній оцінці продуктів діяльності. Серед багатьох задач була і задача встановити, чи рівна кількість елементів у множинах якихось побутових об'єктів, а якщо ні, то в якій множині їх більше і на скільки більше. Наприклад, чи є приріст гурта худоби, або чи вистачить списів кожному воїну? На перших порах порівняння двох множин відбувалося на основі зіставлення елементів однієї множини з елементами іншої, тобто на основі встановлення взаємно однозначної відповідності між множинами. Якщо така відповідність була наявна, то і множини вважалися складеними з однакової кількості елементів. Якщо ж ні, то множина, в якій залишались елементи, мала більше елементів ніж інша. Цей спосіб не потребував переліку. Але його не завжди можна було використовувати. Наприклад, неможливо було таким зіставленням порівняти приріст табуну коней через певний час, наприклад, через рік. Тому для порівняння почали використовувати множини-посередники, наприклад, мішки з камінцями, або зарубки на палицях, і вже зіставлялися не самі об'єкти, а їхні множини-посередники.

З часом, унаслідок необхідності фіксувати ту чи іншу кількість об'єктів, виникла символіка у формі чисел, яка значно спростила порівняння. Відпала необхідність носити мішки з камінцями або палиці із зарубками. Унаслідок зіставлення символів виникла письмова нумерація, а разом з нею й усна. Числа стали універсальною множиною, яка дала змогу порівнювати будь-які множини незалежно від їхньої природи, місця розташування, сприйняття. Числення вийшло на абстрактний рівень. На цьому ґрунті й виникло поняття *числа*.

Виникнення поняття числа надало можливість вивчати кількісні відношення незалежно від об'єктів, які з ними зіставляються. Так з'явилася теоретична наука про числа, яку назвали "арифметика".

Оскільки з розвитком господарчої діяльності ускладнювалися й арифметичні розрахунки, виникла й потреба у розширенні множини чисел. Тому, щоб відрізнити від нових числових множин ту множину, за допомогою якої виконувалася лічба, їх стали називати *натуральними числами* (від слова *nature* – природа), тобто числами, за допомогою яких обчислювалася кількість об'єктів з навколишнього світу. Термін "натуральне число" вперше використав римський учений Боецій (475-524 рр. н.е.).

Кожна математична теорія вивчає множини з тими чи іншими властивостями елементів та відношеннями між ними. Коли ми розглядаємо кількісну властивість якоїсь скінченної множини, то, здебільшого, нам доводиться розв'язувати одну з двох задач:

1) встановити кількість елементів у заданій множині, іншими словами, дати їй кількісну оцінку;

2) встановити упорядкованість заданої множини.

Обидві ці задачі розв'язуються за допомогою операції *лічби*. Будь-яка лічба елементів заданої скінченної множини є встановлення взаємно однозначної відповідності між нею та частиною деякої стандартної множини, яка прийнята для фіксування елементів будь-якої множини.

Найменша кількість елементів, яку може мати непорожня множина, це один елемент. Така множина називається *одноелементною*. Тому числовий ряд починається з числа 1.

Процес лічби (встановлення кількості) елементів деякої конкретної множини за допомогою чисел полягає в тому, що ми встановлюємо взаємно-однозначну відповідність між елементами множини й елементами числового ряду, починаючи з одиниці. При цьому нас не цікавить, якому елементу яке число відповідає. Головне тут – яке число відповідає останньому елементу. Яке число – стільки й елементів, тобто *число* в цьому разі *є кількісною характеристикою скінченної множини.*

Якщо ж насамперед нас цікавить, у якому порядку розташовані елементи даної множини, то істотним є питання, якому елементу яке число відповідає. Природно, що останньому елементу буде відповідати таке ж число, як і в кількісній характеристиці множини. Наприклад, щоб визначити порядок елементів якоїсь множини з чотирьох елементів, ми говоримо: "перший", "другий", "третій", "четвертий". На цьому процес лічби закінчується, бо названі всі елементи. Підрахувавши елементи цієї множини, ми говоримо, що в ній чотири елементи, тобто отримуємо кількісну характеристику заданої множини. Але щоб її одержати, використовуються числові символи, які мають таке ж позначення, як і кількісні. У цьому моменті кількісна характеристика множини й порядковий номер останнього елементу множини збігаються. Число, що відповідає кількості елементів заданої скінченної множини, ще називається *потужністю множини* (часто можна зустріти термін *чисельність*).

Розглянемо поняття натурального числа як моделі переліку предметів.

Система модельної побудови тих чи інших понять передбачає іноді дуже складні структури. Вони представляють собою як одноступеневі, так і багатоступеневі конструкції. Одноступеневі моделі – це такі, які є безпосереднім спрощеним образом об’єкта, що вивчається. Це, наприклад, поняття математичного маятника. Воно відрізняється від реального маятника безпосередньо тим, що в ньому не враховується сила опору повітря, сила тертя в точці закріплення та інші фактори. Багатоступеневі моделі – це такі, які пов’язують об’єкт-прообраз з кінцевим образом за допомогою побудови системи моделей. Наприклад, щоб побудувати просторову модель тіла, треба спочатку побудувати площинні моделі його перерізу. Тобто одна модель ґрунтується на іншій. У цьому разі кожна нова модель-надбудова виступає наслідком попередньої зі своїми додатковими властивостями. Попередня ж модель має узагальнювальні властивості відносно неї і дає можливість побудувати клас моделей-надбудов.

Як же у цій системі виглядає теорія натуральних чисел, тобто що представляє собою *натуральне число як математична модель переліку предметів*?

Множини, між елементами яких можна встановити взаємно-однозначну відповідність, називаються *рівнопотужними*. Відповідно до цього всі множини, які не перетинаються, поділяються на класи рівнопотужності, оскільки взаємно-однозначна відповідність визначає розбиття множин на класи еквівалентності:

1°. $M \Leftrightarrow M$ – *рефлексивність;*

2°. $[M_1 \Leftrightarrow M_2] \Rightarrow [M_2 \Leftrightarrow M_1]$ – *симетричність;*

3°. $[M_1 \Leftrightarrow M_2 \wedge M_2 \Leftrightarrow M_3] \Rightarrow [M_1 \Leftrightarrow M_3]$ – *транзитивність.*

Нехай задана якась скінченна множина *P*, яка має потужність *p=n(P)*. Зберемо в один клас усі рівнопотужні множини, які мають потужність *p*. Тобто, якщо *P* – множина днів у тижні, то в один клас із нею попадуть всі многокутники, що мають сім вершин, усі слова, що складаються із семи букв, кольори райдуги та ін. До складу іншої множини *К*, не рівнопотужної з *P*, і яка має потужність *k*, зберемо всі рівнопотужні множини, що мають потужність *k*. Наприклад, якщо *К* – множина пальців на руці, то в один клас із нею попадуть кількість дільників числа 16, кількість робочих днів у тижні, кількість літер у слові "число" та інші, що мають потужність 5, і так далі. У результаті цього процесу всі скінченні множини будуть розподілені за класами рівнопотужності. Отже, будь-які дві множини одного класу будуть рівнопотужними, а будь-які дві множини різних класів – не рівнопотужними.

Загальною властивістю множин одного класу є те, що вони мають однакову потужність. Оскільки потужність кожного класу рівнопотужних множин різна, то вона позначається певним символом. Звідси випливає, що потужність рівнопотужних множин позначаються однаковими символами, а не рівнопотужних – різними. Потужність (кількісну характеристику) множин одного класу еквівалентності і називають *натуральним числом.* Наприклад, кількісна характеристика множин, рівнопотужних множині днів тижня, є натуральне число „сім", а кількісна характеристика множин, рівнопотужних множині пальців на руці є натуральне число „п'ять".

Отже, ***кількісне натуральне число – це кількісна характеристика класу скінченних рівнопотужних множин.*** У спрощеному вигляді поняття натурального числа можна сформулювати як ***кількісна характеристика певної скінченої множини.***

Із цього означення випливає, що кожній скінченій множині *P* відповідає тільки одне натуральне число *p = n(P)*, але кожному натуральному числу *р* відповідають різні рівнопотужні множини одного класу еквівалентності. Тому числу „п'ять" буде відповідати і множина сторін п'ятикутника, і множина літер у слові „число", і множина пальців на руці і т.д.

Упорядковану множину натуральних чисел називають *натуральним рядом* або *рядом натуральних чисел.* Множину натуральних чисел позначають символом *N*.

Виконуючи підрахунок елементів заданої множини *Р*, наприклад, днів у тижні, ми починаємо рахувати з одиниці і закінчуємо числом сім. Очевидно, що кількість днів з понеділка до п'ятниці не перевищує кількості днів від понеділка до суботи, а кількість днів від понеділка до суботи не перевищує кількості днів від понеділка до неділі. Із цього факту доцільно ввести поняття *відрізка натурального ряду.*

ОЗНАЧЕННЯ. ***Відрізком N_a натурального ряду називається множина натуральних чисел, що не перевищують натурального числа а****, тобто* $N_a = \{x / x \in N, x \le a\}$.

Уведення поняття відрізка натурального ряду дає можливість уточнити поняття лічби елементів множини. У процесі лічби ми кожному елементу з множини ставимо у відповідність один елемент з відрізка натурального ряду.

ОЗНАЧЕННЯ. ***Лічбою елементів множини А називається встановлення взаємно-однозначної відповідності між елементами цієї множини і відрізком натурального ряду N_a*** [17, с.125].

Найбільш істотним питанням у лічбі є встановлення писемної та усної нумерації. З теоретико-множинних позицій це виглядає так: кожна множина має певну кількість елементів, тобто чисельність. Але для її фіксації треба ввести певні позначення і цим позначенням дати назву. Оскільки це явище цілком умовне, то в процесі життєвої практики у різних народів виникла своя символіка в позначенні. Наприклад, в арабській системі лічби чисельність множини, що має один елемент {|} позначена символом 1, чисельність множини, що має два елементи – {||} – символом 2, три елементи – {|||} – 3, чотири елементи – {||||} – 4, п’ять елементів – {|||||} – 5 і т.д. Відповідно цим символам була дана і назва „один”, „два”, „три”, „чотири”, „п’ять” і т.д. У системі дій ця нумерація виглядає так. Наприклад, 2+3. Це значить, що до елементів множини {||} треба приєднати елементи множини {|||}. Одержимо нову множину {|||||}. У символічній чисельній формі це буде виглядати як 2 + 3 (приєднання будемо позначати символом +. Але чисельність множини {|||||} позначається символом “5”, значить 2 + 3 = 5.

Аналогічно в плані нумерації виглядає і дія віднімання.

Число “нуль”

Розглядаючи множини, ми говорили, що вони можуть бути порожніми або непорожніми. Узагальнюючи поняття рівносильності множин, вважаємо, що всі порожні множини рівносильні між собою, тобто утворюють особливий клас, клас порожніх множин, тобто множин, що не мають елементів.

Розгляд кількісної характеристики непорожніх скінченних множин привів нас до поняття натурального числа. Очевидно, що порожня множина є теж множина, і, як і всі множини, вона має свою потужність (кількісну характеристику). Але вона відрізняється від потужності (кількісної характеристики) непорожніх множин тим, що непорожні множини містять у собі хоча б один елемент, а порожня множина їх не має. Тому й символ, яким позначається потужність порожньої множини, відрізняється від позначень потужності інших множин. Вона позначається символом „0” і має назву „нуль”. Ця назва утворилася від латинського слова „*nullus*” (нуллюс) – *ніякий*. Таким чином можна записати $n(\varnothing) = 0$. У прикладному значенні число „нуль”, як потужність порожньої множини, свідчить про нейтральний стан. Наприклад, в економіці – що немає ані прибутку, ані збитку; у механіці – що тіло не рухається ні в заданому, ні в зустрічному напрямку і т.д.

Якщо до чисел натурального ряду приєднати число „нуль”, то такий натуральний ряд будемо називати *розширеним*, а множину чисел $\{0\}\cup N$ – *множиною невід’ємних цілих чисел.*

Отже, теорія моделей свідчить, що якого б рівня абстракції вона не набувала, своїми коренями вона сягає реального світу.

Відношення “дорівнює” і “менше”

Із розглянутих властивостей випливає дуже важливий висновок, що натуральні числа знаходяться між собою у певних порівняльних відношеннях. Розглянемо їх.

Нехай задані два цілих невід’ємних числа a і b. З кількісних позицій вони показують численність елементів скінченних множин A і B: $a = n(A)$, $b = n(B)$. З ємкісних же позицій вони характеризують потужності цих множин. Якщо ці множини рівнопотужні, то їм відповідає одне і те ж число, тобто $a = b$.

<u>*Означення.*</u> ***Числа a і b називаються рівними, якщо вони характеризують чисельності рівнопотужних множин:***

$$a = b \Leftrightarrow A \sim B, \text{ де } n(A) = a,\ n(B) = b$$

Якщо множини A і B не рівнопотужні, то й числа, які їх характеризують, теж різні. У цьому разі, ***якщо множина A рівнопотужна власній підмножині множини B, де n(A)= a і n(B)= b, то говорять, що число a менше числа b, і записують a < b,*** тобто $a < b \Leftrightarrow A \sim B_1$, де $B_1 \subset B$ і $B_1 \neq B$.

Нехай $a < b$. Тоді якщо натуральне число x таке, що $x \le a$, то $x < b$. Це свідчить про те, що при $a < b$ відрізок натурального ряду N_a є власною підмножиною відрізка N_b. правильним є і зворотне твердження.

Так одержуємо ще одне означення відношення “менше”:

<u>*Означення.*</u> ***Будемо вважати число a меншим за число b, якщо відрізок натурального ряду N_a є власною підмножиною відрізка цього ряду N_b.***

З наведених суджень випливає, що якщо число ***a*** передує числу ***b***, то ***a < b.*** Але ж у цьому разі ***b*** слідує за ***a***. В цьому разі говорять, що ***b більше a,*** і записують ***b > a.***

Методичний коментар.

Логіка викладу введення поняття про число вимагає від учителя знання таких понять як множина, скінченна множина, чисельність множини, потужність множини, кількісне натуральне число, натуральний ряд чисел, лічба, нумерація, поняття числа „нуль”, множина невід'ємних цілих чисел, поняття відношень „дорівнює”, „менше”, „більше”.

Викладений вище матеріал є теоретичною основою для введення поняття про число в курсі математики початкової школи з теоретико-множинних позицій. Оволодіння цим матеріалом забезпечує можливість учителю побудувати урок з математики в початковій школі строго у відповідності до логіки побудови найголовнішого поняття математики – поняття про число.

З викладених теоретичних посилів випливають наступні висновки, які надають змогу учителю доступно пояснити учням зміст понять, що уводяться.

Поняття числа. *Кожна множина будь-яких елементів має дві властивості – якісну і кількісну.*

Якісна властивість показує, з яких елементів складається множина. Ця властивість розглядається різними науками: якщо це множина космічних об'єктів – астрономією, якщо це множина рослини – ботанікою, тварин – зоологією і т.д.

Кількісна властивість указує, скільки елементів у множині. Вона є предметом вивчення математики. Отже, ***кількісна характеристика будь-якої скінченної множини і є натуральне число****. Властивість кількісності має свою систему символів і термінів, отже і число має свої позначення и назви.*

Обмежена сукупність послідовно розташованих натуральних чисел називається ***відрізком натурального ряду чисел****.*

Лічба елементів множини *– це присвоєння кожному елементу множини певного числа у зростаючій послідовності, починаючи з числа 1.*

Число нуль – *це кількісна характеристика порожньої множини. Оскільки лічба починається з числа 1 і триває до числа n, то дітям пропонується здійснювати зворотний відлік. Наприклад, з коробки, у якій 5 яблук, пропонується діставати по одному й рахувати, скільки залишилося. Коли з коробки забрали останнє яблуко, коробка залишилася порожньою. Такий кількісний стан і позначається значком 0.*

Поняття ***дорівнює, більше, менше.*** *Ці поняття доцільно уводити наочно, створюючи пари з елементів двох множин.*

Якщо при створенні пар вичерпані усі елементи обох множин, то говорять, що в обох множинах елементів ***порівну****, що у символічній формі позначається як* $n = n$ *(5 = 5, 4 = 4, 1 = 1 та ін.).*

Якщо ж при створенні пар елементи однієї множини вичерпалися, а в іншій ще ні, то говорять, що кількість елементів першої множини менша за кількість елементів другої, що у числовій формі представляється, як $m < n$ *(4 < 5, 6 < 8 та ін.) або навпаки, що в другій множині елементів більше, ніж у першій, тобто* $n > m$ *(5 > 4, 8 > 6 та ін.).*

Однак теоретико-множинний підхід у подальшому розгляді поняття про число, а особливо у відношенні між числами, не забезпечує повноти понятійного апарату будь-якої теорії, оскільки будь-яка система понять будується за принципом послідовності, тобто кожне наступне поняття спирається на якісь попередні і визначається через них. Але в цьому разі повинні бути якісь поняття і відношення, які є первинними, а значить неозначуваними. На початковому періоді розвитку аксіоматичної побудови теорії аксіоми *розглядалися як очевидні твердження. Проте з часом, коли одні й ті ж теорії будувалися з різних вихідних позицій, зокрема, завдяки М. І. Лобачевському, „…аксіоми стали розглядатися як твердження, які умовно, (за домовленістю,* ***ред.наша****), приймаються істинними без доведення в межах певної теорії” [8, с. 190].*

От і в нашому випадку, в теоретико-множинному підході використовується термін ***множина****. Поняття множини є первинним, але не завжди очевидним. Тому воно може лише описуватися на певному наочно-образному рівні. Такими ж поняттями є поняття* ***кількість****,* ***одиниця****,* ***слідувати за*** *та інші. Відсутність означення цих понять значно утруднює визначення і доведення багатьох і багатьох властивостей і відношень у будь-якій теорії, зокрема і в теорії невід'ємних цілих чисел. Ці утруднення певним чином впливають на розуміння зазначених понять і відношень. Тому логічним кроком у побудові теорії невід'ємних цілих чисел є розгляд* ***аксіоматичного підходу*** *до визначення поняття натурального числа. Такий підхід дає ключ до представлення математичних понять початкового кусу математики в логічно обґрунтованому об'єктивованому вигляді в шкільних підручниках і забезпечить усвідомлене сприймання навчального матеріалу.*

2. Аксіоматичний підхід до визначення поняття натурального числа

Для того щоб розглянути аксіоматичний підхід до поняття натурального числа, треба ввести деякі фундаментальні поняття з теорії арифметики, а також визначитись у відповідній термінології.

По-перше, що ми розуміємо під поняттям аксіоматики?

Розглядаючи будь-які математичні поняття, ми відмічаємо, що всі вони ґрунтуються на певних інших поняттях, а ці – ще на інших і так далі. Наприклад: „Квадрат – це прямокутник, у якого всі сторони рівні”. $\Rightarrow$ „Прямокутник – це чотирикутник, у якого всі кути рівні”. $\Rightarrow$ „Чотирикутник – це многокутник, який має чотири сторони”.

„Многокутник – замкнена ламана лінія з декількох відрізків, які лежать в одній площині”. $\Rightarrow$ „Ламана лінія – це сукупність відрізків, з’єднаних послідовно, тобто, кінець одного є початком іншого”. $\Rightarrow$ „Відрізок – це частина прямої лінії, обмежена з двох кінців точками”. $\Rightarrow$ “Точка -?”, “Пряма - ?”. Розглядаючи цей ланцюг, ми дійшли до понять, які визначити вже неможливо, бо вже немає більш понять, простіших за них. Тому їх приймають без означення, на емпіричному, описовому, або умоглядному рівні. Такі найпростіші поняття, які приймаються без означення, називаються аксіоматичними, а відношення, якими пов’язуються між собою аксіоматичні поняття – ***аксіомами.*** Залежно від того, якого розділу математики аксіоми стосуються, вони об’єднуються в групи й утворюють систему аксіом тієї чи іншої області математики. Так, є системи аксіом у геометрії, в алгебрі, в арифметиці та інших науках.

2.1. *Алгебраїчні операції*

У математиці поряд із відношеннями між множинами розглядаються і тісно пов’язані з ними дії, за допомогою яких виконуються певні перетворення з елементами цих множин. Ці дії називаються операціями. Операції за своєю суттю залежать від характеру об’єктів, над якими вони виконуються. Так, якщо об’єктами є множини, то над ними виконуються операції об’єднання, перерізу, доповнення, декартового добутку тощо. Якщо це висловлення, то над ними виконуються операції заперечення, кон’юнкції, диз’юнкції, імплікації, еквіваленції та ін. Над числами виконуються операції додавання, віднімання, множення, ділення тощо. У деяких випадках операції над елементами різних видів об’єктів за певними властивостями збігаються, в інших – ні. Намагання дослідити ці властивості в різних множинах, встановити взаємозв’язок між ними привело до появи загального поняття алгебраїчної операції. Це поняття лягло в основу аксіоматичної побудови різних математичних теорій і, зокрема, теорії натуральних чисел.

Щоб зрозуміти суть аксіоматичної побудови теорії натуральних чисел, потрібно ввести поняття і відношення, які б дозволили визначити поняття натурального числа й побудувати систему дій і відношень між числами.[1/]

Означення 1. ***Бінарною алгебраїчною операцією (∗) на множині X називається відображення (x;y)→z, яке за правилом f ставить у відповідність до будь-якої упорядкованої пари елементів (x;y) цієї множини однозначно визначений третій елемент z тієї ж множини.***

Якщо ж відображення f одному елементу з множини X ставить у відповідність лише один певний елемент з тієї ж множини, то алгебраїчна операція називається *унарною*. Наприклад, $a \xrightarrow{f} -a$

Означення 2. ***Частковою алгебраїчною операцією на множині X називається відповідність, за якою з деякими парами елементів із множини X зіставляється один елемент тієї ж множини.***

Означення 3. ***Множина Y пар (x;y), яким відповідає елемент z, називається областю визначення алгебраїчної операції.***

Означення 4. ***Алгебраїчна операція (∗) на множині X називається порожньою, якщо жодній парі (x;y) з множини X не відповідає елемент $z \in X$.***

Нехай на множині X задана алгебраїчна операція $*$ і A – певна підмножина множини X.

Означення 5. ***Якщо для будь-якої пари (x;y) елементів з підмножини A відповідний елемент z теж належить до підмножини A, то підмножина A називається замкненою відносно заданої алгебраїчної операції на множині A.***

[1] / Оскільки ми пропонуємо лише оглядове ознайомлення з алгебраїчними операціями, обмежимося лише тими поняттями, які необхідні для подальшого висвітлення понять теорії натуральних чисел.

Означення 6. ***Алгебраїчна операція (*) називається асоціативною на множині X, якщо для будь-яких елементів з множини X виконується рівність*** $a * (b * c) = (a * b) * c$.

