# МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

**Новиков О.А., Ровенская О.Г., Шулик Т.В.**

[1] *доцент кафедры математического анализа, СГПУ*

[2] *ассистент кафедры высшей математики, ДГМА*

[3] *старший лаборант научного отдела, СГПУ*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

## ПРИБЛИЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА $r$–ПОВТОРНЫМИ СУММАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

Обчислені значення інтегралів у головному члені асимптотичних формул для точних верхніх меж відхилень $r$–повторних сум Валле Пуссена на класах інтегралів Пуассона.

Calculated values in the main term of asymptotic equalities for upper bounds of the deviations of the $r$–repeated de la Vallee Poussin sums taken over classes of Poisson integrals.

**Keywords:** *Fourier series, asymptotic equalities.*

## Введение

Следуя [1], обозначим $C^q_{\beta,\infty}$ — класс непрерывных $2\pi$–периодических функций $f(x)$, которые можно представить в виде свертки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P^q_\beta(t)\, dt,$$

в которой

$$P^q_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2}),\ \ q \in (0;1),\ \ \beta \in R,$$

— ядро Пуассона, а функция $\varphi(x) \in S^0_M$ ($S^0_M$ – множество функций, почти везде ограниченных единицей, имеющих на отрезке $[-\pi;\pi]$ среднее значение, равное нулю). Известно [1], что классы $C^q_{\beta,\infty}$, которые принято называть классами интегралов Пуассона, состоят из функций $f$, которые являются сужениями на действительную ось функций $F(z)$, аналитических в полосе $|\mathrm{Im} z| \le \ln\frac{1}{q}/2\ln 2$.

Пусть $S_n(f;x)$ — частичные суммы ряда Фурье функции $f(x)$, $p, p_1$, $p_2$, ..., $p_r$ — произвольные натуральные числа такие, что $p < n$, $\sum\limits_{k=1}^{r} p_k \overset{\mathrm{df}}{=} \Sigma_p < n$.

Тогда суммы Валле Пуссена функции $f(x)\in L^1[-\pi;\pi]$ обычные $V_{n,p}(f,x)$ и $r$–повторные $V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f,x)$, соответственно, задаются соотношениями

$$V_{n,p}(f,x)=\frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}S_k(f,x),$$

$$V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f,x)=\frac{1}{p_1}\sum_{k_1=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{p_2}\sum_{k_2=k_1-p_2+1}^{k_1}...\frac{1}{p_r}\sum_{k_r=k_{r-1}-p_r+1}^{k_{r-1}}S_{k_r}(f,x).$$

С.М. Никольский [2] показал, что для верхних граней уклонений частичных сумм Фурье, взятых по классам $C^q_{\beta,\infty}$, имеет место асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty};S_n\right)\overset{\mathrm{df}}{=}\sup_{f\in C^q_{\beta,\infty}}||f(\cdot)-S_n(f;\cdot)||_C=$$

$$=\frac{8q^n}{\pi^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2u}}+O(1)\frac{q^n}{n}.$$

В работе [3] для верхних граней уклонений сумм Валле Пуссена на классах $C^q_{\beta,\infty}$ получена асимптотическая формула

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty};V_{n,p}\right)=\frac{4q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)}+O(1)\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3}+\frac{q^n}{p(1-q^2)}\right).$$

Более общий результат получен в работе [4].

В работе [6] для для верхних граней уклонений $r$-повторных сумм Валле Пуссена в случае $r$=2 получено следующее соотношение

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty};V^{(2)}_{n,p}\right)=\frac{8q^{n-p_1-p_2+1}}{\pi p_1p_2(1+q)^3}\Pi\left(\frac{4q}{(1+q)^2};\frac{2\sqrt{q}}{1+q}\right)+$$

$$+O(1)\left(\frac{q^{n-p_1-p_2+1}}{p_1p_2(n-p_1-p_2+1)(1-q)^4}+\frac{q^{n-p_1+1}}{p_1p_2(1-q)^3}+\frac{q^{n-p_2+1}}{p_1p_2(1-q)^3}\right),$$

где

$$\Pi\left(n;k\right)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\left(1-n\sin^2u\right)\sqrt{1-k^2\sin^2u}}$$

— полный эллиптический интеграл третьего рода.

