УДК 519.175.3

Буглак О.М., Кадубовський О.А.

[1] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, СДПУ*

[2] *доцент кафедри геометрії та МВМ, СДПУ*

e-mail: elena_buglak@ukr.net, kadubovs@ukr.net

ПРО ЧИСЛО НЕРІВНИХ k-КУТНИКІВ, ПОБУДОВАНИХ НА КОЛІ З n ТОЧКАМИ

В роботі розглядаються два класи опуклих та неопуклих k-кутників, побудованих на основі фіксованого кола з n точками, які є вершинами правильного n-кутника. Встановлено формули для підрахунку числа нееквівалентних таких k-кутників відносно повороту навколо спільного центру (дії циклічної групи).

Ключові слова: *многокутник, задача про намиста, циклічна група.*

Вступ

В подальшому під n*-шаблоном* будемо розуміти коло та n точок на ньому, що є вершинами правильного n-кутника з фіксованою нумерацією останніх числами від 1 до n за годинниковою стрілкою – рис. 1.

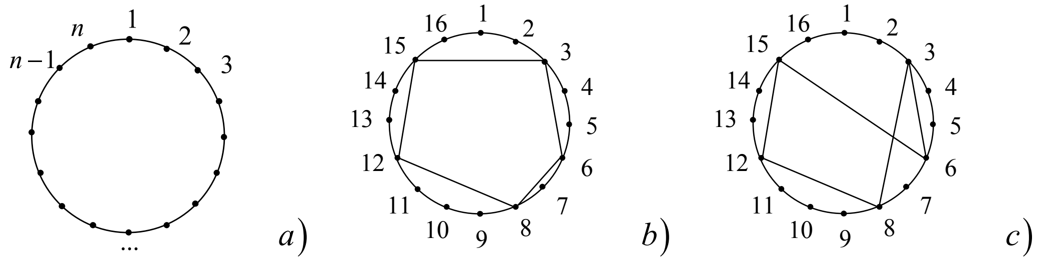


Рис. 1: $a)$ n-шаблон; $b)$ опуклий 5_{16}-кутник; $c)$ неопуклий 5_{16}-кутник

Надалі обмежимося розглядом натуральних k, що задовольняють умову $3 \leq k \leq n$. Зафіксуємо серед n зазначених вершин k точок та побудуємо замкнену ламану з вершинами у вказаних точках.

Означення 1. *Побудований в описаний вище спосіб опуклий (неопуклий) многокутник будемо називати k_n-кутником, а множину опуклих (неопуклих) k_n-кутників, побудованих на n-шаблоні, позначатимемо $L_{n,k}$ ($P_{n,k}$).*

Множину (опуклих і неопуклих) k_n-кутників, побудованих на n-шаблоні, позначатимемо $\Im_{n,k}$, n_n-кутники називатимемо n-кутниками, а множину $\Im_{n,n}$ позначати $\Im_n$.

Твердження 1. *Число опуклих* k_n *-кутників становить*

$$|L_{n,k}| = C_n^k. \tag{1}$$

Зауважимо, що кожному k_n-кутнику можна поставити у відповідність (в певному сенсі ототожнити) *цикл довжини* k, тобто впорядковану послідовність k чисел $(j_1, j_2, ..., j_k)$ таких, що $j_i \in \{1, ..., n\}$, $j_i \neq j_{i'}$. Причому «побудову-відновлення» k_n-кутника за циклом $c = (j_1, j_2, ..., j_{k-1}, j_k)$ слід розуміти як таку, при якій сторонами многокутника є наступні хорди n-шаблону: $[j_1, j_2]$, $[j_2, j_3]$, $[j_3, j_4] \ldots$, $[j_{k-1}, j_k]$, $[j_k, j_1]$.

Зауваження 1. *Загальне число впорядкованих наборів* k *із* n *різних чисел становить* A_n^k. *Проте всі цикли, одержані в результаті циклічної перестановки елементів (вказаних номерів) фіксованого циклу*

$$c = (j_1, j_2, ..., j_{k-1}, j_k) \leftrightarrow (j_2, ..., j_k, j_1) \leftrightarrow ... \leftrightarrow (j_k, j_1, j_2, ..., j_{k-1})$$

визначають один k_n *-кутник. З іншого боку — цикли* $c = (j_1, j_2, ..., j_{k-1}, j_k)$ *і* $c' = (j_1, j_k, j_{k-1}, ..., j_2) = c^{-1}$ *визначають один* k_n *-кутник, бо кожен з них визначає однакову сукупність хорд шаблону:* $[j_1, j_2]$, $[j_2, j_3]$, $\ldots$, $[j_k, j_1]$.