Означення 7. ***Алгебраїчна операція (*) називається комутативною на множині X, якщо для будь-яких елементів з множини X виконується рівність*** $a * b = b * a$.

Означення 8. ***Алгебраїчна операція (*) називається скорочуваною на множині X, якщо з умов*** $a * x = a * y$ ***і*** $x * a = y * a$ ***випливає, що*** $x = y$.

Подані вище означення стосуються виразів, які пов'язані однією алгебраїчною операцією. Проте в математиці є багато операцій, які, між іншим, певним чином пов'язані між собою.

Нехай задані дві алгебраїчні операції, які позначимо (∘) і (∗).

Означення 9. ***Назвемо операцію ∘ дистрибутивною відносно операції ∗ на множині X, якщо виконується рівність***

$$a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c).$$

Нехай у множині *X* задана алгебраїчна операція *. Тоді:

Означення 10. ***Елемент*** *e* ***називається нейтральним відносно операції * на множині X, якщо для всіх елементів*** $a \in X$ ***виконується рівність*** $a * e = e * a = a$.

Означення 11. ***Елемент*** *ā* ***називається симетричним до елементу a на множині X, якщо виконується рівність***

$$a * \bar{a} = \bar{a} * a = e.$$

Означення 12. ***Елемент*** *p* ***називається поглинаючим відносно алгебраїчної операції ∗ на множині X, якщо для будь-якого елементу x з множини X виконується рівність*** $x * p = p * x = p$.

Означення 13. ***Нехай ∗ – скорочувана і комутативна алгебраїчна операція, яка задана на множині X. Тоді операція ∘ називається оберненою до операції *, якщо*** $x \circ y = z$ ***тоді і тільки тоді, коли*** $y * z = x$.

2.2. **Аксіоматика натуральних чисел**

Аксіоматичну побудову арифметики натуральних чисел в основному пов'язують з іменем італійського математика Д. Пеано (1891 р.), хоча аксіоматичну характеристику натуральному ряду трохи раніше (у 1888 р.) дав німецький математик Ю. Дедекінд.

При аксіоматичній побудові теорії натуральних чисел за Д. Пеано вводяться одне головне відношення „*b слідує за a*" і чотири аксіоми. Ці відношення й аксіоми лягли в основу визначення поняття натурального числа і подальшої побудови всієї системи.

<u>*Означення.*</u> ***Натуральними числами називаються елементи будь-якої непорожньої множини N, у якій для елементів a і b існує відношення „b слідує за a" (число, яке слідує за числом a, будемо позначати a'), яке задовольняє аксіомам:***

1. ***Існує число 1, яке не слідує ні за яким іншим числом, тобто*** $a' \neq 1$ ***для будь-якого числа*** a.

2. ***Для будь-якого числа a існує число*** a'***, яке слідує безпосередньо за a, і притому тільки одне, тобто з*** $a = b$ ***випливає, що*** $a' = b'$.

3. ***Будь-яке число безпосередньо слідує не більше як за одним числом, тобто, якщо*** $a' = b'$***, то*** $a = b$.

4. ***(Аксіома індукції). Будь-яка підмножина M множини N, яка має властивості: а)*** $1 \in M$***; б)*** $a \in M$, $a' \in M$ ***збігається з множиною N, тобто з множиною натуральних чисел.***

Із цього означення випливає низка дуже важливих властивостей.

2.3. **Властивості натурального ряду чисел**

<u>*Означення.*</u> ***Якщо число*** b ***слідує за числом*** a***, то говорять, що*** a ***передує*** b.

1***. Натуральний ряд чисел має початок***.

Ця властивість означає, що натуральний ряд чисел обмежений знизу. Це випливає з першої аксіоми Д. Пеано. Дійсно, число 1 є натуральне число, якому не передує ніяке інше натуральне число, тобто натуральний ряд обмежений знизу.

2. ***Натуральні числа розташовані в ряду в певному порядку, а саме так, що для кожного натурального числа існує тільки одне натуральне число, яке безпосередньо слідує за ним, і кожне натуральне число, окрім 1, само безпосередньо слідує тільки за одним числом***. Це випливає з другої і третьої аксіом Д. Пеано. Виходячи з наших позначень, натуральний ряд чисел має такий вигляд: 1, $1'$, $1''$, $1'''$, ... , які ми позначаємо символами 1, 2, 3, 4, ...

3. ***Натуральний ряд чисел дискретний***. Це означає, що між будь-якими двома сусідніми натуральними числами немає більше натуральних чисел. Множина дробів, наприклад, такої властивості не має.

4. ***Натуральний ряд чисел нескінчений***. Це значить, що в напрямку збільшення він може бути продовжений безмежно. Це випливає з аксіоми 2, тобто яким би великим число p не було, завжди існує ще одне число, яке слідує за ним.

5. ***Між будь-якими двома натуральними числами в кількісній характеристиці існує одне з трьох відношень: „більше”, „менше”, „дорівнює”.*** Це записується так: $a > b$, $a < b$ і $a = b$.

Відношення рівності і нерівності натуральних чисел мають такі властивості:

а) рефлексивності: $a = a$, тобто кожне число само собі дорівнює;

б) антирефлексивності нерівності: відношення $a > a$ хибне;

в) симетричності рівності: якщо $a = b$, то і $b = a$;

в) асиметричності нерівності: якщо $a > b$, то $b < a$;

г) транзитивності рівності: якщо $a = b$ і $b = c$, то $a = c$;

д) транзитивності нерівності: якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$.

Аналогічно і для знака <. Ця властивість випливає безпосередньо з поняття „*менше*”

6. ***У будь-якій сукупності натуральних чисел завжди існує найменше число***. Це безпосередньо випливає з першої та попередньої

властивостей.

З наведених означень відношень „дорівнює”, „менше”, „більше” виходять у початковій школі, коли пояснюють, що $2 = 2$, $3 = 3$, $2 < 3$ і $3 > 2$ і т.д.

У сукупності властивостей натуральних чисел важливу роль відіграють і такі теореми:

7. *Теорема.* ***Будь-яке*** $a \neq 1$ ***має попереднє число і притому тільки одне.***

Доведення. Нехай M – множина, якій належать 1 і всі числа, які мають хоч би одне попереднє. Тоді, якщо $a \in M$, то і $a' \in M$, оскільки a' має попереднє число a. За аксіомою 4 множина M містить усі натуральні числа. Значить будь-яке $a > 1$ має хоч би одне попереднє. Одиничність попереднього числа випливає з аксіоми 3.

8. *Теорема.* ***Якщо числа, які слідують за даними, різні, то й дані числа різні, тобто якщо*** $a' \neq\neq b'$***, то й*** $a \neq b$***.***

Це випливає безпосередньо з аксіоми 2.

9. *Теорема.* ***Якщо дані числа різні, то і наступні за ними числа різні, тобто, якщо*** $a \neq b$***, то і*** $a' \neq b'$***.***

Це випливає безпосередньо з аксіоми 3.

10. *Теорема.* ***Будь-яке натуральне число відмінне від числа, яке слідує за ним, тобто*** $a \neq a'$ ***для будь-якого числа*** a***.***

Доведення. Нехай M – множина, для якої теорема істинна. Тоді за першою аксіомою $1' \neq 1$. Значить $1 \in M$. Якщо $a \in M$, то й $a' \neq a$. А тоді за теоремою 8 і $(a')' \neq a'$, тобто $a' \in M$. А тоді за аксіомою 4 множина M містить усі натуральні числа, тобто $a \neq a'$ для будь-якого числа a.

Принцип математичної індукції

Усі твердження можна поділити на дедуктивні й індуктивні. Дедуктивні твердження це такі, у яких на основі загального висловлення робляться часткові висновки. Наприклад, “У будь-якому трикутнику сума внутрішніх кутів дорівнює 180°”. Це означає, що 180° мають і прямокутні трикутники, і рівносторонні, і різносторонні тощо. Дедуктивні судження, здебільшого, істинні. Дедукція лежить в основі багатьох математичних тверджень. Усі загальні теореми ми доводимо для того, щоб використовувати їх для розв’язання різних часткових задач.

Протилежний напрямок суджень мають індуктивні твердження. Індуктивні судження це такі, коли на основі декількох часткових випадків робиться загальний висновок. Наприклад, витягуючи з коробки кульки з номерами, ми витягли номери 4, 8, 10, 14, 6 і на основі цього зробили висновок, що в коробці всі кулі з парними номерами. Чи достовірний наш висновок? Напевне ні, тому що можливо в коробці є хоча б одна кулька з непарним номером. Тому індуктивні судження, переважно, хибні. Але є й такі задачі, у яких індуктивні методи суджень істинні й найбільш прийнятні. Це здебільшого стосується циклічних процесів. Наприклад, індуктивними методами доведення ми користувалися, коли виводили формулу загального члена арифметичної і геометричної прогресії. Широко використовується принцип математичної індукції і в інших випадках, які ми розглянемо пізніше. У чому ж суть математичної індукції?

Принцип математичної індукції базується на четвертій аксіомі Д. Пеано. З неї випливає, що деяке твердження A буде істинним в усіх випадках (для будь-якого натурального числа n), якщо

а) воно істинне для $n = 1$ і

б) з істинності його для будь-якого числа $n = k$ випливає істинність його і для наступного за ним числа $n = k'$.

Отже, щоб довести істинність твердження A, треба

1) перевірити його істинність для $n = 1$;

2) припустити, що твердження A істинне для якогось числа $n = k$;

3) довести, що воно буде істинним і для $n = k'$.

<u>Теорема.</u> *(про законність математичної індукції).* ***Якщо будь-яке твердження Т, формулювання якого містить натуральне число n, доведене для числа 1 і в припущенні, що воно істинне для числа n, доведене й для наступного числа n', то це твердження буде істинним і для будь-якого натурального числа.***

Дійсно, нехай M – множина тих натуральних чисел, для яких твердження T істинне. Тоді а) число 1 належить множині M (за умовою), б) нехай $n \in M$, тобто для числа n твердження істинне. Але за умовою теореми у цьому випадку твердження буде істинне і для наступного числа n', а це свідчить про те, що $n' \in M$. Отже, множина M має властивості а) і б) аксіоми 4, унаслідок якої вона має містити в собі усі натуральні числа, що означає, що твердження T істинне для будь-якого $n \in N$.

Отже, смисл доведення твердження методом математичної індукції базується на умовиводі: якщо твердження істинне для одного випадку, і з припущення того що воно істинне для n випадків, випливає, що воно істинне і для $n + 1$ випадків (попередньо будемо вважати, що $n' = n+1$), то воно буде істинним і для будь-якої кількості випадків. Для пояснення практичного застосування методу математичної індукції наведемо приклад:

Довести істинність твердження, що $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1. Перевіримо істинність твердження для $n = 1$, тобто якщо в лівій частині ми маємо тільки один доданок. Цей доданок 1^2. $1^2 = 1$. У правій частині, підставивши замість n число 1, маємо $\frac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$. Тобто для $n = 1$ маємо рівність лівої і правої частин твердження: $1 = 1$.

2. Припустимо, що твердження істинне для якогось $n = k$, тобто

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

3. Доведемо, що воно буде істинним і для $n = k + 1$, тобто і для наступного за k числа, тобто

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Дійсно, замінимо суму перших k доданків їхнім значенням, адже це нам відомо з пункту 2, тоді в лівій частині будемо мати вираз $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$. Виконаємо перетворення цього виразу:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6}=$$

$$=\frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}.$$ Знайшовши корені квадратного тричлена в чисельнику (-2 і $-\frac{3}{2}$) і перетворивши його на добуток $(k+2)(2k+3)$, отримаємо $\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$. Порівнявши отриманий вираз з тим, який нам треба було отримати (див. пункт 3), відмічаємо, що вони ідентичні, тобто наше твердження буде істинним для будь-якого n.

Принцип математичної індукції посідає особливе місце в системі математичних доведень, має широке практичне застосування під час розв’язання низки задач і лежить в основі методу доведення багатьох математичних тверджень.

Вправи.

Доведіть за допомогою математичної індукції рівності:

а) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

б) $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$;

в) $1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

г) $1\cdot2+2\cdot3+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

д) $1\cdot4+2\cdot7+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2$;

е) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

є) $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$;

ж) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$;

з) $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + ... + \frac{1}{(3n-2)(2n+1)} = \frac{n}{3n+1}$;

і) $\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + ... + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$;

к) $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{2}{3\cdot 5\cdot 7} + ... + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$;

л) $\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + ... + \frac{2n+1}{n^2(n+1)} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$;

м) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$.

Методичний коментар

Теоретико-множинний підхід у розкритті суті понять і зв’язків між ними в силу своєї предметності відображає в основному їх зовнішню сторону, не забезпечуючи при цьому можливість дослідження їх внутрішньої сторони, яка потребує більш глибокого проникнення в сутність через високій рівень абстрагування. Розв’язання цієї задачі здійснюється за допомогою аксіоматичного підходу, який саме й забезпечує необхідний рівень абстрагування.

У основі аксіоматичного підходу лежить певна система припущень і домовленостей, які оформлюються у вигляді певних визначень і тверджень. У цій системі дослідження перш за все уводяться певні первинні поняття, які не мають означень, оскільки є первинними і не мають логічного ґрунту. Вони називаються аксіоматичними поняттями. У геометрії, скажімо, такими є поняття точки, прямої лінії, площини. У теорії множин – поняття множини.

Аксіоматичні поняття вступають між собою у певні відношення, які називаються аксіомами. Наприклад, „Через дві точки можна провести не більше однієї прямої, яка не співпадає з іншими”.

Або, „З трьох точок, які належать прямій, одна завжди буде між двома іншими”.

Одним з найважливіших понять у теорії числових відношень є поняття арифметичної операції. Отже, підрозділ „Алгебраїчні операції” й надає можливість усвідомити сутність цього поняття та інших, з ним пов’язаних.

Аксіоматичний підхід у теорії числових відношень надає можливість виявити властивості самого поняття числа, числового ряду, числових відношень.

Отже, теоретико-множинний підхід у розкритті суті зазначених операцій відіграє операційну роль, а аксіоматичний підхід забезпечує доказову базу.

При аксіоматичному підході теорія починається з визначення системи аксіом, тобто тверджень, які приймаються за істинні висловлення і визначають первинні (не означувані) поняття і відношення, які приймаються без доведення.

В теорії натуральних чисел існують декілька аксіоматичних систем. Одна з них полягає в тому, що існує операція додавання, яка парі чисел (a;b) ставить у відповідність третє число a+b. Таке число називають сумою двох чисел, а операцію – додаванням. На цій системі аксіом будується вся теорія натуральних чисел.

Існує й інша система, розроблена італійським математиком Д. Пеано, який виходить з того, що існує початок числового ряду – число 1, а числа в ряду розташовані у строго визначеному порядку. Вона дещо простіша за попередню, тому ми й вибрали для визначення поняття натурального числа саме її.

3. Арифметика натуральних чисел

Оскільки натуральне число – це кількісна характеристика деякої скінченної множини, а множини між собою можуть вступати в певні відношення і між ними можна виконувати певні операції, то ці відношення та дії відображаються і на числах, які характеризують дані множини, тобто числа також вступають між собою в певні відношення і між ними можна виконувати певні дії. Розглянемо їх.

3.1. Додавання

Нехай задані дві скінченні множини A і B, які не мають спільних елементів, тобто $A \cap B = \varnothing$. Позначимо чисельність множини A через $n(A)$ і чисельність множини B через $n(B)$. Нехай $n(A) = a$, а $n(B) = b$. Утворимо об'єднання множин A і B, тобто множину $C = A \cup B$. Позначимо чисельність множини C через $n(C)$ і нехай $n(C) = c$. Звідси ж, оскільки $C = A \cup B$, то і $n(C) = n(A \cup B)$. Оскільки множина $A \cup B$ складається з елементів множин A і B, то її чисельність буде залежати від чисельностей цих множин. Позначимо цю залежність як $a + b$, тобто чисельність множини $A \cup B$ буде $a + b$ і будемо називати цей запис сумою чисел a і b, тобто $n(A \cup B) = a + b$. Оскільки ж $n(A \cup B) = n(C)$, а $n(C) = c$, то випливає, що $a + b = c$.

Означення. ***Сумою натуральних чисел a і b називається чисельність об'єднання скінченних множин A і B, які не перетинаються і мають відповідно чисельності a і b. Вона записується: $a + b = c$, де $a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$.***

Сума $a + b$ не залежить від природи елементів множин, бо предметом її утворення є не самі елементи заданих множин, а їхні чисельності, які виражаються натуральними числами.

Означення. ***Процес знаходження суми двох або декількох чисел називається додаванням.***

Узагальнення дії додавання виражається в тому, що сума $n + 1$ чисел представляється як сума n чисел і ще одного, тобто,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + a_{n+1}.$$

Властивості додавання

1. *Сума двох чисел завжди існує.*

Нехай задані дві скінченні множини A і B, які не мають спільних елементів. З теорії множин відомо, що які б не були скінченні множини A і B, завжди можна утворити їхнє об'єднання – скінченну множину $C = A \cup B$. Оскільки чисельності заданих множин виражаються натуральними числами, то і чисельність множини C буде виражена натуральним числом $\boldsymbol{c}$, яке є сумою натуральних чисел $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$, тобто за умови, що $A \cap B = \varnothing$, $a + b = c$, де знаком + будемо позначати бінарну алгебраїчну операцію додавання. А це значить, що які б не були натуральні числа a і b, завжди можна знайти їхню суму, і вона також буде натуральним числом. Отже, сума двох натуральних чисел завжди існує, оскільки завжди існує об'єднання скінченних множин, які не перетинаються і мають чисельностями ці натуральні числа.

2. *Сума двох чисел однозначна.*

При об'єднанні двох скінченних множин A і B утворюється єдина скінченна множина $C = A \cup B$. Оскільки ж множині A відповідає єдине натуральне число a, множині B – єдине натуральне число b, а множині C – єдине натуральне число c, то сума $a + b = c$ буде єдиною.

3. *Додавання комутативне*, тобто для будь-яких цілих невід'ємних чисел a і b виконується рівність $a + b = b + a$.

Дійсно, нехай a – чисельність множини A, b – чисельність множини B і $A \cap B = \varnothing$. Тоді за означенням суми сума $a + b$ є чисельністю множини $A \cup B$, але $A \cup B = B \cup A$, тому й $n(A \cup B) = n(B \cup A)$. Але $n(B \cup A) = b + a$, тому $a + b = b + a$.

4. *Додавання асоціативне*, тобто для будь-яких цілих невід'ємних чисел a, b і c виконується рівність $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Дійсно, нехай задані множини A, B і C такі, що $n(A) = a$, $n(B) = b$ і $n(C) = c$, причому $A \cap B = \varnothing$, $C \cap B = \varnothing$ і $A \cap C = \varnothing$. Тоді за означенням суми множина $(A \cup \mathrm{B}) \cup C$ має чисельність $n(A \cup B) + n(C) = (a + b) + c$, оскільки $(A\cap B)\cup(C\cap B) = (A\cup B)\cap C = \varnothing$. Але за асоціативною властивістю об'єднання $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$, а за означенням суми $n(A\cup(B\cup C)) = n(A) + n(B\cup C) = a + (b + c)$, оскільки $A\cap(B\cup C) = \varnothing$. Звідси випливає, що $(a + b) + c = a + (b + c)$.

5. *Виконується властивість монотонності*, тобто для будь-яких невід'ємних цілих чисел a, b і c, якщо $a = b$, то $a + c = b + c$. Аналогічно, якщо $a < b$, то $a + c < b + c$, якщо $a > b$, то $a + c > b + c$.

Дійсно, виходячи з властивості монотонності для множин, що якщо $A = B$ і C будь-яка множина, виконується відношення $A\cup C = B\cup C$, то на основі означення додавання правильною буде і рівність чисельностей цих множин, тобто $a + c = b + c$.

Виходячи з того, що для відношення $A \subset B$ правильним буде $A\cup C \subset B\cup C$, то істинною буде нерівність $a + c < b + c$. Аналогічно і для останнього випадку.

6. *Виконується властивість* $a + 0 = 0 + a = a$.

Дійсно, з теорії множин відома властивість $A\cup\varnothing = \varnothing\cup A = A$. Тоді за означенням суми справедливою буде і рівність $a + 0 = 0 + a = a$.

На основі означення та властивостей додавання можна вказати і третій підхід до поняття "менше".

Число $\boldsymbol{a}$ *менше числа* $\boldsymbol{b}$, *якщо існує таке третє число* $\boldsymbol{c}\neq 0$, *що виконується рівність* $\boldsymbol{a + c = b}$. *Звідси ж випливає наслідок* $\boldsymbol{a = a + 0 < a + c}$, тобто *сума двох чисел більша за кожний із доданків.*

Аксіоматичний підхід до операції додавання

Ми розглянули додавання з *теоретико-множинних* позицій. Тепер розглянемо додавання з *аксіоматичних позицій*.

Аксіоматичний підхід до поняття натурального числа можна здійснити з різних позицій. Найважливіше тут – що вибрати за основне поняття: суму чисел, відношення порядку, відношення безпосереднього слідування одного числа за іншим тощо. У кожному випадку слід задати систему аксіом, яка б описувала властивості основних понять.

Вище ми визначили поняття натурального числа на основі системи аксіом Пеано, яка спирається на властивості безпосереднього наслідування одного числа за іншим. Покажемо, як за допомогою відношення „безпосередньо слідувати за” можна визначити операцію додавання натуральних чисел.

Нехай нам заданий натуральний ряд чисел. Як ми знаємо, числа в ньому розташовані в певному порядку. Виберемо деяке число m і поставимо задачу встановити, яке число стоїть на k-тому місці після m. Для розв’язання цієї задачі треба виконати певну операцію, за допомогою якої за двома числами m і k можна знайти таке третє число n, яке б відповідало питанню задачі. Назвемо таку операцію *додаванням.*

Для розв’язання зазначеної задачі необхідно ввести дві аксіоматичні умови цієї операції:

1) $n + 1 = n'$ *(*n' *– це число, яке безпосередньо слідує за* n*)*;

2)) $m + n' = (m + n)'$.

За допомогою суджень, які виходять за межі нашої програми, можна довести, що в множині N бінарна алгебраїчна операція, яка задовольняє умовам 1) і 2) існує, причому вона однозначно визначена і має властивості:

а) $m + n = n + m$ (комутативність);

б) $m + (n + p) = (m + n) + p$ (асоціативність);

в) $m + n > m$*;*

г) у будь-якій непорожній підмножині A *множини* N *існує таке натуральне число* m, *що будь-яке натуральне число* $x \neq m$, $x \in N$ *можна представити у вигляді* $x = m + n$, *де* $n \in N$.