В работе [7] исследуется асимптотическое поведение верхних граней уклонений полиномов $V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x)$ для произвольных натуральных $r$ от функций из классов $C^q_{\beta,\infty}$. В частности, получена следующая асимптотическая при $n-\Sigma_p\to\infty$ формула

$$\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty};V^{(r)}_{n,\overline{p}})=\frac{4q^{n-\Sigma_p+r-1}}{\pi^2\prod\limits_{i=1}^{r}p_i}\int\limits_0^\pi Z_q^{r+1}(x)dx+O(1)\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{r}p_i}\times$$

$$\times\left(\frac{q^{n-\Sigma_p+r-1}}{n-\Sigma_p-1}\left[\frac{1}{(1-q)^{r+3}}+\frac{1}{(1-q)^{2r}}\right]+\sum_{\alpha\subset\overline{r-1}}\frac{q^{(n-1-\sum_{j\in\alpha}p_j+r)}}{(1-q)^{r+1}}\right),$$

где $q\in(0;1)$, $\sum_{i=1}^r p_i=\Sigma_p<n$, $Z_q(x)=(1-2q\cos x+q^2)^{-1/2}$, $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по $n$, $q$, $\beta$, $p_i$, $i=1,2,...,r$.

## Основная часть

В данной работе вычислены значения величин $\int\limits_0^\pi Z_q^{r+1}(x)dx$ в случаях, когда $r$ произвольное нечетное число.

**Теорема 1.** *Для всякого* $r=2m-1, m\in\mathbb{N}$

$$\int\limits_0^\pi Z_q^{r+1}(x)dx=$$

$$=\frac{\pi}{2^{(2\nu-2)}(1+q)(1-q)^{(2\nu-1)}}\left[\left(\frac{4q}{(1+q)^2}\right)^{\nu-1}\frac{(2\nu-2)!}{[(\nu-1)!]^2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\nu-1}(-1)^k2^k\frac{(2(\nu-1)-k)!}{(\nu-k-1)!k!}\sum_{m=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{\nu-1}\frac{(-1)^m\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{2m}}{(\nu-1-m)!m!}\frac{(2m)!}{(2m-k)!}\right].\qquad(1)$$

**Доказательство.** Обозначим $\nu=\frac{r+1}{2}$. Тогда

$$\int\limits_0^\pi Z_q^{r+1}(x)dx=\int\limits_0^\pi\frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^\nu}=\frac{1}{(2q)^\nu}\int\limits_0^\pi\frac{dt}{(\alpha^2-\cos t)^\nu},$$

где $\alpha^2=\frac{1+q^2}{2q}$. Заметим, что $1+q^2\geq 2q$, поэтому $\frac{1+q^2}{2q}\geq 1$, $\alpha^2-1\geq 0$. Применяя универсальную тригонометрическую подстановку:
$x=\mathrm{tg}\frac{t}{2},\cos t=\frac{1-x^2}{1+x^2},dt=\frac{2dx}{1+x^2}$, получаем

$$\int\frac{dt}{(\alpha^2-\cos t)^\nu}=\int\frac{\frac{2dx}{1+x^2}}{(\alpha^2-\frac{1-x^2}{1+x^2})^\nu}=\frac{2}{(\alpha^2+1)^\nu}\int\frac{(1+x^2)^{\nu-1}dx}{(a^2+x^2)^\nu},$$

где $a^2 = \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}$. Следовательно,

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^{\nu}} = \frac{2}{(1+q)^{2\nu}} \int\limits_0^{\infty} \frac{(1+x^2)^{\nu-1}dx}{(a^2+x^2)^{\nu}}. \tag{2}$$

Приходим к вычислению интегралов

$$J_{\nu} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{(1+x^2)^{\nu-1}dx}{(a^2+x^2)^{\nu}}, a^2 < 1.$$

Воспользуемся элементами теории вычетов. Функция

$$F(z) = \frac{(1+z^2)^{\nu-1}}{(a^2+z^2)^{\nu}}$$

дробно-рациональная со степенью знаменателя на 2 единицы выше степени числителя. Эта функция имеет два полюса $z = \pm ai$ порядка $\nu$ и один из них $z_0 = ai$ находится над осью $Ox$. Поэтому при $\nu = 1$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{(1+x^2)^{\nu-1}dx}{(a^2+x^2)^{\nu}} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)} = \pi i \lim_{z\to ai}[(z-ai)^{\nu}F(z)] =$$

$$= \pi i \lim_{z\to ai}[\frac{1}{(z+ai)}] = \frac{\pi}{2a},$$

при $\nu \geq 2$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{(1+x^2)^{\nu-1}dx}{(a^2+x^2)^{\nu}} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x^2)^{\nu-1}dx}{(a^2+x^2)^{\nu}} = \frac{1}{2}2\pi i \mathrm{res}_{z_0=ai}F(z) =$$

$$= \frac{\pi i}{(\nu-1)!}\lim_{z\to ai}\frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}}[(z-ai)^{\nu}F(z)] = \frac{\pi i}{(\nu-1)!}\lim_{z\to ai}\frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}}\left[\frac{(1+z^2)^{\nu-1}}{(z+ai)^{\nu}}\right]. \tag{3}$$

Положим $f(z) = (1+z^2)^{\nu-1}$, $g(z) = (z+ai)^{-\nu}$.