На основі викладеного можна сформулювати означення додавання так:

<u>*Означення.*</u> ***Додаванням у множині*** N ***натуральних чисел називається бінарна алгебраїчна операція, яка будь-якій парі***

натуральних чисел *a* ***і*** *b* ***ставить у відповідність певне натуральне число*** *k*, (яке будемо позначати як $k = a + b$) ***знайдене за аксіомами:***

1) $n + 1 = n'$ *(n'- це число, яке безпосередньо слідує за n)*;

2)) $m + n' = (m + n)'$.

Це означення повністю розкриває суть операції додавання. Дійсно, згідно з властивістю *а)* число, яке займає *n*-те місце після *m*, дорівнює числу, яке займає *m*-те місце після *n*. Це число буде *k*, тобто

$m + n = n + m = k.$

Згідно з властивістю *б)* число, яке стоїть на $(n + p)$ місці після *m,* дорівнює числу, яке стоїть на *р*-тому місці після числа $(m + n)$.

Згідно з властивістю *г)* вказаним числом *x* є число *k*, яке дорівнює сумі чисел *m* і *n*.

Згідно з аксіомою 2) число, яке займає наступне місце за *n*-тим числом після *m*, дорівнює числу, яке займає наступне місце після числа $m + n$.

Відношення менше в аксіоматичному підході визначається так:

$a < b \Leftrightarrow (\exists k \neq 0)\ (b = a + k)$, тобто „число $a < b$, якщо існує таке натуральне число *k,* що $b = a + k$».

Розглядаючи *нуль* у додаванні, як бінарній алгебраїчній операції, ми відмічаємо, що він виступає нейтральним елементом:

$n \circ e = e \circ n = n$, тобто для $\circ =$ “+” $e = 0$.

Згідно властивості *в)* число, яке стоїть на *n*-тому місці після *m*, де $n > 0$, не може дорівнювати числу *m*.

Порівняння цього аксіоматичного підходу з поданими вище властивостями показує, що він визначає ті ж властивості додавання, які ми розглянули вище.

Відношення порядку на множині невід’ємних цілих чисел.

Як ми засвідчили вище, число *a* менше числа *b*, якщо існує таке третє число *c*, що виконується рівність $a + c = b$. У цьому разі записують: $a < b$. Наприклад, $5 < 8$, оскільки існує таке число 3, що

5 + 3 = 8. Доведемо, що відношення „ < ” у множині натуральних чисел є відношенням строгого порядку.

<u>*Теорема.*</u> ***На множині невід'ємних цілих чисел відношення "менше" є відношенням строгого порядку.***

Для того, щоб довести це твердження, треба довести, що відношення „менше” асиметричне і транзитивне.

Дійсно, нехай $a < b$ і $b < c$. За означенням поняття „менше” випливає, що для чисел a і b існує таке число k_1, що $b = a + k_1$, а для чисел b і c існує таке k_2, що $c = b + k_2$. Тоді з цих двох рівностей випливає: $c = a + (k_1 + k_2)$, а це значить, що $a < c$, тобто виконується транзитивність.

Тепер доведемо, що на цій множині відношення „менше” асиметричне. Дійсно, якби виконувалася властивість симетричності, тобто $a < b$ і $b < a$, то, виходячи з транзитивності, було б $a < a$. Але це значить, що $a = a + k$, де $k \in N$, чого бути не може.

Розглядаючи упорядкованість множини невід'ємних цілих чисел, нам важливо визначити місце числа *нуль* у цьому ряду. Очевидно, що число *нуль* не може слідувати за будь-яким натуральним числом, тому що будь-яке натуральне число є кількісною характеристикою непорожньої множини, і ніяка непорожня множина не може бути підмножиною порожньої множини. Навпаки, з теорії множин ми знаємо, що порожня множина є невласною підмножиною будь-якої непорожньої множини, тому і її кількісна характеристика повинна передувати кількісній характеристиці будь-якої непорожньої множини. За аксіоматикою Д. Пеано найменшим натуральним числом (що характеризує найменш потужну непорожню одноелементну множину) є число 1. А оскільки порожня підмножина є підмножиною й одноелементної множини, то число нуль повинно передувати числу 1. Тобто ряд невід'ємних цілих чисел починається з числа 0. Перша ж аксіома Д. Пеано для множини невід'ємних цілих чисел тоді буде мати вигляд: *існує число 0, яке не слідує ні за яким іншим числом.*

Отже, ряд невід'ємних цілих чисел починається з числа 0, тобто він має вигляд: $0, 0', 0'', 0''', \ldots$ Назвемо їх цифрами і для зручності позначимо відповідно 0, $0'=1$, $0''= 1' = 2$, $0'''= 2' = 3, \ldots$

Виходячи з вище сказаного, можна доповнити властивості додавання ще такими:

7. Сума двох натуральних чисел завжди більша за кожний з доданків. Дійсно, очевидною є нерівність $a > 0$, оскільки будь-яке натуральне число більше нуля. На основі властивості 5 істинною буде нерівність $a + b > 0 + b$. Але $0 + b = b$. Тоді $a + b > b$. Аналогічно доводиться що і $a + b > a$.

8. Для будь-якого невід'ємного цілого числа a $a' = a + 1$. Дійсно, на основі аксіоми додавання $a + b' = (a + b)'$ виконаємо такі перетворення: нехай $b = 0$. Тоді отримаємо $a + 0' = (a + 0)'$. Але $0' = 1$, а $a + 0 = a$. Підставивши це в попередню рівність, отримаємо: $a + 1 = a'$.

Цей висновок є один з найважливіших в арифметиці, бо він показує, що кожне наступне натуральне число на 1 більше попереднього. Саме він лежить в основі утворення ряду натуральних чисел і визначає методику вивчення молодшими школярами натурального ряду чисел і операції додавання.

В п р а в и.

1. Доведіть двома способами, чому: $3 < 5$; $0 < 8$.

2. Використовуючи означення відношення "менше", доведіть, що для будь-яких натуральних чисел a, b і c виконується твердження: "якщо $a < b$, то $a + c < b + c$ ".

3. Доведіть, що якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.

4. Доведіть, що якщо $a \geq b$ і $b \geq a$, то $a = b$.

5. На основі аксіом Д. Пеано доведіть, що ні одне з натуральних чисел не збігається з наступним за ним числом.

3.2. Множення

Множення з теоретико-множинних позицій – це арифметична операція, яка є похідною від додавання. Поняття множення тут розглядається як спрощений варіант додавання. З таких позицій, зокрема, розглядається множення в початковому курсі математики. Розглянемо обґрунтування цього поняття з теоретико-множинних позицій.

Нехай задано дві множини: $A = \{a, b, c, d\}$ і $B = \{m, n, p\}$. Утворимо їхній декартовий добуток і обчислимо кількість його елементів.

$$A\times B = \{ (a, m), (b, m), (c, m), (d, m),$$
$$(a, n), (b, n), (c, n), (d, n),$$
$$(a, p), (b, p), (c, p), (d, p)\}.$$

У нашій задачі $n(A) = 4$, а $n(B) = 3$. Підрахуємо кількість пар у множині $A \times B$: у прямокутнику три рядки по чотири пари в кожному, тобто кількість пар у прямокутнику $4 + 4 + 4 = 12$. Замінимо запис цієї суми на іншу, скорочену форму: запишемо $4 + 4 + 4 = 4\cdot3$, де перше число показує доданок, а друге – кількість доданків. Операцію скороченого додавання назвемо *множенням*, а числа, які перемножуються – *співмножниками.* Результат множення (число 12) назвемо *добутком*. Отже, згідно з теоретико-множинним підходом запис добутку має такий вигляд:

$$a \cdot b = n(A\times B) = n(A) \cdot n(B), \text{ де } \mathrm{n}(A) = a, \text{ а } n(B) = b,$$

тобто ***добутком цілих невід'ємних чисел a і b називається число елементів декартового добутку множин A і B, де* n(*A*) = *a*, і n(*B*) = *b*,** а ***множенням*** у цьому разі ***називається процес знаходження суми a однакових доданків b.*** Так визначається множення в початковому курсі математики.

На основі узагальнення декартового добутку на n множин можна узагальнити і дію множення, поширивши її на декілька співмножників. Так, оскільки $A \times B \times C \times \ldots \times K \times P = (A \times B \times C \times \ldots \times K) \times P$, то $n(A \times B \times C \times \ldots \times K \times P) = n(A \times B \times C \times \ldots \times K) \times n(P)$, тобто

$a \cdot b \cdot c \cdot \ldots \cdot к \cdot p = (a \cdot b \cdot c \cdot \ldots \cdot к) \cdot p$

Операція множення має такі властивості:

1. *Комутативна властивість. Операція множення комутативна, тобто для будь-яких двох цілих невід'ємних чисел* $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ *справедлива рівність* $\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}$.

Ця властивість має назву *переставний* або *комутативний закон*. Доведемо її.

Нехай задані дві множини A і B і $n(A) = a$, а $n(B) = b$. Тоді на основі означення $n(A \times B) = a \cdot b$. Але з теорії множин ми знаємо, що множини $A \times B$ і $B \times A$ рівнопотужні, тобто будь-якій парі $(a;b)$ з множини $A \times B$ можна поставити у відповідність пару (b, a) з множини $B \times A$ і навпаки. Тому $n(A \times B) = n(B \times A)$, тобто

$$a \cdot b = n(A \times B) = n(B \times A) = b \cdot a.$$

2. *Асоціативна властивість. Операція множення асоціативна, тобто для будь-яких цілих невід'ємних чисел* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *і* $\boldsymbol{c}$ *справедлива рівність*: $(\boldsymbol{a \cdot b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b \cdot c})$.

Дійсно, з теорії множин ми знаємо, що $n((A\times B)\times C)= n(A\times(B\times C))$, оскільки множини $A \times (B \times C)$ і $(A \times B) \times C$ рівнопотужні. Якщо ж $n(A) = a$, $n(B) = b$ а $n(C) = c$, то рівність $n((A \times B) \times C) = n(A \times (B \times C))$ можна записати як $(a \cdot b)\cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

3. *Дистрибутивна властивість (відносно додавання). Операція множення дистрибутивна, тобто для будь-яких цілих невід'ємних чисел* $\boldsymbol{a, b}$ *і* $\boldsymbol{c}$ *справедлива рівність* $\boldsymbol{(a + b) \cdot c = a\cdot c + b\cdot c}$.

Цей закон випливає з дистрибутивної властивості декартового добутку множин, що $(A \cup B)\times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ (*). Якщо $n(A) = a$, $n(B) = b$, а $n(C) = c$ і $A\cap B = \varnothing$, то за означенням добутку маємо, що $n((A\cup B) \times C) = (a + b)\cdot c$. Звідки на основі рівності (*) отримаємо

$$n((A\cup B) \times C) = n((A \times C)\cup(B \times C))$$

і далі за означенням суми та добутку маємо:

$n((A \times C) \cup (B \times C)) = n(A \times C) + n(B \times C) = ac + bc$, що й треба було довести.

Інший спосіб доведення виглядає так:

$$(a + b) \cdot c = \underbrace{(a + b) + (a + b) + \ldots + (a + b)}_{c\ разів} = a + b + a + b + \ldots + a + b =$$

$$\underbrace{a + a + \ldots + a}_{c\ разів} + \underbrace{b + b + \ldots + b}_{c\ разів} = a \cdot c + b \cdot c.$$

Комутативний і асоціативний закони множення можна поширити на будь-яку кількість множників. Як і при додаванні ці закони часто використовуються разом, тобто добуток декількох чисел не зміниться, якщо їх переставити будь-яким чином і якщо будь-яку їхню групу взяти в дужки.

Дистрибутивний закон встановлює зв'язок множення з додаванням

та відніманням і справедливий для будь-якої кількості доданків.

Розгляд операції множення на *множині невід'ємних цілих чисел N* з **аксіоматичних позицій** дає можливість представити її як *бінарну алгебраїчну операцію, яка будь-якій парі* ***(a;b)***, *утвореній з елементів множини* $\{0\} \cup N$, *де* $((a;b) \in (\{0\} \cup N) \times (\{0\} \cup N))$, *ставить у відповідність число* ***c*** *з тієї ж множини і при цьому виконуються умови:*

а) для будь-якого натурального числа виконується рівність

$a \cdot 0 = 0;$

б) для будь-яких натуральних чисел a і b виконується рівність

$ab' = ab + a.$

Число c називається добутком чисел a і b і записується $c = a \cdot b$.

Друга умова означає, що число 1 відносно операції множення є нейтральним елементом, тобто $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. Дійсно,

$$a \cdot 1 = a \cdot 0' = a \cdot 0 + a = 0 + a = a.$$

$1\cdot a = 1\cdot(a–1)+1 = 1\cdot(a–2)+1+1=1+1+1+...+1 = a$, тобто число 1 є нейтральний елемент відносно операції множення (·).

Властивості множення

1. *Операція множення існує і вона єдина*

Спочатку доведемо, що операція множення в множині N завжди існує.

Доведемо цю теорему методом математичної індукції. Для цього треба довести, що вказані властивості виконуються для всього ряду натуральних чисел.

Позначимо символом A множину натуральних чисел a, для яких операція множення існує (виконуються умови а) і б)). Тоді за умовою а) $1\in A$. Припустимо, що число $a \in A$. Доведемо, що і $(a + 1) \in A$. За умовою б) $a(b+1) = ab+a$. Доведемо, що це твердження буде істинним і для $a + 1$ елемента, тобто що і $(a + 1) \in A$.
$(a + 1)\cdot(b + 1) = a(b +1) + (b + 1) = a\,b + a + b + 1 = (a+1)\cdot b + (a + 1)$. А це означає, що і $(a + 1) \in A$. Тоді внаслідок математичної індукції $A \subset N$. Тобто операція множення визначена для будь-яких натуральних чисел.

Доведемо, що операція множення однозначна. Нехай у множині M існують дві операції множення, які мають властивості *а*) і *б*). Одну з них позначимо значком $\cdot\circ$, а другу – $*$. Тоді для обох операцій будуть наявні властивості:

1) $a \cdot 1 = a$ і $a\cdot(b + 1) = a\cdot b + a$;

2) $a * 1 = a$ і $a * (b + 1) = a*b + a$

Доведемо, що для будь-яких a і b виконується рівність

$$a \circ b = a * b. \quad (*)$$

Нехай число a вибране довільно, а число b приймає різні числові значення. Перевіримо виконання рівності для $b = 1$. Оскільки $a \cdot 1 = a$ і $a*1 = a$, то $a \cdot 1 = a\circ 1$, рівність правильна, тобто $1\in M$. Нехай ця рівність виконується для певного $b\in M$, тобто $a \circ\cdot b = a * b$. Доведемо, що вона виконується і для $b' \in M$, тобто $a \circ \cdot b' = a * b'$. (*Нагадаємо, що* $b' = b + 1$). Дійсно, $a \cdot b' = a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a = a * b + a$. Аналогічно $a * b' = a * (b + 1) = a * b + a$. Порівняння результатів операцій · і * приводить нас до висновку, що $a \circ b = a * b$, тобто, що операція множення єдина і $M \subset= N$.

2. *У множині N виконується дистрибутивний закон множення відносно до додавання, тобто* $(a + b) \cdot c = ac + bc$.

Для доведення скористаємося методом математичної індукції. Нехай M – множина, у якій ця властивість виконується. Нехай $a \in M$ і $b \in M$. Доведемо, що властивість виконується для будь-якого натурального c.

Нехай $c = 1$. Тоді $(a + b) \cdot 1 = a + b$. $a \cdot 1 + b \cdot 1 = a + b$ Рівність правильна, значить $1 \in M$.

Нехай твердження, висловлене у теоремі, істинне для певного c, тобто $(a + b) \cdot c = ac + bc$, $c \in M$. Доведемо, що твердження буде вірним і для c', тобто $(a + b) \cdot c' = ac' + bc'$. Ми вже знаємо, що $c' = c + 1$. Тоді $(a + b) \cdot c' = (a + b) \cdot (c + 1) = (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot 1 = ac + bc + a + b = (ac + a) + (bc + b) = ac' + bc'$. Що і треба було довести. Значить теорема істинна для усіх натуральних чисел.

3. *Виконується комутативна властивість, тобто* $ab = ba$.

Цю властивість також доведемо методом математичної індукції.

Нехай M – це множина, у якій ця властивість виконується. Нехай $a \in M$. Доведемо, що і будь-яке b з множини натуральних чисел належить M.

Дійсно, для $b = 1$ маємо $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, тобто для $b = 1$ твердження істинне. Нехай твердження буде істинним для b, тобто $ab = ba$. Доведемо, що воно буде істинним і для b', тобто $ab' = b'a$. Відомо, що $b' = b + 1$. Тоді
$ab' = a \cdot (b + 1) = ab + a = ba + a = (b + 1) \cdot a = b'a$. Тобто $b' \in M$ і $M \subset N$, що і треба було довести.

4. *Виконується асоціативна властивість множення*, тобто

$$(ab)\cdot c = a\cdot(bc).$$

Нехай задані натуральні числа a і b, а множина M – це множина таких чисел c, для яких асоціативна властивість виконується. Доведемо, що вона виконується для будь-якого натурального c.

Нехай $c = 1$. Тоді $(ab)\cdot 1 = a\cdot(b\cdot 1) = ab$, тобто $1 \in M$.

Нехай твердження правильне для певного c, тобто $(ab)\cdot c = a\cdot(bc)$.

Доведемо, що воно правильне і для c', тобто $(ab)\cdot c' = a\cdot(bc')$.

$(ab)\cdot c' = (ab)\cdot(c+1) = (ab)\cdot c + ab = a\cdot(bc) + ab = a\cdot(bc + b) = a(b(c+1)) = a\cdot(bc')$, що і треба було довести. Тобто $c' \in M$ і $M \subset N$.

5. *Виконується властивість монотонності,* тобто якщо $a > b$ і c – певне натуральне число, то $ac > bc$. Аналогічно, якщо $a = b$, то $ac = bc$, якщо $a < b$, то $ac < bc$.

Ми вже знаємо, що коли $a > b$, то існує таке число k, що $a = b + k$.

Нехай $a > b$, тоді $a = b + k$, тоді $ac = (b + k)\cdot c = bc + kc > bc$, оскільки сума більша за доданок. Що і треба було довести.

6. *Добуток будь-якого натурального числа на число “нуль” є число “нуль”*, тобто $a \cdot 0 = 0$. Це випливає з того, що сума a доданків, які дорівнюють 0 буде число 0, тобто $\underbrace{0+0+0+\ldots+0=0}_{a}$. За властивістю комутативності $a \cdot 0 = 0 \cdot a$.

7. *Добуток декількох чисел дорівнює “нулю”, якщо хоч би одне з них дорівнює нулю*. Дійсно, нехай $ab = 0$, причому ні a, ні b не дорівнюють 0. Тоді існує таке число x, що $b = x'$. Тоді маємо:

$$ab = a\,x' = a\,x + a \geq a = 0.$$

Отримуємо суперечність.

Вправи:

1. Обчислити раціональними методами значення виразів, пояснюючи кожний крок перетворення:

а) $4\cdot 17\cdot 25$; б) $(8\cdot 379)\cdot 125$; в) $24\cdot 19\cdot 25\cdot 5$; г) $(40\cdot 7\cdot 3)\cdot 25$;

д) $126 \cdot 24 + 126 \cdot 6 + 126 \cdot 10$

2. Доведіть, що для будь-яких натуральних чисел a , b і c справедливе твердження: якщо $a > b$, то $ac > bc$.

3. Не виконуючи множення, доведіть, що $842 \cdot 58 < 842 \cdot 61$.

4. Які перетворення виразів можна виконати на основі

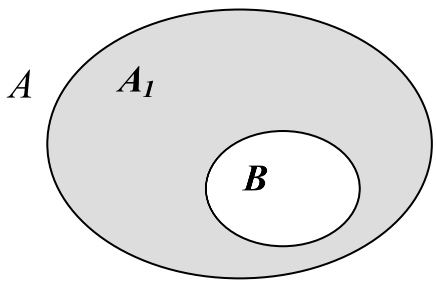
1) комутативного закону, 2) асоціативного закону,

3) дистрибутивного закону?

3.3. Віднімання

Розглянемо задачу. “Учень купив 9 зошитів у лінію та клітку. У лінію було 4 зошити. Скільки було зошитів у клітку?»

З діаграми видно, що множина зошитів у клітку є доповненням множини зошитів у лінію до всієї множини зошитів і $B \subset A$. Тому $A_1 = A \setminus B$. Позначимо чисельність множини A як $n(A) = a$, чисельність множини B як $n(B) = b$, а чисельність множини A_1 як $n(A_1) = c$. З іншого боку, $n(A_1) = n(A \setminus B)$.



A – загальна множина зошитів.

A_1 – множина зошитів у клітку.

B – множина зошитів у лінію.

Оскільки $n(A \setminus B)$ залежить від $n(A)$ і $n(B)$, то $n(A \setminus B) = n(A) – n(B) = a – b$. А звідси можна записати, що $c = a – b$. Назвемо число c різницею чисел a і b. Число a назвемо зменшуваним, а число b – від’ємником. Отже, ***різницею цілих невід’ємних чисел a і b називається число c елементів у доповненні множини B до множини A , або c = a – b.***

У нашому прикладі в клітку було зошитів $9 – 4 = 5$.

Дію, за допомогою якої знаходять різницю $a – b$ називають *відніманням*.

Дія віднімання має безпосередній зв’язок із додаванням.

Якщо розглянути наведену задачу, то спираючись на відомі операції з множинами, можна записати, що

$$A = B \cup (A \setminus B), \text{ де } B \cap (A \setminus B) = \varnothing, \quad \text{звідки}$$

$$n(A) = n\,(B \cup (A \setminus B)) = n(B) + n(A \setminus B) = b + (a - b).$$

Звідси маємо, що $a = b + (a - b)$, тобто різниця $a - b$ є таке число, сума якого з числом b дорівнює числу a.

<u>*Означення.*</u> ***Різницею цілих невід'ємних чисел a і b називається таке ціле невід'ємне число c, сума якого з числом b дорівнює a.***

Отже, $\boldsymbol{a - b = c \Leftrightarrow a = b + c}$.

Із цього випливає, що дія віднімання є дією, протилежною додаванню.

<u>*Теорема.*</u> ***Різниця цілих невід'ємних чисел a і b існує тоді і тільки тоді, коли $b \le a$.***

Доведення. Якщо $a = b$, то $a = b + 0$, звідки $a - b = 0$, а звідси випливає, що різниця $a - b$ існує.

Якщо ж $b < a$, то за означенням відношення «менше» існує таке натуральне число c, що $a = b + c$. Тоді за означенням різниці $c = a - b$, тобто різниця $a - b$ існує.

Навпаки, якщо різниця $a - b$ існує, то значить існує невід'ємне число c, що $c = a - b$, а тоді за означенням різниці $a = b + c$. Якщо $c = 0$, то $a = b$; якщо $c > 0$, то $b < a$ за означенням відношення «менше».

<u>*Теорема.*</u> ***Якщо різниця цілих невід'ємних чисел a і b існує, то вона єдина.***

Доведення. Припустимо, що існують два значення різниці $a - b$: $a - b = c_1$ і $a - b = c_2$. Тоді за означенням різниці маємо: $a = b + c_1$ і $a = b + c_2$, звідки $b + c_1 = b + c_2$, а звідси за властивістю монотонності $c_1 = c_2$.

<u>*Теорема.*</u> ***Виконується дистрибутивний закон відносно віднімання: $(a - b) \cdot c = ac - bc$.*** Дійсно, позначивши $a - b = k$,

отримаємо $a=b+k$, а за властивістю монотонності додавання істинною буде рівність $ac = bc + kc$, або $kc = ac - bc$, звідки $(a - b)\cdot c = ac - bc$.

В п р а в и.

1. Дайте теоретико-множинне тлумачення рівностям:

$$1)\ 9 - 3 = 6; \qquad 2)\ 7 - 7 = 0; \qquad 3)\ 5 - 0 = 5.$$

2. Поясніть, чому наведена нижче задача розв'язується за допомогою віднімання?

„У хлопчика було 5 горіхів. 3 горіхи він віддав товаришу. Скільки горіхів у нього залишилося?”.

3. Доведіть на основі теоретико-множинного підходу, що

а) $(a + b) - c = a + b - c$

б) $a - (b + c) = (a - b) - c$.

4. Доведіть, що а) якщо $a > b$, то $a - c > b - c$.

б) якщо $a > b$, то $c - a < c - b$.

в) якщо $a > b$ і $c < d$, то $a - c > b - d$.

5. Доведіть, що $a - 0 = a$ і $a - a = 0$.

3.4. Ділення

Нехай задана скінченна непорожня множина A, яка має чисельність $n(A)$. Розіб'ємо множину A на b рівнопотужних підмножин A_i , які між собою попарно не перетинаються. Оскільки підмножини рівнопотужні і скінченні, то вони мають однакову кількість елементів. Позначимо чисельність кожної підмножини A_i як $c=n(A_i)$. Назвемо операцію, за допомогою якої обчислюється чисельність (потужність) кожної підмножини *діленням,* а саму дію позначимо як “ : “. Чисельність множини A (число a) назвемо *ділене*, число b (кількість підмножин) – *дільником*, а число c (чисельність підмножини) – *часткою* і запишемо операцію ділення у вигляді $c = a : b$.

Означення. ***Дія, за допомогою якої знаходиться чисельність підмножини при розбитті заданої множини на декілька рівнопотужних підмножин, називається діленням.***

Розглянемо взаємозв'язок між діленням і множенням.

Нехай задана множина A, яка розбита на b рівнопотужних підмножин $A_1, A_2, A_3, \dots A_b$, які не перетинаються. І нехай $n(A) = a$. Тоді $c = a : b$ є кількість елементів у кожній такій підмножині, тобто $n(A_1) = n(A_2) = \dots = n(A_b) = c$. Оскільки ж за умовою $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_b$, то $n(A) = n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_b)$, а оскільки множини A_i попарно не перетинаються, то за означенням суми $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_b) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_b) = \underbrace{c + c + \ldots + c}_{b} = c \cdot b$, тобто $a = c \cdot b$.

Означення. ***Часткою цілого невід'ємного числа a при діленні його на натуральне число b називається таке невід'ємне ціле число c, добуток якого з числом b дорівнює числу a, тобто***

$$\boldsymbol{a : b = c \Leftrightarrow a = c \cdot b}$$

Теорема. ***Ділення в множині невід'ємних цілих чисел існує.***

Дійсно, для будь-яких невід'ємних цілих чисел b і c завжди існує таке ціле число a, що $a = b \cdot c$, а звідси за означенням $c = a : b$.

Теорема. ***Якщо натуральне число*** a ***ділиться на число*** b ***то*** $b \le a$.

Нехай ділення числа a на число b існує, тобто існує таке число c,

що $a = b \cdot c$. Але для будь-якого натурального числа c виконується нерівність $1 \le c$. Помноживши обидві частини цієї нерівності на b, отримаємо нерівність $b \le b \cdot c$, або $b \le a$, що і треба було довести.

Теорема. ***Якщо*** $\boldsymbol{a} \cdot m = \boldsymbol{b} \cdot m$, ***то*** $\boldsymbol{a = b}$.

Дійсно, нехай $\boldsymbol{a} \cdot m = \boldsymbol{c}$, а значить і $\boldsymbol{b} \cdot m = \boldsymbol{c}$. Тоді за означенням операції ділення $\boldsymbol{a = c} : m$ і $\boldsymbol{b = c} : m$, звідки $\boldsymbol{a = b}$.

Теорема. ***Якщо частка від ділення числа a на число b у множині невід'ємних цілих чисел існує, то вона єдина.***

Розглянемо доведення від супротивного. Нехай в одному разі $a : b = c_1$, а в іншому $a : b = c_2$. Тоді за означенням ділення $a = b \cdot c_1$ і $a = b \cdot c_2$, або $b \cdot c_1 = b \cdot c_2$, звідки за попередньою теоремою $c_1 = c_2$. Що і треба було довести.

<u>*Теорема.*</u> ***Ділення на число нуль неможливе.***

Виконаємо доведення від супротивного. Нехай $a : 0 = b$, де $a \neq 0$ і b – будь-яке невід'ємне ціле число. Тоді за означенням $a = b \cdot 0$, звідки випливає, що $a = 0$, що не так. Протиріччя. Значить такого числа b не існує, а значить і ділення на нуль неможливе.

Мають місце ще й такі властивості.

- $a : (b \cdot c) = (a : b) : c$. Дійсно, позначимо $a:(bc) = x$. Тоді $a = xbc$ або $x \cdot c = a:b$, $x = (a:b):c$.
- $(a+b):c = a:c + b:c$. Дійсно, $(a:c + b:c) \cdot c = a + b$, звідси, поділивши $a + b$ на c, отримаємо те, що треба було довести.
- Аналогічно, $(a - b):c = a:c - b:c$.
- $(a \cdot b):c = (a:c) \cdot b$. Дійсно, якщо $(a \cdot b):c = x$, то $a \cdot b = c \cdot x$ або $a = (c \cdot x):b$, а звідси $a:c = x:b$ або $x = (a:c) \cdot b$.

Якщо ж $a = 0$, то маємо ділення $0 : 0$. Часткою в цьому разі може бути будь-яке число. Дійсно, якщо $0 : 0 = c$, то правильним буде $0 = c \cdot 0$ і $0 : c = 0$ для будь-якого c. Таке явище в математиці називається *невизначеністю*.

<u>*Означення.*</u> ***Якщо задані два числа*** a ***і*** b ***такі, що*** $a = n(A)$, $b = n(B)$, ***і*** $a > b$, ***і множину A можна розбити на*** c ***підмножин, рівнопотужних множині B, то говорять, що число*** a ***більше числа*** b ***у*** c ***разів, відповідно, число*** b ***менше числа*** a ***в*** c ***разів.***

Звідси випливає, що для того щоб установити, у скільки разів одне число більше або менше за інше, треба більше число поділити на менше.

В п р а в и.

Поясніть зміст вислову: 15 більше 3 у 5 разів.

2. Сформулюйте необхідні умови ділення одного числа на інше.

Чи вони є достатніми?

3. Знайдіть помилку в судженні: “$24 + 36 - 60 = 28 + 42 - 70$ є правильна рівність. Її можна перетворити так: $6\cdot(4+6-10) = 7\cdot(4+6-10)$. Поділивши обидві частини числової рівності на $4 + 6 - 10$, отримаємо рівність $6 = 7$”.

4. Задана задача: “Мати поділила 12 яблук між дітьми по 4 яблука кожному. Скільки було дітей?” Поясніть, чому ця задача виконується діленням?

5. Поясніть смисл речення: 1) 12 більше 3 у 4 рази.

2) 7 у 3 рази менше, ніж 21.

6. Чи має операція ділення нейтральний елемент?

7. Чи операція ділення комутативна? Асоціативна?

Ділення з остачею

Означення. ***Діленням з остачею називається дія, за допомогою якої за двома числами a і b визначаються такі два числа q і r, що виконуються умови:*** **1)** $\boldsymbol{a = bq + r}$**;** **2)** $\boldsymbol{r < b}$**.**

Число a називається *діленим*, число b – *дільником*, число q – *часткою*, а число r – *остачею.*

Теорема. ***Операція ділення з остачею завжди виконується.***

Доведення. Нехай маємо два числа a і b. Розглянемо існування чисел q і r для будь-яких випадків відношення чисел a і b. Розглянемо чотири можливі випадки $a < b$, $a = b$, $a > b = 1$, $a > b > 1$. Покажемо, що для будь-якого з цих випадків є числа q і r такі, що виконуються зазначені умови: $a = bq + r$; і $r < b$.

1. $a < b$. У цьому випадку є числа $q = 0$ і $r = a$, які задовольняють

зазначеним умовам, тобто $a = b \cdot 0 + r$, звідки $a = r$. А оскільки $a < b$, то і $r < b$, що і треба було довести.

2. $a = b$. Для цього випадку є числа $q = 1$ і $r = 0$, які задовольняють зазначеним умовам: $a = b\cdot 1 + 0$, звідки $a = b$. А оскільки

нуль найменше число, то правильним буде і те, що $r < b$.

3. $a > b = 1$. Для цього випадку є числа $q = a$ і $r = 0$, які задовольняють зазначеним умовам: $a = 1 \cdot a + 0$, рівність виконується. А оскільки $0 < 1$, то правильним буде і $r < b$.

4. $a > b > 1$. Розглянемо послідовність $b \cdot 1$, $b \cdot 2$, $b \cdot 3$ … У цій послідовності знайдеться таке число q, що добуток $b \cdot q \le a$, а $b \cdot (q+1) > a$. Виходячи з нерівності $b \cdot q \le a$, зазначаємо, що є число $r = a - b \cdot q$, а звідси $a = bq + r$. Виконується тут і друга нерівність $r < b$. Дійсно, $b \cdot (q+1) > a$ або $b \cdot q + b > a$ звідки $b \cdot q + b > bq + r$. Значить $r < b$. Що і треба було довести. Тобто ми і в цьому разі знайшли числа q і r такі, що задовольняють нашим умовам.

Отже, для усіх можливих співвідношень між a і b ми знайшли числа q і r, які задовольняють умовам теореми, тобто ділення з остачею завжди існує.

Теорема. ***Дія ділення з остачею однозначна.***

Доведення. Нехай це не так, тобто нехай існують не одна, а дві пари чисел (q_1, r_1) і (q_2, r_2) такі, що виконується рівність $a = bq_1 + r_1$ і $a = bq_2 + r_2$. Звідси $bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$. Тут можливі різні варіанти співвідношень між числами r_1 і r_2, q_1 і q_2.

Нехай $r_1 > r_2$. Тоді $r_1 - r_2 = b(q_2 - q_1)$(*). Оскільки $0 < r_1 < b$ і $0 < r_2 < b$, то і їхня різниця $0 < r_1 - r_2 < b$. У лівій же частині можливі такі співвідношення між q_1 і q_2: $q_2 > q_1$; $q_2 < q_1$, $q_2 = q_1$. Розглянемо їх по порядку.

Нехай $q_2 > q_1$. Тоді $q_2 - q_1 > 1$ і $b(q_2 - q_1) > b$. Тобто виходить, що в лівій частині рівності (*) число менше за b, а в правій – більше за b, а цього бути не може. Значить припущення, що теж $q_2 > q_1$ хибне.

Нехай $q_2 < q_1$. Тоді $q_2 - q_1 < 0$ і виходить, що ліва частина рівності (*) $r_1 - r_2 > 0$, а права частина – $b(q_2 - q_1) < 0$. І це припущення хибне.

Нехай $\underline{q_2 = q_1.}$ Тоді $q_2 - q_1 = 0$ і виходить, що ліва частина рівності (*) $r_1 - r_2 > 0$, а права частина – $b(q_2 - q_1) = 0$. І це припущення хибне.

З цих трьох випадків виходить, що припущення $r_1 > r_2$ взагалі хибне.

Аналогічний результат ми отримаємо і у випадку, коли $r_1 < r_2$ (доведення аналогічне).

У випадку ж, коли $r_1 = r_2$ рівність (*) виконується лише за умови $q_2 = q_1$, чим і доводиться, що результат ділення з остачею однозначний.

В п р а в и.

Знайдіть найменше з чисел, при діленні на яке заданого числа a отримується остача r.

а) $a = 120$,	$r = 12$;	є) $a = 160$,	$r = 16$;
б) $a = 81$,	$r = 9$;	ж) $a = 115$,	$r = 7$;
в) $a = 230$,	$r = 14$;	з) $a = 163$,	$r = 19$;
г) $a = 300$,	$r = 12$;	і) $a = 246$,	$r = 30$;
д) $a = 40$,	$r = 4$;	к) $a = 310$,	$r = 22$.

<u>*Зразок розв'язання:*</u> $a = 664$, $r = 34$. *Підставивши ці значення у формулу* $a = bq + r$, *отримаємо рівність* $664 = bq + 34$, *звідки* $bq = 664 - 34\ 630$. *Розклавши число* 630 *на множники, отримаємо рівність* $630 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. *Спираючись на умову* $r < b$, *утворимо з отриманих множників число, найближче до числа* 34, *яке б задовольняло зазначеній умові*. Таким є $5 \cdot 7 = 35$. *Значить* $b=35$, *а тоді* $q = 18$. *Відповідь:* 35.

Методичний коментар

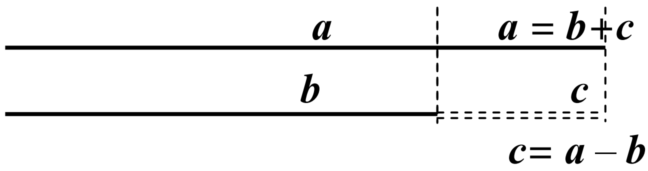
Арифметичні дії становлять основу курсу математики початкової школи. Програмою початкового курсу математики *передбачається вивчення дій додавання, віднімання, множення, ділення, ділення з остачею, вивчення властивостей цих дій, взаємозв'язку між ними.*

Розглянутий матеріал є теоретичною основою для розуміння суті арифметичних дій та їх властивостей. Розуміння цієї суті дає можливість учителю побудувати цілісну логічну методичну систему вивчення програмного матеріалу. Зокрема, це дії з нулем, усвідомлення додавання як основної арифметичної операції, визначення інших арифметичних операцій, як похідних від додавання: віднімання – як знаходження невідомого доданка, множення – як знаходження суми декількох однакових доданків, ділення – як знаходження кількості однакових від'ємників із заданого числа.

Оскільки носієм поняття числа є скінчена множина, то, відповідно і дії з числами ґрунтуються на операціях з множинами. Перша бінарна арифметична операція є додавання. Її основа – збільшення кількості елементів певної множини при об'єднанні її з іншою однорідною множиною. Отже, на цьому й будується методика ознайомлення початківців з дією ***додавання.*** *Додавання розглядається як визначення кількості елементів об'єднання двох однорідних множин, які не мають спільних елементів. Зазначається, що дія, за допомогою якої визначається ця кількість позначається значком + і записується:* $a + b = c$, *а кількість елементів об'єднання заданих множин (число c) – сумою чисел a і b, які є чисельностями множин A і B. Природно, що усе це дійство здійснюється на конкретному наочному матеріалі.*

Аналогічно здійснюється і ознайомлення учнів з властивостями додавання. Базовий матеріал, який представлено в цьому посібнику, визначає зміст властивостей і фактологічну основу, на якій учитель будує методику навчання.

Дія ***віднімання*** *є похідною від додавання. Її основою є множинні операції доповнення і різниці множин. Методичний зміст будується* *на знаходженні кількості елементів множини після видалення з неї певної підмножини. В числовому вираженні це виглядає так: множина А містить* ***a*** *елементів, а множині В, яка є підмножиною множини А містить* ***b*** *елементів. Вилучивши з множини А множину В, ми зменшили кількість її елементів на число* ***b****, отже у множині А залишилося* ***a – b = c*** *елементів. Тут обов'язково слід зазначити, що якщо повернути назад у множину А вилучені елементи множини В, то знов отримаємо первинну множину А з кількістю елементів* ***a****, тобто* ***c + b = a****. Звідси випливає висновок, що* ***різницею чисел a і b називається таке число c, що c + b = a.*** *Цей висновок доцільно інтерпретувати графічно:*



Щодо операції ***множення****, то ключовим посиланням тут є визначення, що множенням називається дія, за допомогою якої знаходиться сума декількох однакових доданків. За формою – це операція скороченого додавання. Ця форма лежить в основі виведення переставної, сполучної та розподільної властивостей множення. Як правило, після пояснення суті дії множення, методика рекомендувала завчити таблицю множення в межах 100 до автоматизму. Тут слід зазначити важливість доведення до автоматизму виконання дії множення. Але найбільш ефективним цей процес буде не як результат бездумного зазубрення, а як результат постійного використання у процесі розв'язання практичних вправ, оскільки в цьому разі він буде усвідомленим, а не бездумним.*

Розгляд операції ***ділення*** *сучасна методика визначає як дію, обернену до множення, тобто a : b = c, тому що b · c = a. На цьому підході базується визначення, що „Ділення – це дія, зо допомогою якої за добутком і одним з співмножників знаходиться другий співмножник". У той же час первинне ознайомлення школярів* *здійснюється з теоретико-множинних позицій, а саме, на скільки підмножин можна розкласти **a** елементів множини, якщо кожна підмножина повинна складатися з **b** елементів. Або другий варіант – **a** елементів заданої множини слід розподілити порівну на **b** підмножин. По скільки елементів буде мати кожна підмножина? В цілому підхід правильний і необхідний. Але в його основі лежить не операція, протилежна множенню, а дія віднімання, а саме, скільки разів можна відняти число **b** з числа **a**? Такий підхід не суперечить першому, а його визначає і доповнює.*

*Визначення дії ділення через віднімання надає можливість більш ефективно довести до усвідомлення школярами операції **ділення з остачею.** Він дозволяє наочно представити суть формули* $a = bq + r$ *і легко пояснює, чому при цьому повинно бути* $r < b$.

Розділ II. Системи числення

1. Історична довідка

У процесі історичного розвитку кожний народ зіштовхувався з необхідністю рахувати і підрахунки фіксувати. Ця необхідність була об'єктивною і зумовлена соціальними та життєвими потребами. Але у зв'язку з роз'єднаністю народів, кожний з них утворював свою систему. Так світ пізнав різні системи числення, найбільш відомі з яких римська, єгипетська, грецька, вавилонська, арабська, майя та ін.

Під *системою числення* розуміється сукупність знаків і правил, за допомогою яких можна записати і прочитати довільне ціле невід'ємне число і яка відповідає таким умовам:

а) будь-яке число однозначно визначається в заданій системі;

б) числа заданої системи можна між собою порівнювати;

в) алгоритми операцій над числами в заданій системі взаємопов'язані між собою.

Усі наявні системи можна поділити на дві групи: позиційні і непозиційні.

Непозиційні – це такі, у яких значення цифри не залежить від місця, яке вона займає в запису числа. У непозиційній системі використовуються декілька знаків (цифр), які позначають певні числа і які мають відповідне позначення. За допомогою них і записується будь-яке число. Такі знаки-числа називаються *вузловими.*

Представником такої системи є, наприклад, римська система. Її основу складають знаки I, V, X, L, C, D, M, які є вузловими і які позначають відповідно числа 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000. Ця система була пов'язана з найбільш уживаним "інструментом" – рукою (I, V, X), з першими буквами латинських слів (centum – C, mille – 1000). Щоб записати число, римляни розбивали число на тисячі, півтисячі, сотні, півсотні, десятки, п’ятірки, одиниці. Наприклад, число 2868 записувалося MMDCCCLXVIII. До того ж у цій системі запис чисел спирався не тільки на символічні позначки, а й на дії між числами. Наприклад, якщо символ числа меншого значення ставився перед символом числа більшого значення, то записуване число утворювалося через віднімання попереднього від наступного, наприклад, XL (40), тобто L – X (50 – 10). А якщо символ числа меншого значення писався після символу числа більшого значення, то записуване число утворювалося через додавання попереднього до наступного, наприклад, LX (60), тобто L + X (50 + 10). Аналогічно і числа IV, VI, VII, … IX, XI і т.д. Але запис чисел у цій системі дуже громіздкий і створює значні труднощі при виконанні навіть простих арифметичних дій. З ускладненням математичних операцій потрібна була проста і зручна система числення. Тому римська система в певний період стала гальмувати розвиток математики і від неї наука відмовилась, хоча у деяких випадках ми ще використовуємо римські символи (наприклад, при нумерації розділів книги, століть тощо).

Непозиційною була і система числення у древніх греків. Числа від 1 до 9 вони позначали першими буквами алфавіту (α, β, γ, δ, …,θ). Для чисел 10, 20, 30, …, 80, 90 використовувалися наступні дев’ять літер (ι, κ, λ, μ, …, ς), а для чисел 100, 200, 300, … 900 – наступні дев’ять літер (ρ, ς, σ, …, ω).[2/] Так, число 423 записувалося як $\overline{\tau\kappa\gamma}$. Риска зверху ставилася, щоб відокремити число від слова. Ця система теж була дуже незручною. Наприклад, при порівнянні чисел неможливо побачити, що σ (300) у 10 разів більше за λ і у 100 разів більша за γ. Важко було і виконувати арифметичні дії. Наприклад, $\bar{\eta}$ (7) + $\bar{\varepsilon}$ (5) = $\overline{\iota\beta}$ (12). Були й інші недоліки, які гальмували розвиток обчислень і математики в цілому.

[2/] Зазначимо, що давньогрецький алфавіт відрізнявся від сучасного кількістю літер, їх було 27, нині ж – 25.

Разом із грецькими письменами та православною культурою така ж система перейшла і в нумерацію Русі, яка зберігалася майже до кінця XVII століття, хоч деякими деталями і відрізнялася від неї. Водночас уся Західна Європа давно вже користувалася більш зручною, так званою арабською десятковою системою. Причиною цього стало 240-річне татаро-монгольське панування. Після його розвалу вже наприкінці XVI століття на Русі з'являються перші друковані книги. Запис чисел у них ще здійснювався в літерній (слов'янській) системі.