Для вычисления $\frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}}[F(z)(z-ai)^{\nu}]$ воспользуемся известной формулой Лейбница

$$\frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}}(f(z)g(z)) = \sum_{k=0}^{\nu-1} C_{\nu-1}^k \frac{d^k}{dz^k}f(z)\frac{d^{\nu-1-k}}{dz^{\nu-1-k}}g(z).$$

Вычислим $\frac{d^k}{dz^k}f(z)$. Имеем

$$f(z) = (1+z^2)^{\nu-1} = \sum_{m=0}^{\nu-1} C_{\nu-1}^m z^{2m};$$

$$\frac{d}{dz}f(z)=\sum_{m=1}^{\nu-1}C_{\nu-1}^{m}2mz^{2m-1};\ \frac{d^2}{dz^2}f(z)=\sum_{m=1}^{\nu-1}C_{\nu-1}^{m}2m(2m-1)z^{2m-2};\ldots$$

$$\frac{d^k}{dz^k}f(z)=\sum_{m=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{\nu-1}2m(2m-1)\ldots(2m-k+1)C_{\nu-1}^{m}z^{2m-k},k\geq 1.$$

Вычислим $\frac{d^{\nu-1-k}}{dz^{\nu-1-k}}g(z)$. Имеем

$$\frac{d}{dz}g(z)=(-\nu)(ai+z)^{-(\nu+1)};\ \frac{d^2}{dz^2}g(z)=(-\nu)(-(\nu+1))(ai+z)^{-(\nu+2)};\ldots$$

$$\frac{d^k}{dz^k}g(z)=(-\nu)(-(\nu+1))\ldots(-(\nu+k-1))(ai+z)^{-(\nu+k)}=$$
$$=(-1)^k\nu(\nu+1)\ldots(\nu+k-1)(ai+z)^{-(\nu+k)}.$$

Таким образом,

$$\frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}}(f\cdot g)(z)=$$
$$=f(z)\frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}}g(z)+g(z)\frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}}f(z)+\sum_{k=1}^{\nu-2}C_{\nu-1}^{k}\frac{d^k}{dz^k}f(z)\frac{d^{\nu-k-1}}{dz^{\nu-k-1}}g(z)=$$
$$=(1+z^2)^{\nu-1}(-1)^{\nu-1}\nu(\nu+1)\ldots(2\nu-2)(z+ai)^{-(2\nu-1)}+$$
$$+\sum_{m=\left[\frac{\nu}{2}\right]}^{\nu-1}2m(2m-1)\ldots(2m-(\nu-1)+1)C_{\nu-1}^{m}z^{2m-(\nu-1)}(z+ai)^{-\nu}+$$
$$+\sum_{k=1}^{\nu-2}C_{\nu-1}^{k}(-1)^{\nu-1-k}\nu(\nu+1)\ldots(\nu+(\nu-1-k)-1)(z+ai)^{-(\nu+\nu-1-k)}\times$$
$$\times\sum_{m=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{\nu-1}2m(2m-1)\ldots(2m-k+1)C_{\nu-1}^{m}z^{2m-k}=$$
$$=(1+z^2)^{\nu-1}(-1)^{\nu-1}\nu(\nu+1)\ldots(2\nu-2)(z+ai)^{-(2\nu-1)}+$$
$$+\sum_{m=\left[\frac{\nu}{2}\right]}^{\nu-1}2m(2m-1)\ldots(2m-\nu+2)C_{\nu-1}^{m}z^{2m-\nu+1}(z+ai)^{-\nu}+$$
$$+\sum_{k=1}^{\nu-2}C_{\nu-1}^{k}(-1)^{\nu-1-k}\nu(\nu+1)\ldots(2\nu-k-2)(z+ai)^{-(2\nu-k-1)}\times$$

$$\times \sum_{m=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{\nu-1} 2m(2m-1)...(2m-k+1)C_{\nu-1}^{m} z^{2m-k}.$$