З розвитком стосунків між різними країнами, а також у зв'язку з бурхливим розвитком математичної науки виникла потреба заміни непозиційних систем більш зручними й уніфікованими системами. У цих пошуках математика звернулася до позиційних систем. Суть позиційної системи в тому, що один і той же знак (символ) може позначати різні числа залежно від місця цього знака (позиції) у запису числа. Місце, яке займає цифра в запису числа, називається розрядом. У позиційній системі кількість знаків обмежується певною кількістю. Порозрядний принцип запису числа означає, що якщо система базується на n знаках (цифрах), кожний з яких визначає певну кількість числових одиниць, то n одиниць певного розряду становлять одну одиницю наступного (вищого) розряду. Число n у цьому разі, називається *основою системи числення.*

Першою позиційною системою з відомих науці була шістдесяткова система, яку використовували в древньому Вавилоні. Вавилоняни використовували лише два клинописних знаки, один з яких позначав числа 1 і 60, а другий – 10 і 600. При запису чисел від 1 до 60 знаки для 1 до 10 повторювалися стільки разів, скільки в цьому числі одиниць та десятків, а числа кратні 60 від 60 до $59 \cdot 60$ позначали тими ж значками, які вказували лише множник біля 60.

Залишки шістдесяткової системи збереглися донині: $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$ (для кутів), 1 хвилина = 60 секунд, 1 година = 60 хвилин.

Збереглися на сьогодні і залишки дванадцяткової системи числення, яка використовувалася певний час у стародавньому Єгипті: 12 місяців у році, $2 \cdot 12$ годин на добу. Число 12 називалося "дюжиною".

Окрім основних видів (позиційної і непозиційної) систем, існує і так звана мішана система, яка містить у собі елементи декількох систем. Прикладом такої є система вимірювання часу. Століття – десяткова система; рік, доба – дванадцяткова; година, хвилина – шістдесяткова; долі секунди – десяткова.

Але найбільшого поширення здобула позиційна десяткова система числення. Своїм корінням вона поринає в далеку давнину. Ще видатний давньогрецький учений Архімед у III столітті до нашої ери розробив систему числення, яка ґрунтується на числі 10. Вона давала можливість за допомогою невеликої кількості знаків записувати будь-яке велике число.

У сучасному вигляді десяткова система склалася приблизно в VI столітті нашої ери в Індії. У цей час в Індії панували араби, тому цю десяткову систему часто називають арабською. Значним досягненням індійської математичної думки було введення спеціального знака для позначення нуля. Це внесло кардинальні зміни в запис числа і десяткова система остаточно сформувалася в такому вигляді, якою ми її знаємо сьогодні.

Важливим кроком у розвитку вітчизняної математичної науки було видання в Росії книжки Леонтія Магницького "Арифметика, сиречь наука числительная". Вона була видана в 1703 році слов'янською мовою, але розрахунки в ній виконувалися вже в позиційній десятковій системі. Тривалий час ця книга була настільною книгою всіх освічених людей і стала причиною швидкого переходу математики на індійську десяткову систему числення.

На сьогодні, у зв'язку з розвитком технічних засобів обчислень, виникли й інші штучні системи числення. Однією з найуживаніших із них є двійкова система. Вона складається лише з двох цифр 0 і 1. Це зручно не лише з позицій економності (лише два знаки), але й тому, що відповідає технічним вимогам електронної обчислювальної техніки, яка живиться електричним струмом (струм йде – 1, струм не йде – 0). Теоретично в деяких розрахунках разом із двійковою системою використовується і вісімкова система, яка базується на 8 цифрах від 0 до 7. Взагалі ж основою позиційної системи числення може бути будь-яке число *d*. Знаки від 0 до числа *d* називаються цифрами заданої числової системи.

2. Алгоритми операцій із числами в різних числових системах

Одним із важливіших питань будь-якої системи числення є питання запису чисел. Розкриття його важливе не тільки з погляду запису числа як такого, але й з позицій порівняння чисел (причому як писемного, так і зорового), з позицій технології виконання дій тощо.

Означення 1. ***Запис виду*** $\boldsymbol{a_n \cdot d^n + a_{n-1} \cdot d^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot d^2 + a_1 \cdot d + a_o}$ ***будемо називати многочленом, розташованим за спадними степенями числа d.***

Теорема. ***Будь-яке натуральне число N можна представити у вигляді многочлена, розташованого за спадними степенями основи системи числення, коефіцієнтами якого є однозначні числа або нулі.***

Доведення. Нехай задані натуральне число N і основа системи числення число d. Розділимо число N на d з остачею. Отримаємо $N = q_1 d + r_1$ (**1**). Якщо $q_1 < d$, то представлення закінчене. Якщо ж $q_1 \geq d$, то знов поділимо q_1 на d з остачею. Одержимо $q_1 = q_2 d + r_2$, і підставимо у (**1**), отримаємо $N = (q_2 d + r_2)d + r_1 = q_2 d^2 + r_2 d + r_1$ (**2**). Якщо $q_2 < d$, то представлення закінчене. Якщо ж $q_1 \geq d$, то знов поділимо q_2 на d з остачею. Одержимо $q_2 = q_3 d + r_3$ і підставимо у (**2**). Одержимо: $T = (q_3 d + r_3)d^2 + r_2 d + r_1 = q_3 d^3 + r_3 d^2 + r_2 d + r_1$. І так до тих пір, поки q_n не стане менше за d. А це рано чи пізно станеться, тому що з кожним кроком число q_i зменшується, а, як відомо, натуральний ряд чисел обмежений знизу числом 1. У результаті будемо мати:

$N = q_n d^n + r_n d^{n-1} + r_{n-1} d^{n-2} + ... + r_3 d^2 + r_2 d + r_1$ (**3**).

Числа q_n і r_i будуть однозначними, тому що згідно нашій умові $q_n < d$, а згідно з умовами ділення з остачею, остача менша за дільник, тобто $r_i < d$.

Виходячи з теореми, натуральне число в десятковій системі числення буде мати такий вигляд:

$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_2 \cdot 10^2 + +a_1 \cdot 10 + a_o$; $a_i < 10$, $i = 1,2, ...$
Але такий запис натуральних чисел дуже громіздкий. Спростити його дозволяє позиційність системи числення. Завдяки їй множник 10^k замінюється місцем у числі (позицією), яке посідає доданок $a_k \cdot 10^k$, замість доданка записується тільки коефіцієнт a_k. Місце, яке він посідає в числі, називається розрядом. Отже, натуральне число N записується у вигляді послідовно записаних коефіцієнтів $a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_2 a_1 a_o$, що значно спрощує запис числа і виконання дій.

Доведена теорема до того ж дає ключ і до переведення чисел з одної системи числення в іншу. Наприклад, як перевести число 95 з десяткової системи у двійкову? Згідно з теоремою, виконаємо ділення числа 95 на 2 (основа системи числення є число 2). Одержимо: $93 = 46 \cdot 2 + 1$. Наступний крок: ділимо 46 на 2, одержимо: $46 = 23 \cdot 2 + 0$. Аналогічно далі: $23 = 11 \cdot 2 + 1$, $11 = 5 \cdot 2 + 1$, $5 = 2 \cdot 2 + 1$, $2 = 1 \cdot 2 + 0$. Остання частка $q_n = 1$, остання остача $r_n = 0$, передостання остача $r_{n-1} = 1$, їй передує – 1, перед нею – 1, перед нею – 0 і найперша остача – 1. Тоді натуральне число 93_{10} буде мати такий вигляд: $93_{10} = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1$, або в спрощеній формі $93_{10} = 1011101_2$. Наведемо ще один приклад, у формі практичного виконання ділення „драбинкою”:

116 | 2

0 58 | 2

0 29 | 2

1 14 | 2

0 7 | 2

1 3 | 2

1 1 тобто $116_{(10)} = 1110100_{(2)}$

Аналогічно переводяться числа в трійкову, п'ятіркову, вісімкову або будь-яку іншу систему числення. Щоб перевести число навпаки з будь-якої системи до десяткової, скористаємося тією ж теоремою. Наприклад, щоб перевести число 111000101 з двійкової системи до десяткової, запишемо його у вигляді многочлена $1\cdot2^8 + 1\cdot2^7 + 1\cdot2^6 + + 0\cdot2^5 + 0\cdot2^4 + 0\cdot2^3 + 1\cdot2^2 + 0\cdot2 + 1 = 256 + 128 + 64 + 4 + 1 = 453$, тобто $111000101_2 = 453_{10}$

Покажемо, який вигляд мають числа деяких систем числення відносно десяткової? Вигляд цих чисел залежить від кількості використовуваних знаків.

Десяткова	двійкова	трійкова	вісімкова
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	10	3
4	100	11	4
5	101	12	5
6	110	20	6
7	111	21	7
8	1000	22	10
9	1001	100	11
10	1010	101	12
11...	1011 …	102…	13 …

Однією із складностей при переведенні чисел з будь-якої системи в десяткову є встановлення степеня *n* у першому доданку $a_n \cdot 10^n$. Найвищий степінь многочлена визначається за формулою $n = k - 1$, де k – кількість цифр у числі. Наприклад, у числі $1100011_{(2)}$ 7 розрядних знаків. Тому найвищий степінь *n* буде 6, тобто

$1100011_{(2)} = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + \ldots + 1 = \ldots$

Це зумовлене тим, що найменший степінь числа 2 тут є нуль.

У практичній обчислювальній роботі одне з головних місць посідають дії з числами. Смисл арифметичних операцій ми розглянули раніше.

Який же алгоритм цих операцій?

Додавання

Нехай задані два натуральних числа з основою системи числення *2*:

Наприклад, нехай треба додати числа 7348 і 581 у десятковій системі числення. Сума їх буде виглядати як $(7 + 0) \cdot 10^3 + (3 + 5) \cdot 10^2 + (4 + 8) \cdot 10 + \ldots + (8 + 1) = 7 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^3 + 12 \cdot 10 + 9$. Оскільки в розряді десятків сума розрядів склала число 12, що більше основи числення – числа 10, то коефіцієнт попереднього розряду (сотень) збільшуємо на 1, а коефіцієнт розряду десятків буде дорівнювати різниці між сумою розрядів – числа 12 і основою системи числення – числом 10, тобто $12 - 10 = 2$. Отже, отримане в результаті додавання число буде дорівнювати $7 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 + 9$ або 7929.

Описаний механізм виконання операції додавання лежить і в основі одного з найбільш уживаних зручних способів додавання – додавання в стовпчик.

Аналогічно виконується додавання і в інших системах численнях. Але тут треба враховувати їхні особливості, для чого зручно мати перед очима невеличку табличку. Наприклад, для двійкової системи треба враховувати, що $0 + 0 = 0$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 10$, $1 + 1 + 1 = 11$, $1 + 1 + 1 + 1 = 100$ і т.д.

Наприклад, додамо числа $110010110 + 100111101$.

$$
\begin{array}{r}
{}_{+}\,110010110 \\
\underline{100111101} \\
1011010011
\end{array}
$$

Аналогічно, виконуючи додавання, наприклад, у трійковій системі, треба знати, що $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 10$, $2 + 2 = 11$, $1 + 2 + 1 = 11$, $2 + 2 + 1 = 12$, $0 + 2 = 2$, ...

Віднімання

Нехай задані два натуральних числа, наприклад, віднімемо в десятковій системі від числа 2748 число 583. Аналіз цих чисел показує, що у від'ємного числа 2748 розряд десятків менший за розряд десятків числа 583. Тоді, згідно з виведеним правилом віднімання, виконаємо так:

$2748 - 583 = (2 - 0)\cdot 10^3 + (7 - 5)\cdot 10^2 + (4 - 8)\cdot 10 + (8 - 3) =$
$= 2\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + (4 - 8)\cdot 10 + 5 = 2\cdot 10^3 + (2 - 1)\cdot 10^2 + +(10 + 4 - 8)\cdot 10 + 5$
$= = 2\cdot 10^3 + 1\cdot 10^2 + 6\cdot 10 + 5 = 2165$. Віднімання в стовпчик виглядає так:

$$
\begin{array}{r}
\_\,2748 \\
\underline{583} \\
1165
\end{array}
$$

Аналогічно виконується віднімання і в будь-якій системі числення. Наприклад, у двійковій. Нехай нам треба відняти $1100101110 - 10011010$. Найбільш легко для розуміння проілюструвати це в стовпчик. Для цього треба знати, що $0 - 0 = 0$, $1 - 0 = 1$, $1 - 1 = 0$, $10 - 1 = 1$. $11 - 1 = 10$, $100 - 1 = 11$, $1000 - 1 = 111$, $10000 - 1 = 1111$.

Обчислити різницю:

$$
\begin{array}{r}
\_\ 1100101110 \\
\underline{10011010} \\
1010010100
\end{array}
$$

Інший приклад:

$$
\begin{array}{r}
\_\ 110000111 \\
\underline{1110111} \\
100010000
\end{array}
$$

Аналогічно і для трійкової системи. Тут теж треба знати, що $0 - 0 = 0$; $1 - 0 = 1$; $1 - 1 = 0$; $2 - 1 = 1$; $2 - 2 = 0$; $10 - 1 = 2$; $10 - 2 = 1$; $11 - 2 = 2$; $20 - 1 = 12$; $20 - 2 = 11$; $100 - 1 = 22$; $100 - 2 = 21$; $100 - 10 = 20$. Це легко вивести з таблиці додавання, яку кожний може скласти сам.

Наведемо приклад. Нехай нам треба відняти в трійковій системі 221201 – 12012. Найбільш зрозуміло це робити в стовпчик.

$$
\begin{array}{r}
\_\ 221201 \\
\underline{12012} \\
202112
\end{array}
$$

Множення

Механізм виконання множення натуральних чисел дещо складніший, ніж додавання і віднімання, але він будується на тих же основах. Розглянемо його.

За одним із означень, за яким множення розглядається в початкових класах, ця операція представляється як процес знаходження суми декількох однакових доданків, тобто $n + n + \ldots + n$ з m доданків і записується $n \cdot m$. Для спрощення добутки однозначних чисел зібрані в спеціальній таблиці (*таблиці множення*). Спираючись на неї, розглянемо множення багатозначних чисел.

Нехай задані два натуральних числа: Наприклад, перемножимо в десятковій системі числа 748 і 213. Перемножимо ці числа:

$$
\begin{array}{r}
\times 748 \\
\underline{\quad 213} \\
2244 \\
748 \\
\underline{1496} \\
159324
\end{array}
$$

Зазначимо, що якщо якийсь співмножник закінчується числом 0, то множення на нього не виконується, бо буде в результаті нуль, тому множення відбувається незважаючи на нього, а в результаті він дописується в розряді одиниць.

Аналогічно виглядає множення і в інших системах числення. Наведемо приклад множення у двійковій системі чисел 10110110 і 1010111. Тут треба лише пам'ятати, що $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$ та таблицю додавання.

$$
\begin{array}{r}
\times 10110110 \\
\underline{\quad 1010111} \\
10110110 \\
10110110 \\
10110110 \\
10110110 \\
\underline{10110110} \\
11110111011010
\end{array}
$$

Ділення

Операція ділення базується на загальному означенні і видається на практиці найбільш складною.

Розглянемо конкретний приклад у десятковій системі. Розділимо, наприклад, число 7344 на 6.

```
_ 7344 | 6
  6      1224
 ____
_ 13
  12
  ____
  _14
   12
  _____
    _24
     24
      0
```

Якщо дільник є число багатозначне, то алгоритм виконання ділення такий же, як і для однозначного. Різниця лише в тому, що треба вибрати першу групу розрядів, яка буде найменшим діленим. Наприклад, розділимо 13206 на 31.

```
_13206 | 31
 124     426
 ____
  _80
   62
  _186
   186
     0
```

Аналогічно виконується ділення і в інших системах числення.

Покажемо це на прикладі ділення у двійковій системі числення.

Розділимо, наприклад, число 111101111 на 101101.

$$
\begin{array}{l|l}
\_111101111 & \underline{\;101101} \\
\;\underline{101101\;\;} & 1011 \\
\_01000011 & \\
\;\;\underline{\;101101\;} & \\
\;\_0101101 & \\
\;\;\;\underline{101101} & \\
\;\;\;\;\;\;\;0 &
\end{array}
$$

В п р а в и.

1. Перевести число 617 з десяткової системи у двійкову, трійкову та вісімкову системи.

2. Перевести числа а)11010011 б) 1000001101 в) 1010111111 з двійкової в десяткову систему.

3. Перевести число а) 122102 б) 10102 в) 21021 з трійкової до десяткової системи.

4. Перевести число 11100111001 з двійкової у п'ятіркову систему.

5. Перевести число 1021 з трійкової системи у двійкову.

6. Обчислити:

а) 1101101 + 100011; б) 10111011 + 10001101;

в) 10010101 – 11110101; г) 110100100 – 111011;

д) 1001110 · 110111; е) 1011110 · 101101;

ж) 10010000111 : 111101; з) 110111001 : 10101.

7. Обчислити: а) $10010110_2 + 2102_3 = x_8$ б) $127_8 + 112_3 = x_2$

в) $1102_3 + 1011_3 = x_5$ г) $110100_2 - 222_3 = x_5$

Методичний коментар

Необхідність розгляду та вивчення систем числення в початковій школі зумовлена принципами розвивального навчання. Існує ряд аргументів, які стали основою для включення поняття позиційного багатоцифрового числа в недесяткових системах числення в програму початкового курсу математики.

Перш за все цей розділ забезпечує вчителю початкової школи розуміння загального алгоритму виконання арифметичних дій і його використання в конкретних числових системах, зокрема, в десятковій.

З метою опанування предметною математичною компетентністю учням необхідно чітко зрозуміти принцип утворення багатоцифрового позиційного числа, в тому числі в десятковій системі числення. Сутність його полягає в тому, що 10 одиниць будь-якого розряду утворюють 1 одиницю наступного розряду.

Необхідність конструювання учнями дій додавання і віднімання чисел зумовлюють включення поняття позиційного багатоцифрового числа в недесяткових системах числення. Відповідно роботі з числами в двійковій, трійковій та інших системах числення учні фактично знову засвоюють лічбу в межах 2,3,4 ..., оволодіваючи складом числа. Додавання чисел в двійковій системі числення вимагає навичка лічби в межах 2, в трійковій – в межах 3 і т.д., в десятковій – в межах 10. Це кардинально змінює підходи до заучування таблиць додавання і множення, які розглядаються на множині цілих невід'ємних чисел, а не на множині натуральних чисел, як це прийнято в традиційній методиці,а випадки додавання і множення з нулем розглядаються як виняток.

Знайомство учнів початкових класів з різними системами числення закладає основи більш ґрунтовного розуміння дій з величинами і безумовно має велике значення для подальшого вивчення математики. Поряд з лічбою груп по 10 елементів, як раніше так і зараз, зустрічаються групи по 2,5,12,20,60 елементів. Група з 12 елементів дійшла до наших днів під назвою дюжина. Рахунок групами по 60 до сих пір застосується при вимірюванні часу і кутів в хвилинах і секундах. Тому виникає необхідність розуміння дитиною умов виникнення самого поняття систем числення.

Останній аргумент пов'язаний з формуванням ІКТ-компетентності молодших школярів. Як відомо, в комп'ютерних *програмах застосовується двійкова система числення. Цей матеріал має пряме відношення до математичних основ інформатики і забезпечує в ній розуміння математичної складової. Усвідомлення алгоритму дій з числами у двійковій системі числення забезпечує учням розуміння операційної системи роботи комп'ютера.*

Розділ III. Подільність невід’ємних цілих чисел

1. Відношення подільності

Як ми встановили раніше, віднімання є операцією, протилежною додаванню, а ділення – зворотною множенню. Але якщо для виконання віднімання числа $\boldsymbol{b}$ від числа $\boldsymbol{a}$ достатньо, щоб виконувалася умова $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}$, то для ділення цього недостатньо. Для цього необхідно ще певні додаткові умови.

<u>*Означення.*</u> ***Якщо число*** *a* ***ділиться на число*** *b*, ***то відношення, у якому знаходяться ці числа, називається відношенням подільності.*** Вивчення відношення подільності, його властивостей та умов існування відіграє значну роль у теорії арифметики.

Вивчаючи операцію ділення в початкових класах, ми говоримо дітям, що число 8 на 4 ділиться, а на 5 не ділиться. Чому? Адже одна з умов, що $8 > 5$, як і $8 > 4$ виконується. Очевидно для пояснення цього факту умови “бути більше” замало. Треба ще якась умова. Вона легко випливає з означення операції множення і зворотної до неї – ділення.

<u>*Означення.*</u> ***Невід’ємне число*** *a* ***називається таким, що ділиться на натуральне число*** *b*, ***якщо існує таке невід’ємне число*** *q*, ***що*** $a = b \cdot q$. У цьому разі число a називається *діленим*, число b – *дільником*, а число q – *часткою*, і записується $a : b = q$.[1/]

Відношення подільності має такі властивості:

1. *Будь-яке натуральне число ділиться на 1.*

Для цього достатньо показати, що існує таке число q, що $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \cdot q$. Дійсно, якщо $\boldsymbol{b} = 1$, а $q = \boldsymbol{a}$, то істинною буде рівність $\boldsymbol{a} = 1 \cdot \boldsymbol{a}$.

2. *Будь-яке натуральне число ділиться само на себе.*

Дійсно, якщо $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ і $q = 1$, то $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot 1$, і це істинно.

[1/] Якщо числа a і b знаходяться у відношенні подільності, то це записується $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{b}$.

3. *Відношення подільності асиметричне, тобто* $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b} \vdots \boldsymbol{a}$.

Дійсно, якщо $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$, але тоді $\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{a}$, тому $\boldsymbol{b}$ на $\boldsymbol{a}$ не ділиться, за винятком випадку, коли $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

4. *Відношення подільності транзитивне, тобто якщо* $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{b}$ *і* $\boldsymbol{b} \vdots \boldsymbol{c}$, *то* $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{c}$.

Дійсно, якщо $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{b}$, то існує q_1 таке, що $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \cdot q_1$. Якщо $\boldsymbol{b} \vdots \boldsymbol{c}$, то існує таке q_2, що $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \cdot q_2$. Підставивши цю рівність у попередню, отримаємо рівність $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}(q_1 \cdot q_2)$. Замінивши добуток $q_1 \cdot q_2$ якимось числом p, отримаємо рівність $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \cdot p$, що означає, що $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{c}$.

5. *Якщо кожний доданок суми невід'ємних цілих чисел ділиться на одне і те ж натуральне число, то і вся сума ділиться на це натуральне число, тобто, якщо* $\boldsymbol{a} \vdots d$, $\boldsymbol{b} \vdots d$ *і* $\boldsymbol{c} \vdots d$, *то і* $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \vdots d$.

Дійсно, якщо $\boldsymbol{a} \vdots d$, то існує таке q_1, що $\boldsymbol{a} = d \cdot q_1$; якщо $\boldsymbol{b} \vdots d$, то існує таке q_2, що $\boldsymbol{b} = d \cdot q_2$; якщо $\boldsymbol{c} \vdots d$, то існує таке q_3, що $\boldsymbol{c} = d \cdot q_3$. А звідси випливає, що $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = d \cdot q_1 + d \cdot q_2 + d \cdot q_3 = d \cdot (q_1 + q_2 + q_3) = d \cdot p$. А це означає, що $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \vdots d$.

6. *Якщо два невід'ємних цілих числа* $\boldsymbol{a}$ *і* $\boldsymbol{b}$ *діляться на натуральне число* $\boldsymbol{d}$, *то і їхня різниця ділиться на це число* $\boldsymbol{d}$.

Для визначеності приймемо, що $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$. Тоді існує різниця $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$. Якщо $\boldsymbol{a} \vdots d$, то існує таке q_1, що $\boldsymbol{a} = d \cdot q_1$; якщо $\boldsymbol{b} \vdots d$, то існує таке q_2, що $\boldsymbol{b} = d \cdot q_2$. Тоді $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = d \cdot q_1 - d \cdot q_2 = d \cdot (q_1 - q_2) = d \cdot p$. Оскільки $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$, то $q_1 > q_2$, а тоді $q_1 - q_2 = p > 0$, тобто p – натуральне число. Значить означена різниця ділиться на число d.

7. *Властивість, обернена до властивостей 5 і 6, не виконується*.

8. *Якщо з декількох доданків невід'ємних цілих чисел один не ділиться на задане натуральне число, то і вся сума не буде ділитися на задане число.*

Дійсно, нехай невід'ємні цілі числа $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ діляться на натуральне число d, а число $\boldsymbol{c}$ не ділиться на число d. Тоді існують натуральні числа q_1 і q_2 такі, що $\boldsymbol{a} = d \cdot q_1$ і $\boldsymbol{b} = d \cdot q_2$. Припустимо, що

($\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$) $\vdots\, d$, тоді виникає суперечність із властивістю 5. Тому наше припущення неправильне. Що і треба було довести.

Із цієї властивості випливає важливий наслідок: якщо $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\cdot q + r$, то $\boldsymbol{a} \,\vdots\, \boldsymbol{b}$ цілком тоді і тільки тоді, коли $r \,\vdots\, \boldsymbol{b}$.

9. *Для того, щоб добуток декількох натуральних чисел ділився на задане натуральне число, достатньо, щоб хоч би один із співмножників ділився на це число.*

Дійсно, нехай задані декілька натуральних чисел $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots, \boldsymbol{p}$. Одне з чисел, наприклад, $\boldsymbol{a}$ ділиться на натуральне число d. Тоді $\boldsymbol{a} = d\cdot q$, а значить $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{p} = d\cdot(q\cdot \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} \cdot\ldots\cdot \boldsymbol{p})$, що означає, що $(\boldsymbol{a} \cdot\boldsymbol{b} \cdot\boldsymbol{c} \cdot\ldots\cdot \boldsymbol{p}) \,\vdots\, d$.

10. *Якщо добуток* $\boldsymbol{ac}$ *ділиться на добуток* $\boldsymbol{bc}$, *де* $\boldsymbol{c} \neq 0$, *то* $\boldsymbol{a}$ *ділиться на* $\boldsymbol{b}$.

Дійсно, за умовою знайдеться таке k, що $\boldsymbol{ac} = (\boldsymbol{bc})\cdot k$, або $\boldsymbol{ac} = (k\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$. А звідси випливає, що $\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b}$, тобто $\boldsymbol{a}$ ділиться на $\boldsymbol{b}$.

2. Чотири класи невід’ємних цілих чисел. Прості числа.

Нехай заданий ряд невід’ємних цілих чисел. Виходячи з властивостей 1 і 2, ми робимо висновок, що для будь-яких невід’ємних цілих чисел існують дільники. Розглянемо числа цього ряду з погляду кількості дільників. Для цього складемо невеличку таблицю:

Число	*Дільники*	*Кількість дільників*
0	Будь-яке натуральне число	Безліч
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2
6	1, 2, 3, 6	4
7	1, 7	2
8	1, 2, 4, 8	4
9	1, 3, 9	3 і т.д.

Аналізуючи цю таблицю, приходимо до висновку, що всі натуральні числа можна розподілити на чотири класи відповідно кількості дільників.

1 *клас* – це числа, які мають безліч дільників. Цей клас складається з одного числа – числа 0.

2 *клас* – це числа, які мають один дільник. Цей клас теж складається з одного числа – числа 1.

3 *клас* – це числа, які мають два дільника. Такі числа називаються *простими*, а клас – *клас простих чисел.*

4 *клас* – це числа, які мають більше двох дільників. Такі числа називаються *складеними*, а клас – *клас складених чисел*.

Якщо проаналізувати всі класи з якісного погляду, то ми відмічаємо, що всі числа мають дільниками число 1 і само себе. Тому такі дільники посідають особливе місце в теорії подільності і мають назву *невласних дільників*. Усі інші дільники називаються *власними*.

В теорії подільності особливе місце посідають числа третього та четвертого класу. Важливим питанням тут є система розпізнавання класу числа. Тому ключове місце тут посідає теорема *про існування простого дільника в будь-якого натурального числа*.

Теорема 1. ***Найменший власний дільник будь-якого складеного числа є число просте, причому не більше кореня квадратного із заданого складеного числа.***

Доведення. Нехай $\boldsymbol{a}$ задане складене число, а p – його найменший власний дільник. Оскільки p – власний дільник, то $1 < p < \boldsymbol{a}$. Треба довести, що число p – просте. Оскільки число $p > 1$, то p або просте, або складене. Якщо б p було складеним, то воно б мало свій найменший власний дільник q такий, що $1 < q < p$. Оскільки ж $\boldsymbol{a} \vdots p$, а $p \vdots q$, то за властивістю транзитивності $\boldsymbol{a} \vdots q$. Але ж $q < p$, а ми виходили з того, що p – найменший. Суперечність. Значить наше припущення, що число p складене, хибне, тобто p – просте.

Тепер доведемо другу частину теореми, що цей найменший простий дільник не більше кореня квадратного від заданого складеного числа, тобто що $p \le \sqrt{a}$. Дійсно, оскільки p – дільник числа ***a***, то можна записати, що ***a*** $= p \cdot b$. А оскільки дільник p – найменший, то $p \le b$. Помножимо обидві частини цієї нерівності на p, отримаємо $p \cdot p \le b \cdot p$, або $p^2 \le b \cdot p$, звідки $p \le \sqrt{a}$, що і треба було довести.

Ця теорема надає можливість практично розв'язати питання про належність заданого натурального числа до певного класу, тобто з'ясувати,

задане натуральне число просте, чи складене. Механізм цього розв'язання розкривається такою теоремою:

<u>*Теорема 2.*</u> ***Якщо задане число*** n ***не ділиться ні на одне з простих чисел, не більших*** $\sqrt{n}$***, то саме число*** n ***– просте.***

Дійсно, нехай число n – складене. Тоді воно повинно мати власні дільники і серед них найменший простий p. Значить $n \vdots p$, де $p \le \sqrt{n}$. А це суперечить умові теореми, що n не ділиться ні на одне з простих чисел, не більших $\sqrt{n}$. Тому припущення, що число n складене – хибне.

<u>*Теорема 3.*</u> ***Якщо просте число*** p ***ділиться на деяке натуральне число*** $n \neq 1$, ***то воно співпадає з*** n.

Дійсно, якщо б $p \neq n$, то воно б мало окрім себе і 1 ще й третій дільник n, і було б складеним. А за умовою воно просте. Значить $p = n$.

<u>*Теорема 4.*</u> ***Будь-які два різні прості числа не можуть ділитися одне на одне****.* Тобто якщо p і q два прості числа і, наприклад, $p > q$, то вони не діляться одне на одне.

Дійсно, q не ділиться на p, тому що воно менше за p, а p не ділиться на q тому, що p ділиться лише саме на себе і на 1, а $q \neq p$ і $p \neq 1$. Тому q не може бути дільником p. Що і треба було довести.

Питання встановлення класу числа в теорії арифметики посідає одне з головних місць. Тому вже на перших етапах розвитку математики вчені шукали способи встановлення класу числа, число ***a*** – просте чи складене. Одним із таких способів був спосіб, запропонований давньогрецьким математиком Ератосфеном ще в ІІІ столітті до нашої ери, що одержав назву “решето Ератосфена”. Він полягає в тому, що треба “відсівати” з натурального ряду складені числа. Наприклад, щоб установити всі прості числа на відрізку натурального ряду від 1 до 200, треба виписати всі числа цього ряду по порядку, визначити найменше просте число 2 і далі викреслити в усьому відрізку всі числа кратні 2. Наступне в ряду число буде 3. Воно просте, тому залишивши його, викреслимо всі числа, кратні 3. Наступне залишилося не викресленим число 5. Воно просте. Залишивши його, викреслимо всі числа кратні 5. І так далі. У результаті такого “просіювання” не викресленими залишаться тільки прості числа цього числового відрізка.

Але цей спосіб дуже громіздкий і обмежений. Математика користується більш придатними для практики способами, які випливають із доведених вище теорем, тобто основаних на встановленні подільності заданого числа на просте число. Але тут одним із ключових постає питання: як без зайвих, часто громіздких обчислень встановити, чи ділиться задане число на певне просте число, чи ні?

Відповідь на це питання міститься у відповідних правилах, так званих *ознаках подільності*, за допомогою яких можна встановити подільність.

3. Ознаки подільності.

Значна кількість ознак подільності випливає з так званої “загальної ознаки подільності”, виведеної в XVII столітті французьким математиком Б. Паскалем, і яка у зв’язку з цим отримала назву “*загальної ознаки подільності Паскаля*”. У чому ж її суть?

Нехай задане натуральне число

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a_n}\cdot 10^n + \boldsymbol{a_{n-1}}\cdot 10^{n-1} + \boldsymbol{a_{n-2}}\cdot 10^{n-2} + \ldots + \boldsymbol{a_1}\cdot 10 + \boldsymbol{a_0}$$

і якесь натуральне число d. Щоб відповісти на питання, чи ділиться задане число $\boldsymbol{n}$ на число d, виконаємо такі перетворення. Розділимо кожний степінь числа 10 на d з остачею. Отримаємо:

$10^n = dq_n + r_n$; $10^{n-1} = dq_{n-1} + r_{n-1}$; $10^{n-2} = dq_{n-2} + r_{n-2}$; $\ldots 10^1 = dq_1 + r_1$. Отримані вирази підставимо у запис числа $\boldsymbol{n}$. Одержимо вираз:

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a_n}\cdot(dq_n + r_n) + \boldsymbol{a_{n-1}}\cdot(dq_{n-1} + r_{n-1}) + \boldsymbol{a_{n-2}}\cdot(dq_{n-2} + r_{n-2}) + \ldots + \boldsymbol{a_1}\cdot(dq_1 + r_1) + \boldsymbol{a_0} =$
$= \boldsymbol{a_n}\cdot dq_n + \boldsymbol{a_n}\cdot r_n + \boldsymbol{a_{n-1}}\cdot dq_{n-1} + \boldsymbol{a_{n-1}}\cdot r_{n-1} + \boldsymbol{a_{n-2}}\cdot dq_{n-2} + \boldsymbol{a_{n-2}}\cdot r_{n-2} + \ldots + \boldsymbol{a_1}\cdot dq_1 + \boldsymbol{a_1}\cdot r_1$
$+ + \boldsymbol{a}_0 = d\cdot(\boldsymbol{a_n}\cdot q_n + \boldsymbol{a_{n-1}}\cdot q_{n-1} + \boldsymbol{a_{n-2}}\cdot q_{n-2} + \ldots + \boldsymbol{a_1}\cdot q_1) + (\boldsymbol{a_n}\cdot r_n + \boldsymbol{a_{n-1}}\cdot r_{n-1} + \boldsymbol{a_{n-2}}\cdot r_{n-2} +$
$+ \ldots + \boldsymbol{a_1}\cdot r_1 + \boldsymbol{a_0})$.

Виконавши дії в перших дужках, отримаємо, скажімо, число $\boldsymbol{Q}$, а в других дужках отримаємо число $\boldsymbol{R}$. Підставивши їх у попередній вираз, одержимо $\boldsymbol{n} = d\cdot\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{R}$. Звідси випливає, що оскільки доданок $d\cdot\boldsymbol{Q}$ завжди ділиться на d, то число $\boldsymbol{n} \vdots d$ у тому і тільки в тому випадку, коли $\boldsymbol{R} \vdots d$. Тобто подільність числа $\boldsymbol{a}$ на задане число d зводиться до подільності числа $\boldsymbol{R}$ на число d, де r_i є остачі від ділення числа 10^i на число d. Це і є загальна ознака подільності Паскаля.

Приклад: Чи ділиться число 235634 на число 7? Запишемо число 235634 у вигляді многочлена, розташованого за спадними степенями числа 10. $235634 = 2\cdot10^5 + 3\cdot10^4 + 5\cdot10^2 + 6\cdot10^2 + 3\cdot10 + 4$. Тепер розділимо кожний степінь 10 на 7 з остачею: $10^5 = 14285\cdot7 + 5$; $10^4 = 1428\cdot7 + 4$; $10^3 = 142\cdot7 + 6$; $10^2 = 14\cdot7 + 2$; $10 = 1\cdot7 + 3$. Тоді $\boldsymbol{R} = 2\cdot5 + 3\cdot4 + 5\cdot6 + +6\cdot2 + 3\cdot3 + 4 = 77$. Число 77 ділиться на 7, тому і $235634 \vdots 7$.

Розглянемо деякі найбільш уживані ознаки подільності.

<u>*Ознака подільності на 2*</u>. ***Будь-яке число*** *n* ***ділиться на 2 тоді і тільки тоді, коли розряд одиниць числа*** *n* ***є парне число або 0.***

Дійсно, нехай $\boldsymbol{a_0}$ (розряд одиниць числа $\boldsymbol{n}$) ділиться на 2. Оскільки всі остачі при діленні будь-якого степеня числа 10 на 2 дорівнюють 0, то $r_n = r_{n-1} = \ldots = r_1 = 0$, і $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{a_0}$. А оскільки $\boldsymbol{a_0}$ ділиться на 2**,** то і саме число $\boldsymbol{n}$ ділиться на 2.

Навпаки, нехай число $\boldsymbol{n}$ ділиться на 2 ($d = 2$). Представимо число $\boldsymbol{n}$ у вигляді $n = \boldsymbol{a_n}\cdot 10^n + \boldsymbol{a_{n-1}}\cdot 10^{n-1} +\ldots +\boldsymbol{a_1}\cdot 10 + \boldsymbol{a_0}$. Цей вираз ділиться на 2, оскільки всі множники 10 дляться на 2, тобто усі $r_i = 0$, то цей вираз перетвориться в $\boldsymbol{a_0}$. Тобто $\boldsymbol{a_0}$ теж буде ділитися на 2.

<u>*Ознака подільності на 3*</u>. ***Будь-яке число n діляться на 3 тоді і тільки тоді, коли сума цифр цього числа ділиться на 3.***

Дійсно, нехай сума цифр числа $\boldsymbol{n}$ ділиться на 3. Оскільки всі остачі при діленні будь-якого степеня числа 10 на 3 дорівнюють 1, то

$r_n = r_{n-1} = \ldots = r_1 = 1$, і тоді $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{a_n}\cdot 1 + \boldsymbol{a_{n-1}}\cdot 1 +\ldots +\boldsymbol{a_1}\cdot 1 + \boldsymbol{a_0}$, або

$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{a_n}+ \boldsymbol{a_{n-1}} +\ldots+ \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_0}$, яке за умовою ділиться на 3. А оскільки і вираз $3\cdot(\boldsymbol{a_n}\cdot q_n + \boldsymbol{a_{n-1}}\cdot q_{n-1}+ \boldsymbol{a_{n-2}}\cdot q_{n-2} +\ldots+ \boldsymbol{a_1}\cdot q_1)$ ділиться на 3, то з цього випливає, що й саме число $\boldsymbol{n}$ ділиться на 3.

Аналогічна й ознака подільності на 9. Доведення теж аналогічне.

<u>*Аналогічно доводиться,*</u> що ***на 4 діляться числа, у яких подвоєний розряд десятків плюс розряд одиниць ділиться на 4.*** Звідси ж можна зробити й інший висновок: ***на 4 діляться числа, у яких число, що складається з розрядів десятків і одиниць, ділиться на 4.***

<u>*Так само доводиться й те, що*</u> ***на 5 діляться числа, у яких розряд одиниць є число 5 або 0.*** А ***на 25 діляться числа, які закінчуються на 00, 25, 50, 75.***

Як бачимо, встановлення подільності на числа 2, 3, 4, 5, 9, 25 досить просте. Проте, для інших чисел встановлення подільності буває таким громіздким, що легше просто розділити одне на інше, ніж виконати всю множину дій для обчислення $\boldsymbol{R}$. Ми це бачили на прикладі встановлення подільності числа 235634 на число 7. Щоб спростити цю процедуру, скористаємося дещо іншим підходом до встановлення подільності.

Нехай нам задано певне натуральне число $\boldsymbol{n}$. (Природно, що це число не менше, ніж двоцифрове, тобто $\boldsymbol{n} > 10$). Тому будь-яке з таких чисел можна представити у вигляді $\boldsymbol{n} = 10 \cdot D + b$. (Наприклад, $2358 = 235 \cdot 10 + 8$. Тут $D = 235$, $b = 8$). Виведемо ознаки подільності на прості числа 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31… Розв'язання цього питання з одного боку важливе тим, що воно необхідне для встановлення класу певного натурального числа $\boldsymbol{n}$, – воно просте, чи складене? А з іншого – подільність на складені числа випливає знову ж із подільності на прості.

<u>Ознака подільності на 7.</u> Нехай нам задане певне натуральне число $\boldsymbol{n}$. Представимо його у вигляді $\boldsymbol{n} = 10 \cdot D + b$. Виконаємо такі перетворення: $\boldsymbol{n} = 10 \cdot D + b = 7D + 3D + 6b + b - 6b = (7D + 7b) + (3D - 6b) = 7(D + b) + 3(D - 2b)$. Доданок $7(D + b)$ завжди ділиться на 7. Значить подільність числа $\boldsymbol{n}$ на число 7 залежить від подільності числа $D - 2b$, де D – число десятків числа $\boldsymbol{n}$, а b – кількість одиниць. Отже, *натуральне число* $\boldsymbol{n}$ *ділиться на 7, якщо його кількість десятків мінус подвоєне число одиниць ділиться на 7*, тобто $(D - 2b) \vdots 7$. Наприклад, чи ділиться на 7 число 623? $623 = 62 \cdot 10 + 3$. Значить $D = 62$, $b = 3$. Обчислимо: $62 - 2 \cdot 3 = 62 - 6 = 56$. $56 \vdots 7$, значить і $623 \vdots 7$.

У цьому прикладі ми встановили подільність на 7 відносно невеликого числа. А як же бути з великими числами, коли після виконання обчислення ми знов отримуємо число, за яким не можемо одразу встановити подільність? Цей спосіб і тут нам допомагає. Просто процедуру треба повторити. Наприклад, встановимо подільність на 7 числа 32081. $D = 3208$, $b = 1$. $3208 - 2 \cdot 1 = 3206 \Rightarrow 320 - 2 \cdot 6 = 308 \Rightarrow$

$30 - 2\cdot 8 = 14$. $14 \vdots 7$, значить і $308 \vdots 7$, а звідси випливає, що і $3206 \vdots 7$, а тоді і $32081 \vdots 7$.

Отже, ознака подільності на 7 є $(D - 2b) \vdots 7$.

<u>*Ознака подільності на 11.*</u> Нехай задане число $\boldsymbol{n} = 10\cdot D + b$. Тоді $\boldsymbol{n} = 10\cdot D + b = 10\cdot D + D - D + b = 11\cdot D - (D - b)$. Звідси випливає, що *число **n** ділиться на 11, якщо $(D - b) \vdots 11$.* Наприклад, чи ділиться на 11 число 1023? $1023 \Rightarrow 102 - 3 = 99$. $99 \vdots 11$, значить і $1023 \vdots 11$.

<u>*Ознака подільності на 13.*</u> Нехай задане число $\boldsymbol{n} = 10\cdot D + b$. Будемо виходити з того, що якщо $\boldsymbol{n} \vdots 13$, то і $4\cdot\boldsymbol{n} \vdots 13$.

Тоді $4\cdot\boldsymbol{n} = 40\cdot D + +4b = 39\cdot D + D + 4b = 39\cdot D + (D + 4b)$. $39\cdot D$ завжди ділиться на 13. Звідси випливає, що *число **n** ділиться на 13, якщо $(D + 4b)$ ділиться на13.* Наприклад, чи ділиться число 533 на13? $533 \Rightarrow 53 + 12 = 65$. $65 \vdots 13$, значить і $533 \vdots 13$.

<u>*Ознака подільності на 17.*</u> Нехай задане число $\boldsymbol{n} = 10\cdot D + b$. Будемо виходити з того, що якщо $\boldsymbol{n} \vdots 17$, то і $5\cdot\boldsymbol{n} \vdots 17$. Тоді $5\cdot\boldsymbol{n} = 50\cdot D + 5b = 50\cdot D + D - D + 5b = 51\cdot D - (D - 5b)$. $51\cdot D$ завжди ділиться на 17. Звідси випливає, що *число **n** ділиться на 17, якщо $(D - 5b) \vdots 17$.* Наприклад, чи ділиться число 612 на 17?

$612 \Rightarrow 61 - 5\cdot 2 = 51$. $51 \vdots 17$, значить і $612 \vdots 17$.

<u>*Ознака подільності на 19.*</u> Нехай задане число $\boldsymbol{n} = 10\cdot D + b$. Будемо виходити з того, що якщо $\boldsymbol{n} \vdots 19$, то і $2\cdot\boldsymbol{n} \vdots 19$. Тоді

$2\cdot\boldsymbol{n} = 20\cdot D + 2b = = 19\cdot D + +D + 2b = 19\cdot D + (D + 2b)$. $19\cdot D$ завжди ділиться на 19. Звідси випливає, що *число **n** ділиться на 19, якщо $(D + 2b) \vdots 19$.* Наприклад, чи ділиться число 494 на 19?

$494 \Rightarrow 49 + 2\cdot 4 = 57$. $57 \vdots 19$, значить і $494 \vdots 19$.

Аналогічно виводяться ознаки подільності на: $23\ (7\cdot\boldsymbol{n}) \Rightarrow D + 7b$

$29\ (3\cdot\boldsymbol{n}) \Rightarrow D + 3b$

$31\ (3\cdot\boldsymbol{n}) \Rightarrow D - 3b$

$$37\ (11\cdot\boldsymbol{n}) \Rightarrow D - 11b$$

$$41\ (4\cdot\boldsymbol{n}) \Rightarrow D - 4b$$

і т.д.