Поэтому

$$\lim_{z\to ai} \frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}}\left[\frac{(1+z^2)^{\nu-1}}{(z+ai)^{\nu}}\right] = (1-a^2)^{\nu-1}\frac{(-1)^{\nu-1}\nu(\nu+1)...(2\nu-2)}{(2ai)^{(2\nu-1)}}+$$

$$+\sum_{m=\left[\frac{\nu}{2}\right]}^{\nu-1} 2m(2m-1)...(2m-\nu+2)C_{\nu-1}^{m}(ai)^{2m-\nu+1}(2ai)^{-\nu}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\nu-2} C_{\nu-1}^{k}(-1)^{\nu-1-k}\nu(\nu+1)...(2\nu-k-2)(2ai)^{-(2\nu-k-1)}\times$$

$$\times \sum_{m=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{\nu-1} 2m(2m-1)...(2m-k+1)C_{\nu-1}^{m}(ai)^{2m-k} =$$

$$= \frac{-i(1-a^2)^{\nu-1}}{(2a)^{(2\nu-1)}}\frac{(2\nu-2)!}{(\nu-1)!} + \frac{-i}{(2a)^{(2\nu-1)}}\sum_{k=1}^{\nu-1}(-1)^k C_{\nu-1}^{k} 2^k \frac{(2(\nu-1)-k)!}{(\nu-1)!}\times$$

$$\times \sum_{m=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{\nu-1}(-1)^m C_{\nu-1}^{m} a^{2m}\frac{(2m)!}{(2m-k)!} =$$

$$= \frac{-i}{(2a)^{(2\nu-1)}(\nu-1)!}\Bigg[(1-a^2)^{\nu-1}(2\nu-2)!+$$

$$+\sum_{k=1}^{\nu-1}(-1)^k C_{\nu-1}^{k} 2^k (2(\nu-1)-k)! \sum_{m=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{\nu-1}(-1)^m C_{\nu-1}^{m} a^{2m}\frac{(2m)!}{(2m-k)!}\Bigg].$$

Имея в виду (3), получаем

$$\int_0^{+\infty}\frac{(1+x^2)^{\nu-1}dx}{(a^2+x^2)^{\nu}} = \frac{\pi i}{(\nu-1)!}\lim_{z\to ai}\frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}}\left[\frac{(1+z^2)^{\nu-1}}{(z+ai)^{\nu}}\right] =$$

$$= \frac{\pi i}{(\nu-1)!}\frac{-i}{(2a)^{(2\nu-1)}(\nu-1)!}\Bigg[(1-a^2)^{\nu-1}(2\nu-2)!+$$

$$+\sum_{k=1}^{\nu-1}(-1)^k C_{\nu-1}^{k} 2^k (2(\nu-1)-k)! \sum_{m=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{\nu-1}(-1)^m C_{\nu-1}^{m} a^{2m}\frac{(2m)!}{(2m-k)!}\Bigg] =$$

$$=\frac{\pi}{(2a)^{(2\nu-1)}[(\nu-1)!]^2}\Bigg[(1-a^2)^{\nu-1}(2\nu-2)!+$$

$$+\sum_{k=1}^{\nu-1}(-1)^k C_{\nu-1}^k 2^k(2(\nu-1)-k)!\sum_{m=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{\nu-1}(-1)^m C_{\nu-1}^m a^{2m}\frac{(2m)!}{(2m-k)!}\Bigg].$$

Таким образом, в силу (2) имеем

$$\int_0^{\pi}\frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^{\nu}}=\frac{2}{(1+q)^{2\nu}}\int_0^{\infty}\frac{(1+x^2)^{\nu-1}dx}{(a^2+x^2)^{\nu}}=$$

$$=\frac{2}{(1+q)^{2\nu}}\frac{\pi}{(2a)^{(2\nu-1)}[(\nu-1)!]^2}\Bigg[(1-a^2)^{\nu-1}(2\nu-2)!+$$

$$+\sum_{k=1}^{\nu-1}(-1)^k C_{\nu-1}^k 2^k(2(\nu-1)-k)!\sum_{m=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{\nu-1}(-1)^m C_{\nu-1}^m a^{2m}\frac{(2m)!}{(2m-k)!}\Bigg]=$$

$$=\frac{\pi}{2^{(2\nu-2)}(1+q)(1-q)^{(2\nu-1)}[(\nu-1)!]^2}\Bigg[\left(\frac{(1+q)^2-(1-q)^2}{(1+q)^2}\right)^{\nu-1}(2\nu-2)!+$$