Виведені ознаки подільності на основі теореми про визначення простого числа дають нам можливість легко встановити клас будь-якого натурального числа. Наприклад, число 617 просте чи складене? На основі теореми про існування простого дільника у будь-якого складеного числа ми визначаємо, що якщо це число складене, то його найменший простий дільник не більше $\sqrt{617} \approx 24$. Значить треба перевірити подільність цього числа на всі прості числа від 2 до 23. На основі ознак подільності встановлюємо, що 617 не ділиться ні на одне з простих чисел (ані на 2, ані на 3, ані на 5, ані на 7, ані на 11, ані на 13, ані на 17, ані на 19, ані на 23. Значить число 617 просте.

В п р а в и.

1. Використовуючи ознаки подільності, встановити, які з чисел діляться на 2, 3, 4, 5, 9, 25.

11220	125172	81765	136275	444444	36694
10044	113850	67032	121212	123123	36252
10008	765453	83172	121104	121134	85825
11344	140014	17017	201015	380128	91113

2. На які прості числа діляться числа:

399,	527,	1001,
713,	651,	2023,
493,	1771,	3367,
646,	3157,	697,
663,	663,	1045,

391, 1463, 53599.

3. Встановити клас указаних чисел:

317	831	612	527	611	621	1573	3698	59299
713	409	413	419	651	671	5681	4433	4669
911	913	919	459	479	499	901	1013	12111
439	449	459	677	679	697	811	1051	1271
757	857	957	673	773	873	313	831	481

4. Властивості простих чисел

Оскільки будь-яке складене число має прості дільники, то постає необхідність встановлення взаємозв'язку цих дільників з даним числом. Для цього розглянемо низку означень і теорем, які глибше розкривають деякі властивості простих чисел.

Означення. *Якщо число **a** ділиться на число **q** і число **b** ділиться на число **q**, то говорять, що число **q** є спільним дільником чисел **a** і **b**.*

Означення. *Якщо числа **a** і **b** не мають спільних дільників, окрім 1, то вони називаються взаємно простими.*

Теорема 1. *Якщо натуральне число **a** не ділиться на просте число **p**, то числа **a** і **p** взаємно прості.*

Дійсно, нехай числа a і p окрім 1 мають ще спільний дільник q. Тоді $p \vdots q$. Але просте число p має лише два дільники 1 і p. Тому або $q = p$, або $q = 1$. Якщо $q = p$, то і $a \vdots p$, що суперечить умові. Значить $q = 1$, тобто a і p взаємно прості.

Теорема 2. *Якщо добуток **ab** натуральних чисел **a** і **b** ділиться на натуральне число **m**, яке взаємно просте з **a**, то **b** ділиться на **m**.*

Дійсно, оскільки ***ab*** ділиться на ***a*** і на ***m***, і ***a*** з ***m*** взаємно прості, то ***ab*** ділиться на ***am*** (згідно із властивістю відношення подільності п.10, стор. 60), а значить ***b*** ділиться на ***m***.

*<u>Теорема 3.</u> Якщо добуток двох натуральних чисел **a** і **b** ділиться на просте число **p**, то хоч би одне з них ділиться на **p**.*

Оскільки добуток $\boldsymbol{a \cdot b}$ ділиться на $\boldsymbol{p}$, то $\boldsymbol{p}$ є спільним дільником числа $\boldsymbol{c = a \cdot b}$ і числа $\boldsymbol{p}$.

Припустимо, що число $\boldsymbol{a}$ не ділиться на $\boldsymbol{p}$. Тоді за теоремою (1) числа $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{p}$ взаємно прості. Згідно ж із попередньою теоремою (2), якщо ab ділиться на a і на p, а a з p взаємно прості, то b ділиться на p.

<u>Теорема 4.</u> Якщо добуток декількох простих чисел ділиться на просте число, то це просте число дорівнює одному з співмножників діленого.

Дійсно, нехай $M = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$, де p_i – прості числа, і нехай $M \vdots q$, де q – теж просте число. Доведемо, що q – збігається з одним із співмножників p_i. Згідно з теоремою (3) хоч би одне з чисел p_1, p_2, p_3, …, p_n повинно ділитися на число q. Але ж усі p_i є прості числа, тобто такі, що діляться лише самі на себе і на 1. Оскільки ж $q \neq 1$ (бо воно просте), значить q збігається з якимось p_i.

<u>Теорема 5 (Основна теорема арифметики).</u> ***Будь-яке складене число можна представити у вигляді добутку простих множників, причому єдиним способом (не враховуючи порядку співмножників).***

Доведення цієї теореми передбачає дві частини: можливості представлення й одиничності.

Доведемо можливість. Нехай $\boldsymbol{n}$ – складене натуральне число. Тоді воно має власні дільники, і серед них найменший простий $\boldsymbol{p_1}$. Тоді $\boldsymbol{n = p_1 \cdot q_1}$. Якщо $\boldsymbol{q_1}$ – просте, то розклад числа закінчено. Якщо ж $\boldsymbol{q_1}$ складене, то воно так само має найменший простий дільник $\boldsymbol{p_2}$ такий, що $\boldsymbol{q_1 = p_2 \cdot q_2}$. Підставивши $\boldsymbol{q_1}$ в попередній вираз, отримаємо $\boldsymbol{n = p_1 \cdot p_2 \cdot q_2}$. Якщо $\boldsymbol{q_2}$ просте, то розкладання закінчене, якщо ж складене, то процес повториться знов і так доки число $\boldsymbol{q_n}$ не стане простим. А це буде обов'язково, бо з кожним наступним кроком число $\boldsymbol{q_i}$ буде зменшуватися, а натуральний ряд чисел обмежений знизу.

Отже, число n буде мати вигляд $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \ldots p_n \cdot q_n$, тобто число n представлене у вигляді добутку простих чисел.

Доведемо тепер, що розкласти на множники складене число n можна лише одним способом, якщо не враховувати порядок співмножників.

Виділимо в множині натуральних чисел підмножину таких складених чисел, які можна розкласти на прості множники декількома способами. Виберемо серед них *найменше* n. Нехай це натуральне число n можна розкласти двома способами, тобто $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_m$ і $n = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_k$. Тоді $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_m = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_k$. Права частина ділиться на просте число q_1, значить і ліва повинна ділитися на q_1. Тоді за теоремою, згідно з якою *якщо просте число* p *ділиться на деяке натуральне число* $n \neq 1$, *то воно збігається з* n (стор. 64), якесь p_i повинно ділитися на q_1, а оскільки всі множники p_i прості, то q_1 повинне збігатися з якимось p_i. Для визначеності нехай цим p_i буде p_1, тобто $p_1 = q_1$. Скоротимо обидві частини рівності добутків на p_1. Отримаємо рівність $p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_m = q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_k$. Продовжуючи такі ж міркування й надалі, звільнимося від рівних співмножників і дійдемо стану, коли залишаться різні співмножники. Нехай це станеться на l-тому кроці. Тобто залишиться рівність $p_l \cdot \ldots \cdot p_m = q_l \cdot \ldots \cdot q_k = c$. Позначимо добуток $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{l-1} = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_l = d$. Тоді отримаємо рівність $c = n : d$, де $c < n$, оскільки число c є добутком лише частини співмножників числа n. Виходить, що число c є теж таким, що має різне розкладення, і воно менше за n, а ми виходили з того, що n – найменше. Протиріччя. Значить число c може мати лише одне розкладання на прості множники. А значить добуток числа c на число d, який дорівнює числу n, дає лише одне розкладання. Різниця може бути лише в порядку співмножників, але за комутативною властивістю множення це несуттєво.

Здебільшого в розкладанні складених чисел прості співмножники записуються в порядку збільшення. Такий запис $\boldsymbol{a = p_1^{\alpha} \cdot p_2^{\beta} \cdot \ldots \cdot p_n^{\omega}}$, де $\boldsymbol{p_1 < p_2 < \ldots < p_n}$**,** називається *канонічним розкладанням числа* ***a***.

Значення цієї теореми настільки велике, що вона отримала назву ***основної теореми арифметики.***

Аналізуючи натуральний ряд чисел з позицій приналежності їх до того чи іншого класу, ми відмічаємо, що в першому десятку налічується 4 простих числа: 2, 3, 5, 7. У другому десятку – теж чотири: 11, 13, 17, 19. У третьому десятку – вже два: 23 і 29. У четвертому – теж два: 31 і 37 і так далі. Чим далі ми будемо віддалятися від початку натурального ряду, тим рідше будемо натрапляти на прості числа. Так може наступити такий момент, що прості числа на якомусь закінчаться і далі вже будуть тільки складені? Відповідь на це питання досить важлива і до неї зверталися навіть у сиву давнину. Його закрив відомий давньогрецький математик і філософ Евклід (ІІІ ст.. до н.е.), довівши наступну теорему.

Теорема (Евкліда). ***Множина простих чисел нескінченна.***

Щоб довести цю теорему, треба упевнитися, що скільки б простих

чисел ми не взяли, завжди знайдеться ще одне просте число, яке відрізняється від усіх тих, які ми взяли.

Дійсно, візьмемо будь-яку кількість простих чисел 2, 3, 5, 7, … p і утворимо з них добуток $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot p$. Із цим добутком утворимо число $P = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot p + 1$. Якщо число P просте, то теорема доведена, оскільки ми знайшли ще одне просте число, яке відрізняється від усіх уже нам відомих. Якщо ж число $\boldsymbol{P}$ складене, то воно має найменший власний простий дільник $\boldsymbol{q}$. Доведемо, що цей простий дільник $\boldsymbol{q}$ не збігається з жодним із уже відомих нам простих чисел $\boldsymbol{p_i}$. Дійсно, якщо б цей дільник q збігався хоч би з одним з $\boldsymbol{p_i}$, то вийшло б, що $\boldsymbol{P \vdots q}$**,** тобто $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot p \vdots q$, тоді і число 1 повинно ділитися на $\boldsymbol{q}$. Але ж 1 не ділиться ні на яке число окрім себе. Суперечність. Значить число $\boldsymbol{q}$ не збігається з жодним із відомих простих чисел, тобто це нове просте число. Значить множина простих чисел нескінчена.

В п р а в и.

1. Довести, що різниця між квадратом числа, що не ділиться на 3, і одиницею ділиться на 3.

2. Довести, що якщо число не ділиться на 5, то його квадрат, збільшений або зменшений на 1, ділиться на 5.

3. Довести, що квадрат цілого числа або ділиться на 4, або при діленні на 4 дає в остачі 1.

4. Довести, що якщо кожне з двох натуральних чисел при діленні на 3 дає в остачі 1, то їхній добуток при діленні на 3 дає теж остачу 5.

5. Довести, що якщо одне з двох натуральних чисел при діленні на 3 дає остачу 1, а друге – остачу 2, то їхній добуток при діленні на 3 дає остачу 2.

6. Довести, що число, яке є квадратом натурального числа, або ділиться на 3, або при діленні на 3 дає остачу 1.

7. Довести, що якщо кожне з двох натуральних чисел при діленні на 4 дає остачу 1, то їхній добуток при діленні на 4 теж дає остачу 1.

8. Довести, що при будь-якому натуральному n виконується подільність:

а) $(n^3 + 5n + 12) \vdots 6;$

б) $n(n+1)(n+2)(n+3) \vdots 24;$

в) $((2n-1)^2 - 1) \vdots 8;$

г) $n(n+1)^2 \vdots 12;$

д) $n(n+1)(n+2) \vdots 6;$

є) $((2n-1)^3 - (2n-1)) \vdots 24;$

ж) $(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3) \vdots 3$

з) $(2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}) \vdots 14;$

і) $((2n+1)^2 - (2n-1)^2) \vdots 8;$

к) $(n^3 + 11n + 6) \vdots 6.$

4. Найменше спільне кратне

При розв’язанні багатьох задач, особливо в курсі математики середньої та старшої ланки школи, виникає необхідність знаходження чисел, які б ділилися на всі задані числа. Наприклад, при знаходженні спільного знаменника під час виконання додавання або віднімання звичайних дробів. Це питання розв’язується за допомогою такого поняття, як *найменше спільне кратне.*

Нехай задані два числа $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$. Якщо число $\boldsymbol{a}$ ділиться на число $\boldsymbol{b}$, то говорять, що $\boldsymbol{a}$ кратне $\boldsymbol{b}$, а число $\boldsymbol{b}$ – дільник числа $\boldsymbol{a}$. Так, оскільки число 0 ділиться на всі числа, то кажуть, що число 0 кратне будь-якому натуральному числу. Знайти число кратне $\boldsymbol{b}$, значить знайти число, яке ділиться на $\boldsymbol{b}$. Наприклад, для числа 4 кратними будуть 8, 12, 16, 20, …, тобто будь-яке число $4n$. А оскільки $\boldsymbol{n}$ може приймати безліч значень, то і число 4 має безліч кратних. Звичайно, це стосується не лише числа 4, а й будь-якого натурального числа.

Розглянемо ще один приклад. Визначимо кілька кратних для чисел 4 і 3. Для числа 4 кратними будуть 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, … Для числа 3 кратними будуть 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, … Аналізуючи ці два ряди кратних, ми стикаємося з фактом, що в обох рядах трапляються однакові числа: 12, 24, 36, … Ці числа є кратними і для 3, і для 4, тобто є спільними. Значить виходить, що для різних чисел має місце факт, що вони мають однакові, тобто спільні кратні. До того ж, оскільки ці множини нескінченні, і ми бачимо, що спільне кратне теж не одне, то є сенс уважати, що множина спільних кратних теж нескінченна, тобто не має смислу говорити про найбільше спільне кратне. Знизу ж ці обидві множини обмежені. Тому і множина спільних кратних обмежена знизу (див. аксіому найменшого числа). Тому обидва числа мають найменше спільне кратне.

Яке ж воно? Як його знаходити? Які його властивості? Де воно використовується? Усі ці запитання викликають певну зацікавленість, тому є смисл його і розглядати.

<u>*Означення.*</u> ***Найменшим спільним кратним декількох чисел називається число, яке ділиться на всі задані числа.*** Найменше спільне кратне (НСК) чисел $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ позначають $K[\boldsymbol{a;b}]$. Наприклад, $K[3; 4] = 12$.

Найменше спільне кратне декількох чисел має такі властивості:

1. *Які б не були натуральні числа* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots, \boldsymbol{n}$, *завжди існує їхнє спільне кратне.*

Дійсно, найпростішим випадком тут може бути добуток цих чисел. Тоді за теоремою, яка наслідує основну теорему арифметики, випливає, що цей добуток ділиться на кожне з цих заданих чисел, а тому є їхнім спільним кратним.

2. *Якщо число* K *є спільним кратним чисел* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\ldots\boldsymbol{n}$, *то і добуток числа* K *на будь-яке натуральне число р буде спільним кратним цих чисел.*

Дійсно, якщо K – спільне кратне чисел $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\ldots\boldsymbol{n}$, то $K \vdots \boldsymbol{a}$, $K \vdots \boldsymbol{b}$, $K \vdots \boldsymbol{c}$, …, а тоді і $pK \vdots \boldsymbol{a}$, $pK \vdots \boldsymbol{b}$, $pK \vdots \boldsymbol{c}$, … Що і треба було довести. Звідси і випливає, що будь-які дані числа мають безліч спільних кратних. А за аксіомою найменшого числа серед них завжди є найменше. Ця властивість приводить до висновку про існування НСК для будь-якої кількості натуральних чисел.

3. *Будь-яке спільне кратне заданих чисел (у тому числі і НСК) не менше за найбільше з них.*

Дійсно, якщо задані числа $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$, і при цьому $\boldsymbol{a} \ge \boldsymbol{b} \ge \boldsymbol{c}$, то і їх спільне кратне $K \ge \boldsymbol{a}$, оскільки $K \vdots \boldsymbol{a}$.

4. *Якщо одне з заданих чисел кратне всім іншим, то воно є НСК усіх цих чисел*.

Тобто, якщо $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{c}$ і $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{d}$, то і $K\,[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\,] = \boldsymbol{a}$. Дійсно, оскільки $\boldsymbol{a}$ кратне чисел $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ і $\boldsymbol{d}$ і кратне самому собі, то воно є спільним кратним усіх цих чисел, а на основі попередньої властивості, виходячи з того, що $\boldsymbol{a}$ – найбільше із заданих чисел, то $\boldsymbol{a}$ є їхнє НСК.

5. *Будь-яке спільне кратне заданих чисел кратне і їхньому НСК.*

Нехай K – спільне кратне чисел $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{k}$ – їхнє спільне кратне, а $\boldsymbol{q}$ – найменше спільне кратне. Необхідно довести, що $\boldsymbol{k} \vdots \boldsymbol{q}$**.** Припустимо, що це не так. Оскільки $\boldsymbol{q}$ – найменше спільне кратне, то $\boldsymbol{q \le k}$**.** Тоді розділимо $\boldsymbol{k}$ на $\boldsymbol{q}$ з остачею. Отримаємо $\boldsymbol{k = qm + r}$, де $\boldsymbol{r < q}$. Оскільки $k \vdots \boldsymbol{a}$ і $q \vdots \boldsymbol{a}$, то і $r \vdots \boldsymbol{a}$. Аналогічно $r \vdots \boldsymbol{b}$ і $r \vdots \boldsymbol{c}$. А значить $\boldsymbol{r}$ – спільне кратне цих чисел. А оскільки $r < q$, а q – найменше спільне кратне, то виходить, що $\boldsymbol{r}$ – кратне, менше за найменше, чого бути не може. Протиріччя. Значить наше припущення, що $\boldsymbol{k}$ не ділиться на $\boldsymbol{q}$ хибне, тобто $\boldsymbol{k} \vdots \boldsymbol{q}$**.** Що і треба було довести.

6. *Якщо кожне із заданих чисел збільшити в одну й ту ж кількість разів, то і їхнє НСК збільшиться у стільки ж разів.*

Нехай $K[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = q$. Тоді $q \vdots \boldsymbol{a}$. Помноживши обидва ці числа на якесь число p, отримаємо на основі властивості 2, що $pq \vdots p\boldsymbol{a}$. Аналогічно $pq \vdots p\boldsymbol{b}$ і $pq \vdots p\boldsymbol{c}$, тобто pq є спільне кратне чисел $p\boldsymbol{a}$, $p\boldsymbol{b}$ і $p\boldsymbol{c}$. Нехай $K[p\boldsymbol{a}, p\boldsymbol{b}, p\boldsymbol{c}] = k$. Тоді за властивістю 5 $pq \vdots k$. Нехай $pq : k = g$, тобто $pq = kg$. Водночас $k \vdots p\boldsymbol{a}$, значить $k = (p\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a_1}$. Підставивши значення k у рівність $pq = kg$, отримаємо

$$pq = g\cdot(p\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a_1} = (p\boldsymbol{a})\cdot(g\cdot\boldsymbol{a_1}).$$

Звідси $q = \boldsymbol{a}\cdot(g\cdot\boldsymbol{a_1})$. Аналогічно знайдемо, що $q = \boldsymbol{b}\cdot(g\cdot\boldsymbol{b_1})$ і $q = \boldsymbol{c}\cdot(g\cdot\boldsymbol{c_1})$. А тоді $g\cdot\boldsymbol{a_1}$, $g\cdot\boldsymbol{b_1}$ і $g\cdot\boldsymbol{c_1}$, які є частками від ділення НСК (числа q) чисел $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$ на кожне з них, не мають більше спільних дільників, тобто $g = 1$. А це означає, що $k = pq$, і $K[p\boldsymbol{a}, p\boldsymbol{b}, p\boldsymbol{c}] = pq$. Що й треба було довести.

7. *НСК декількох заданих чисел не зміниться, якщо частину з них замінити їхнім НСК.*

Дійсно, нехай $K[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}] = q$ і нехай $K[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = k$. Доведемо, що $K[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}] = K[k, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}]$. Оскільки q є спільним кратним чисел $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$, то відповідно до властивості 5 q кратне і k. Звідси випливає, що число q є спільним кратним і чисел k, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$.

Спосіб обчислення НСК.

Один із найпоширеніших способів обчислення НСК ґрунтується на канонічному розкладанні заданих чисел на прості множники.

Нехай задані два натуральних числа $\boldsymbol{a} = p_n^{\alpha} \cdot p_{n-1}^{\beta} \cdot p_{n-2}^{\gamma} \cdot \ldots \cdot p_1^{\mu}$ і $\boldsymbol{b} = p_n^{\delta} \cdot p_{n-1}^{\lambda} \cdot p_{n-2}^{\kappa} \cdot \ldots \cdot p_1^{\nu} \cdot q_r^{\sigma}$, які мають однакові множники p_i. Для визначеності приймемо, що $\alpha > \delta$, $\beta < \lambda$, $\gamma > \kappa$, $\mu = \nu$. Нехай $K[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = P$. Щоб P ділилося на число $\boldsymbol{a}$, необхідно, щоб його розклад містив у собі всі множники числа $\boldsymbol{a}$, а щоб P ділилося на число $\boldsymbol{b}$, необхідно, щоб його розклад містив у собі всі множники числа $\boldsymbol{b}$, тобто однакові множники p_n повинні увійти у розклад числа P у степені α, p_{n-1} – у степені λ, p_{n-2} – у степені γ,…, p_1 – у степені μ. Окрім них, щоб число P ділилося на число $\boldsymbol{b}$, треба щоб у розклад його входили і множники q. Звідси випливає, що для того, щоб знайти НСК декількох чисел, треба утворити добуток із спільних співмножників, узятих у найбільшому степені, і множників, які входять у розклад лише одного з чисел. Наприклад, нехай треба знайти НСК чисел 72, 180 і 378. Утворимо їхній канонічний розклад: $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$; $378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$. Очевидно, що канонічний розклад НСК цих чисел повинен складатися з множників, які входять у розкладання кожного з цих чисел. Тобто, щоб НСК ділилося, скажімо, на 180, треба, щоб воно містило 2^2, 3^2 і число 5. А щоб воно ділилося на 72, воно повинно мати множник 2 в степені 3. Отже, множник 2 повинен увійти в НСК у степені 3. Якщо це буде так, то на 2^2 і на 2^1 він завжди розділиться. Аналогічно при діленні на 378 число 3 повинно увійти в третьому степені, і ще один множник – число 7. Отже, $K[72, 180, 378] = = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

Цей процес можна подати і в дещо іншому вигляді. Представимо задані числа в *однаковому складовому вигляді*, тобто у вигляді добутку однакових співмножників: $72 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^0$; $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0$;

$378 = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \cdot 7^1$. Порівнявши їх з НСК, відмічаємо, що в його розкладання входять спільні співмножники в найбільшому степені.

Отже, *щоб обчислити НСК декількох чисел, треба розкласти їх на множники і, представивши їх в однаковому складовому вигляді, утворити добуток спільних співмножників, узятих у найбільшому степені.*

5. Найбільший спільний дільник.

Нехай задані два числа: 24 і 40. Визначимо дільники цих чисел:

24: дільники – 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

40: дільники – 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40.