$$+\sum_{k=1}^{\nu-1}(-1)^k[(\nu-1)!]^2 2^k\frac{(2(\nu-1)-k)!}{(\nu-k-1)!k!}\sum_{m=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{\nu-1}\frac{(-1)^m\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{2m}}{(\nu-1-m)!m!}\frac{(2m)!}{(2m-k)!}\Bigg]=$$

$$=\frac{\pi}{2^{(2\nu-2)}(1+q)(1-q)^{(2\nu-1)}}\Bigg[\left(\frac{4q}{(1+q)^2}\right)^{\nu-1}\frac{(2\nu-2)!}{[(\nu-1)!]^2}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\nu-1}(-1)^k 2^k\frac{(2(\nu-1)-k)!}{(\nu-k-1)!k!}\sum_{m=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{\nu-1}\frac{(-1)^m\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{2m}}{(\nu-1-m)!m!}\frac{(2m)!}{(2m-k)!}\Bigg].$$

Теорема доказана.

Применяя формулу (1), получаем для $\nu=1$

$$\int_0^{\pi}\frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)}=\frac{\pi}{1-q^2};$$

при $\nu=2$

$$\int_0^{\pi}\frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^2}=\frac{\pi}{2^2(1+q)(1-q)^3}\Bigg[\left(\frac{4q}{(1+q)^2}\right)\frac{2!}{[1!]^2}+$$

$$+\sum_{k=1}^{1}(-1)^k 2^k \frac{(2(2-1)-k)!}{(2-k-1)!k!}\sum_{m=1}^{1}\frac{(-1)^m\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{2m}}{(2-1-m)!m!}\frac{(2m)!}{(2m-k)!}\Bigg]=$$

$$=\frac{\pi}{4(1+q)(1-q)^3}\left[\frac{8q}{(1+q)^2}+4\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^2\right]=\frac{\pi(1+q^2)}{(1-q^2)^3};$$

при $\nu=3$

$$\int\limits_0^\pi \frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^3}=\frac{\pi}{2^4(1+q)(1-q)^5}\Bigg[\left(\frac{4q}{(1+q)^2}\right)^2\frac{4!}{[2!]^2}+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}(-1)^k 2^k \frac{(2(3-1)-k)!}{(3-k-1)!k!}\sum_{m=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{2}\frac{(-1)^m\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{2m}}{(2-m)!m!}\frac{(2m)!}{(2m-k)!}\Bigg]=$$

$$=\frac{\pi}{2^4(1+q)(1-q)^5}\left[\frac{96q^2}{(1+q)^4}+16\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^2\right]=\frac{\pi[1+4q^2+q^4]}{(1-q^2)^5},$$

при $\nu=4$

$$\int\limits_0^\pi \frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^4}=\frac{\pi}{2^6(1+q)(1-q)^7}\Bigg[\left(\frac{4q}{(1+q)^2}\right)^3\frac{6!}{[3!]^2}+$$

$$+\sum_{k=1}^{3}(-1)^k 2^k \frac{(6-k)!}{(3-k)!k!}\sum_{m=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{3}\frac{(-1)^m\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{2m}}{(3-m)!m!}\frac{(2m)!}{(2m-k)!}\Bigg]=$$

$$=\frac{\pi}{64(1+q)(1-q)^7}\Bigg[\frac{1280q^3}{(1+q)^6}+72\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^2-$$

$$-48\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^4+40\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^6\Bigg]=\frac{\pi(1+9q^2+9q^4+q^6)}{(1-q^2)^7}.$$

## Литература

[1] *Степанец А.И.* Приближение аналитических непрерывных функций // Мат. сборник. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113—138.

[2] *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. сер.мат. — 1946. — 10, № 3. — С. 207 — 256.

[3] *Рукасов В.I, Чайченко С.О.* Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле–Пуссена // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 12. — С. 1653 — 1668.

[4] *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 1. — С. 97 — 107.

[5] *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. – К.: Наук. думка, 1987 — 268 с.

[6] *Ровенская О.Г., Новиков О.О.* Приближение интегралов Пуассона повторными сумами Валле Пуссена // Нелінійні коливання — 2010. — Т. 13, № 1. — С. 96 — 99.

[7] *Новиков О.О., Шулик Т.В., Ровенская О.Г.* Приближение аналитических функций $r$–повторными суммами Валле Пуссена // Вісник СДПУ Математика вып. 1(4) — 2010. — Т. 13, № 1. — С. 74 — 94.