Аналізуючи склад дільників цих чисел, ми відмічаємо, що серед них є спільні: 1, 2, 4, 8. Тобто це такі числа, на які діляться усі задані числа. До того ж, виходячи з 1-ої властивості подільності, ми знаємо, що число 1 є найменшим дільником кожного натурального числа. З цього ж числа починається і ряд дільників кожного числа. А от завершується цей ряд спільних дільників цілком конкретним числом. Для дільників кожного числа – це один із його дільників, а в ряду спільних дільників він є найбільшим. Знаходження спільних дільників необхідне, наприклад, при скороченні дробів. Причому елементи скороченого дробу будуть найменшими, якщо скорочення відбудеться на число, яке є найбільшим спільним дільником. Тобто серед усіх спільних дільників найбільшу цікавість викликає *найбільший спільний дільник.*

Означення. ***Найбільшим спільним дільником декількох натуральних чисел називається найбільше число, на яке діляться всі задані числа.***

Найбільший спільний дільник (НСД) чисел $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, …, $\boldsymbol{k}$ позначається $D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots, \boldsymbol{k})$, або для спрощення запису просто $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots, \boldsymbol{k})$.

Виходячи з означення, визначимо основні властивості НСД.

1. *Які б не були задані натуральні числа, завжди існує їхнє НСД.*

Дійсно, усі натуральні числа мають спільним дільником число 1. І якщо інших спільних дільників немає, то число 1 буде і їхнє НСД.

<u>*Означення.*</u> ***Числа, у яких НСД дорівнює 1, називаються взаємно простими.***

2. *Найбільший спільний дільник декількох чисел не більше найменшого з заданих чисел.*

Дійсно, нехай задані числа $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ і нехай $\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{b} \le \boldsymbol{c}$, тобто число $\boldsymbol{a}$ – найменше з них. І нехай $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots, \boldsymbol{k}) = d$. Оскільки кожне з них повинно ділитися на d, то разом з усіма і найменше число $\boldsymbol{a}$ повинно ділитися на d, а значить $d \le \boldsymbol{a}$, тобто d не більше найменшого із заданих чисел.

3. *Якщо одне із заданих чисел є дільником інших, то воно є і НСД заданих чисел.*

Дійсно, нехай задані натуральні числа $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ і нехай $\boldsymbol{b} \vdots \boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{c} \vdots \boldsymbol{a}$.

Значить $\boldsymbol{a}$ є спільним дільником чисел $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$. А оскільки і $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{a}$, то число $\boldsymbol{a}$ є і найбільшим спільним дільником заданих чисел.

Перш ніж говорити про інші властивості НСД, розглянемо спосіб його знаходження способом розкладення на множники. Розглянемо це на числовому прикладі. Нехай задані числа 1080, 1440 і 2520. Розкладемо їх на прості множники і запишемо у вигляді добутку: $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$, $1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$, $2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Згідно з означенням спільний дільник повинен ділити всі ці числа, тобто складатися з добутку спільних множників. Такими є 2^3, 3^2 і 5, значить $D(1080, 1440, 2520) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$. Як бачимо, до складу НСД входять спільні співмножники, узяті в найменшому степені.

Очевидно, що цей спосіб може бути використаний для будь-яких чисел, тому правило знаходження найбільшого спільного дільника таким способом можна сформулювати так:

<u>*Правило.*</u> ***Щоб знайти найбільший спільний дільник декількох натуральних чисел, треба розкласти їх на прості множники й***

утворити добуток спільних множників, взятих у найменшому степені.

4. *Будь-який спільний дільник заданих чисел є водночас і дільником їхнього найбільшого спільного дільника*.

Дійсно, якщо d є який-небудь спільний дільник чисел $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$, то він складається із певних спільних дільників даних чисел. НСД також складається із спільних дільників цих чисел. Тому множники, які входять в розкладання спільного дільника d, входять і до розкладання найбільшого спільного дільника. Але НСД більший за d, тому множники d входять до множини множників НСД як підмножина. Тому НСД заданих чисел ділиться на d.

5. *Якщо всі задані числа помножити на те саме число, то і їхній НСД збільшиться в стільки ж разів.*

Тобто треба довести, що якщо $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = d$, то $(\boldsymbol{a}k, \boldsymbol{b}k, \boldsymbol{c}k) = dk$.

Дійсно, якщо $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = d$, то множники, з яких складається число d, є спільними для цих чисел. А тоді числа $\boldsymbol{a}k$, $\boldsymbol{b}k$ і $\boldsymbol{c}k$ окрім цих спільних множників будуть мати і спільний множник k. Але ж оскільки він буде спільним, то він повинен входити окрім усіх множників d і в НСД, тобто НСД чисел $\boldsymbol{a}k$, $\boldsymbol{b}k$ і $\boldsymbol{c}k$ буде dk, що і треба було довести.

6. *Якщо добуток двох чисел ділиться на число, взаємно просте із одним з співмножників, то другий співмножник ділиться на це число*, тобто якщо $\boldsymbol{ab} \vdots \boldsymbol{c}$ і $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = 1$, то $\boldsymbol{b} \vdots \boldsymbol{c}$.

Нехай задані числа $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$, які задовольняють зазначеним умовам. Збільшимо числа $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{c}$ в $\boldsymbol{b}$ разів. Тоді, оскільки $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = 1$, то на основі попередньої властивості будемо мати $(\boldsymbol{ab}, \boldsymbol{cb}) = \boldsymbol{b}$. Але $\boldsymbol{ab} \vdots \boldsymbol{c}$ і $\boldsymbol{cb} \vdots \boldsymbol{c}$, тоді $\boldsymbol{c}$ є спільний дільник чисел $\boldsymbol{ab}$ і $\boldsymbol{cb}$. Значить $\boldsymbol{c}$ повинно бути дільником і НСД цих чисел, тобто дільником числа $\boldsymbol{b}$, тобто $\boldsymbol{b} \vdots \boldsymbol{c}$, що і треба було довести.

7. *(Основна властивість НСД). Якщо декілька з даних чисел мають спільний дільник взаємно простий з іншими заданими числами, то НСД усіх заданих чисел не зміниться, якщо ці*

перші дані числа розділити на їхній НСД.

Наприклад, нехай задані числа 60, 40, 24,16. Тоді (60,40,24,16) = 4. Число 5 – спільний дільник чисел 60 і 40. Окрім цього (5, 24) = 1 і (5, 16) = 1. Тоді, розділивши 60 і 40 на 5, отримаємо множину чисел 2, 8, 24, 16, для яких (12, 8, 24, 16) = 4.

Отже, нехай задані числа $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ і $\boldsymbol{d}$, і число k – спільний дільник чисел $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$. При цьому $(\boldsymbol{c}, k) = 1$ і $(\boldsymbol{d}, k) = 1$. Оскільки $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ діляться на k, то позначимо $\boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{a} : k$ і $\boldsymbol{b_1} = \boldsymbol{b} : k$. Доведемо, що $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$.

Нехай p – спільний дільник усіх заданих чисел. Оскільки $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a_1} \cdot k$ і $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b_1} \cdot k$, то $\boldsymbol{a_1} \cdot k \vdots p$ і $\boldsymbol{b_1} \cdot k \vdots p$. За умовою $(k, \boldsymbol{c}) = 1$, тобто k і $\boldsymbol{c}$ не мають спільних дільників, а p – є дільник числа $\boldsymbol{c}$, то звідси випливає, що $(k, p) = 1$. Виходячи із цього, а також з того, що $\boldsymbol{a_1} \cdot k \vdots p$ і $\boldsymbol{b_1} \cdot k \vdots p$, на основі властивості 6 робимо висновок, що $\boldsymbol{a_1} \vdots p$ і $\boldsymbol{b_1} \vdots p$, тобто число p є спільним дільником чисел $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{c}$ і $\boldsymbol{d}$. НСД же цих чисел є одним із спільних дільників. Отже, теорема доведена.

8. *НСД декількох чисел не зміниться, якщо будь-яку пару цих чисел замінити їхнім НСД.*

Із цього твердження випливає, якщо задані числа $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ і $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = k$, то $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) = (k, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$. Доведемо це.

Нехай m – спільний дільник заданих чисел $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$. Тоді він буде складатися з усіх спільних дільників цих чисел, зокрема і з спільних дільників чисел $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$. А це означає, що $k \vdots m$. Оскільки ж m є будь-який дільник заданих чисел, то серед цих дільників буде і НСД заданих чисел. Отже, k буде ділитися і на НСД заданих чисел, тобто $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) = (k, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$.

Навпаки, нехай p – спільний дільник чисел k, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$. Тоді p буде і спільним дільником чисел $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$, а значить і чисел $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$. Що і треба було довести.

На цій властивості будується ще один спосіб обчислення НСД декількох чисел. Наприклад, нехай задані числа 724, 176, 288 і 224.

Знайдемо НСД цих чисел, замінюючи поступово групи чисел їхніми спільними дільниками: (72, 68, 88, 32) = (4, 88, 32) = (4, 8) = 4.

9. *Будь-який спільний дільник двох чисел буде найбільшим у тому випадку, якщо частки від ділення заданих чисел на цей спільний дільник будуть взаємно простими.*

Нехай задані числа $\boldsymbol{a}$, і $\boldsymbol{b}$, і $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = d$. Тоді $\boldsymbol{a} : d = \boldsymbol{a_1}$ і $\boldsymbol{b} : d = \boldsymbol{b_1}$.

Доведемо, що $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_1}) = 1$.

Нехай $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_1}) = p$. Тоді $\boldsymbol{a_1} = p\cdot\boldsymbol{a_2}$ і $\boldsymbol{b_1} = p\cdot\boldsymbol{b_2}$. Але ж $\boldsymbol{a} : d = \boldsymbol{a_1}$ і $\boldsymbol{b} : d = \boldsymbol{b_1}$, значить $\boldsymbol{a} = dp\boldsymbol{a_2}$ і $\boldsymbol{b} = dp\boldsymbol{b_2}$. Виходить, що НСД чисел $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ буде число dp, а ми виходили з того, що НСД цих чисел є число d. Протиріччя. Значить наше припущення, що $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_1}) = p$, хибне, тобто $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_1}) = 1$.

10. *Якщо деяке число ділиться на два взаємно простих числа, то воно ділиться і на їхній добуток.* Тобто, якщо $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{c}$, де $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 1$, то $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{bc}$.

Дійсно, нехай $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \cdot p$. Оскільки $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{c}$, то $\boldsymbol{b}p \vdots \boldsymbol{c}$. Але $\boldsymbol{b}$ не ділиться на $\boldsymbol{c}$, тоді за властивістю 6 $p \vdots \boldsymbol{c}$. Нехай $p = \boldsymbol{c}k$. Підставивши p у рівність $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}p$, отримаємо $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{bc}k$, а це означає, що $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{bc}$. Що і треба було довести.

Із цієї властивості випливає ознака подільності на складне число:

Щоб число $\boldsymbol{n}$ *ділилося на число* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{bc}$, *де* $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 1$, *необхідно, щоб* $\boldsymbol{n} \vdots \boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{n} \vdots \boldsymbol{c}$. Наприклад, 6 = 2·3. Значить, на 6 ділиться будь-яке парне число, сума цифр якого ділиться на 3.

Алгоритм Евкліда

Способи обчислення НСД, які ми розглянули вище, досить прості і зручні для невеликих чисел. Коли ж постає задача обчислити НСД для великих чисел, то їх використання стає надто громіздким, особливо, коли в розкладання цих чисел входять великі прості числа, які ми одразу не можемо визначити наочно, що вони прості. Це питання постало перед арифметикою вже на зорі розвитку математики і було успішно розв'язане відомим грецьким ученим Евклідом. Тому і метод, яким воно розв'язувалося, отримав назву *алгоритм Евкліда.*

Цей спосіб ґрунтується на 3-й властивості найбільшого спільного дільника, яка свідчить, що *якщо одне із заданих чисел є дільником* інших, то воно є і НСД заданих чисел, а також на такій лемі:

Лема. ***Якщо*** $\boldsymbol{a = bq + r}$, ***то*** $D(a, b) = D(b, r)$.

Дійсно, нехай $\boldsymbol{d}$ – якийсь спільний дільник чисел $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$, тобто $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{d}$ і $\boldsymbol{b} \vdots \boldsymbol{d}$. А тоді на основі властивості подільності 6 і $\boldsymbol{r = a - bq}$ ділиться на $\boldsymbol{d}$.

Навпаки, нехай $\boldsymbol{p}$ – якийсь спільний дільник чисел $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{r}$. Тоді на основі властивості подільності 5 і $\boldsymbol{a = bq + r}$ буде ділитися на $\boldsymbol{p}$. І це, як бачимо, стосується всіх спільних дільників цих чисел. А оскільки їх множина обмежена, то серед них буде найбільший, який теж задовольняє цим умовам, тобто $D(a, b) = D(b, r)$, що і треба було довести.

Алгоритм Евкліда. Нехай задані числа $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ і нехай $\boldsymbol{a > b}$. Розділимо $\boldsymbol{a}$ на $\boldsymbol{b}$ з остачею, тобто $\boldsymbol{a = bq_1 + r_1}$, де $\boldsymbol{r_1 < b}$. Нехай d – найбільший спільний дільник чисел $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$, тобто $(\boldsymbol{a, b}) = d$. Але за нашою лемою $d = (\boldsymbol{b, r_1})$. Оскільки $\boldsymbol{r_1 < b}$, розділимо $\boldsymbol{b}$ на $\boldsymbol{r_1}$ з остачею, тобто $\boldsymbol{b = r_1}q_2 + \boldsymbol{r_2}$. Тоді $(\boldsymbol{b, r_1}) = (\boldsymbol{r_1, r_2})$. І так далі. У цьому процесі кожна наступна остача буде меншою за попередню, тобто отримаємо ряд, у якому $\boldsymbol{a \geq b > r_1 > r_2} > \ldots > \boldsymbol{r_{n-1} > r_n}$. Остачі монотонно зменшуються, тому згідно з властивістю 6 ряду натуральних чисел, процес ділення повинен завершитися. А завершиться він тоді, коли остання остача буде дорівнювати нулю. Саме нулю, оскільки якщо остача буде не нуль, то на неї ще можна буде ділити, ми ж розглядаємо крок, на якому процес ділення завершено, тобто далі ділення неможливе, а неможливе воно тільки на нуль. Звідси завершальний етап буде виглядати так: $\boldsymbol{r_{n-1} = r_n}\, q_{n-1} + \boldsymbol{r_{n+1}}$. Тоді $(\boldsymbol{r_{n-1}, r_n}) = (\boldsymbol{r_n, r_{n+1}}) = d$. Останній же крок $\boldsymbol{r_n = r_{n+1}}\, q_n + 0$, тобто $\boldsymbol{r_n}$ ділиться на $\boldsymbol{r_{n+1}}$ цілком. Оскільки ж $(\boldsymbol{r_n, r_{n+1}}) = d$ і $\boldsymbol{r_n} \vdots \boldsymbol{r_{n+1}}$, то за властивістю 3 найбільшого спільного дільника $\boldsymbol{r}_{n+1} = d$. Отже, отримаємо послідовність рівностей $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{r}_1) = (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = =(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) = \ldots = (\boldsymbol{r}_{n-1}, \boldsymbol{r}_n) = (\boldsymbol{r}_n, d) = d$.

<u>Приклад.</u> Знайти НСД чисел 1092 і 2244. Розділимо 2244 на 1092 з остачею. Отримаємо: $2244 = 1092 \cdot 2 + 60$. Тепер розділимо 1092 на 60, отримаємо: $1092 = 60 \cdot 18 + 12$. Тепер розділимо 60 на 12, отримаємо: $60 = 12 \cdot 5$. Остання остача була 12. Значить $(1092; 2244) = 12$.

Тепер, коли ми знаємо, як знаходити НСД двох чисел, можна знайти НСД і для будь-якої кількості чисел.

В п р а в и.

1. Знайти найменше спільне кратне чисел:

708 і 370	228 і 280	616 і 440
925 і 205	835 і 116	356 і 576
486 і 292	339 і 333	120 і 106

2. Обчислити найбільший спільний дільник за методом розкладання на множники:

7084 і 6370	2280 і 2772	5616 і 4400
1925 і 2205	2835 і 4116	4356 і 4576
4860 і 5292	3393 і 2584	2106 і 6120

3. Обчислити найбільший спільний дільник за допомогою алгоритму Евкліда:

6370 і 84	2835 і 108	5616 і 1006
52025 і 1925	4348 і 144	4356 і 2106
5292 і 480	3344 і 512	4400 і 252

4. Довести, що

а) якщо $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) = 1$, то $(\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2) = 1$;

б) якщо $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) = 1$, то $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = 1$ і $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 1$;

в) якщо $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) = 1$, то $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}; \boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}) = 1$;

г) якщо $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) = 1$, то $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}; \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 1$;

д) якщо $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) = 1$, то $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}; \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}; \boldsymbol{c})$.

5. На основі відомих ознак подільності на 2, 3, 4, 5, 9, 11 сформулюйте:

а) ознаку подільності на 6;	б)ознаку подільності на 12;
в) ознаку подільності на 15;	г) ознаку подільності на 30;
д) ознаку подільності на 18;	е) ознаку подільності на 27;
є) ознаку подільності на 33;	ж) ознаку подільності на 22;
з) ознаку подільності на 55;	і) ознаку подільності на 45;
к) ознаку подільності на 10;	л) ознаку подільності на 6
м) ознаку подільності на 60;	н) ознаку подільності на 66.

Методичний коментар

Питання, що розглянуті в розділі, є фундаментальними для усвідомлення основних числових властивостей і відношень, які закладені в програмі та підручниках з математики в початковій школі. Вони дають ключ до розуміння таких математичних явищ, як загальна операція ділення, ділення з остачею, ознак подільності, принципів класифікації чисел, основної теореми арифметики, таких важливих для наступних розділів математики понять, як найменше спільне кратне і найбільший спільний дільник, їхніх властивостей та алгоритмів знаходження.

Цей розділ – логічно стрункий і завершений. Він дає можливість підвести учнів до розуміння теореми Евкліда про існування як завгодно великих простих чисел, алгоритму Ератосфена побудови таблиці простих чисел, алгоритму Евкліда для відшукання найбільшого спільного дільника і застосування цих знань до розв'язування в цілих числах лінійних рівнянь, і нарешті, до розуміння теореми про єдність розкладу цілого числа на прості множники. Вказані твердження і методи є фундаментом теорії чисел і в той же ж самий час є найпростішими доступними учню прикладами теорем існування і *одиничності і прикладами найпростіших алгоритмів без, чого немислимо створити правильне уявлення про математичну науку.*

Властивості натуральних чисел та дії над ними починають вивчати у початковій школі, ознаки подільності вже дають можливість підготувати базу для роботи с дробами. Спираючись на означення і властивості відношення подільності, теореми про подільність суми, різниці і добутку на множині цілих невід'ємних чисел, вчителю необхідно вміти користуватись поняттями „дільник" і „кратне", „просте" і „складене" число, аналізувати числові вирази з метою формування в учнів початкових класів доказових міркувань, застосовуючи правила подільності різних видів виразів. На основі знань про найбільший спільний дільник (НСД) і найменше спільне кратне (НСК) кількох чисел вміти знаходити НСД і НСК кількох чисел різними способами, розв'язувати текстові задачі з метою розвитку в учнів початкових класів алгоритмічного мислення.

Глибоке усвідомлення обґрунтованості цих понять дає вчителю ключ до побудови методичної системи для вивчення практично всіх тем розділу арифметики невід'ємних цілих чисел початкового курсу математики.

Список використаної літератури

1. Бельский А. А. Деление с остатком / А. А. Бельский, Л. А. Калужнин. – К.: Вища школа, 1977. – 89 с.
2. Боровик В. Н., Математика / В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк та ін. –К.: Вища школа, 1980. – 445 с.
3. Вивальнюк Л. М. Числові системи / Л. М. Вивальнюк. –К.: Вища школа, 1977. –168 с.
4. Виленкин Н. Я. О понятии величины / Н. Я. Виленкин // Математика в школе. – 1973. – № 4. – С. 4–7.
5. Воробьёв Н. Н. Признаки делимости /Н. Н. Воробьёв. – М.: Наука, 1972. – 80 с.
6. Затула Н. І., Математика: Навчальний посібник / Н. І. Затула, А. М. Зуб, Г. І. Коберник, А. Ф. Нещадим. –К.: Кондор, 2006. –560 с.
7. Касаткин В. Н. Новое о системах счисления / В. Н. Касаткин. – К.: Вища школа, 1982. – 184 с.
8. Кошелєв О. Л. Про місце окремих ознак подільності в системі усних обчислень / О. Л. Кошелєв, В. К. Сарієнко. –Луганськ, Вісник ЛДПУ імені Тараса Швченка №8. Педагогічні науки, 2003. – С.132–136.
9. Кужель О. В. Розвиток поняття про число. Ознаки подільності / О. В. Кужель. –К.: Вища школа, 1974. –117 с.
10. Виленкин Н. Я. Математика / Н. Я. Виленкин, А.М. Пышкало и др. –М.: Просвещение, 1977. –351 с.
11. Нешков К. И. Множества, отношения, числа, величины / К. И. Нешков, А. М. Пышкало, В. Н. Рудницкая. – М. : Просвещение, 1974. – 64 с.
12. Современные основы школьного курса математики /

Н. Я. Виленкин, К. И. Дуничев, Л. А. Калужнин   А. А. Столяр. – М.: Просвещение, 1980, – 221 с.
13. Сарієнко В. К. Математика / В. К. Сарієнко, В. В. Сарієнко. – Слов'янськ, 2013. – 156 с.
14. Стойлова Л. П. Математика / Л. П. Стойлова. –М.: Академия, 1999. – 422 с.
15. Толковый словарь словообразовательных единиц русского языка Т. Ф. Ефремовой. –М.: Энциклопедия, 1996 : Электронная версия: www.Slovar.plib.ru.
16. Фомин С. В. Системы счисления / С. В. Фомин. – М.: Наука, 1975. – 84 с.
17. Нивен А. Числа рациональные и иррациональные (перевод с английского) / А. Нивен.   – М.: Мир, 1966. – 128 с.

З М І С Т

Сарієнко Владислав Костянтинович
кандидат педагогічних наук, доцент
Сарієнко Володимир Владиславович
кандидат педагогічних наук, доцент
Чайченко Валентина Федорівна
кандидат педагогічних наук, доцент

МАТЕМАТИКА

Арифметика невід'ємних цілих чисел

Навчально-методичний посібник
(на допомогу вчителю початкової школи)

Рекомендовано до видання
вченою радою ДВНЗ „Донбаський державний педагогічний університет”,
вченою радою Донецького обласного інституту післядипломної педагогічної освіти

Художнє оформлення: Плахотський О. В.

Коректор: к. п. н., доц. Тищенко Л. М.