Таким чином, має місце формула

$$|\Im_{n,k}| = \frac{1}{2k} A_n^k. \tag{2}$$

З урахуванням співвідношень (1) і (2) число неопуклих k_n-кутників можна обчислити за допомогою формули

$$|P_{n,k}| = \frac{1}{2k} A_n^k - C_n^k = C_n^k \left(\frac{(k-1)!}{2} - 1 \right). \tag{3}$$

Означення 2. *Два* k_n *-кутники називатимемо ізоморфними, якщо один можна одержати з іншого в результаті повороту навколо спільного центру.*

Два k_n *-кутники називатимемо еквівалентними, якщо один можна одержати з іншого в результаті перевороту (дзеркального відбиття) та (або) повороту навколо спільного центру – рис. 2.*

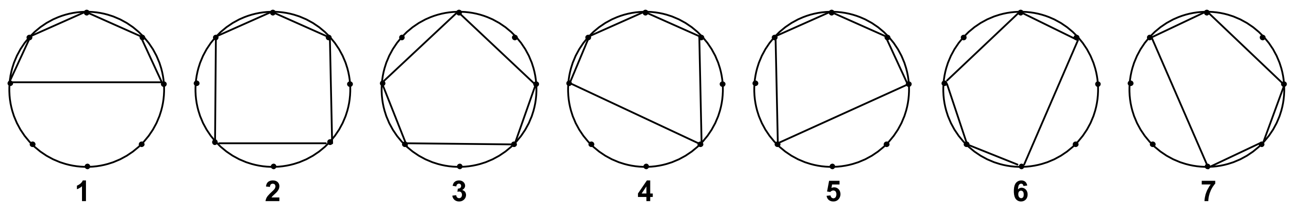


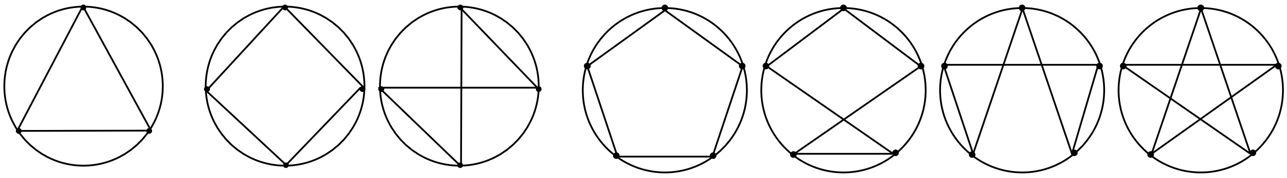
Рис. 2: Всі неізоморфні опуклі 5_8 -кутники

За винятком 5_8-кутників 4 і 5 та 6 і 7 вони також є і нееквівалентними. Тому число нееквівалентних опуклих 5_8-кутників становить 5.

Розглянемо далі **задачі** про підрахунок числа неізоморфних (**задача** A) та нееквівалентних (**задача** B) n-кутників з класу $\Im_n$.

Зауваження 2. *Очевидно, що число n-кутників з класу $\Im_n$ становить $|\Im_{n,n}| = \frac{1}{2}(n-1)!$. Число неізоморфних опуклих n-кутників становить 1. Тому й число нееквівалентних опуклих n-кутників становить 1.*

На рис. 3 наведено неізоморфні (нееквівалентні) n-кутники з класу $\Im_n$ для початкових $n = 3; 4$ і 5.



a) *b*) *c*)

Рис. 3: *a*) – єдиний 3-кутник з класу $\Im_3$; *b*) – всі неізоморфні (нееквівалентні) 4-кутники з класу $\Im_4$; *c*) – всі неізоморфні (нееквівалентні) 5-кутники з класу $\Im_5$

Для довільного натурального $n \geq 3$ задачі A і B було розв'язано у 1960р. в роботі [1], безпосередніми наслідками з якої є наступні твердження

Теорема 1. (A) *Число $N^*(n)$ неізоморфних n-кутників з класу $\Im_n$ може бути обчислене за допомогою співвідношень*

$$N^*(n) = \begin{cases} \frac{1}{2n^2}\left(\sum\limits_{j|n} \phi^2\left(\frac{n}{j}\right)\cdot j!\cdot\left(\frac{n}{j}\right)^j\right), & n \neq 2m \\ \frac{1}{2n^2}\left(\sum\limits_{j|n} \phi^2\left(\frac{n}{j}\right)\cdot j!\cdot\left(\frac{n}{j}\right)^j + 2^{\frac{n}{2}}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\left(\frac{n}{2}\right)!\right), & n = 2m. \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 2. (B) *Число $N^{**}(n)$ нееквівалентних n-кутників з класу $\Im_n$ може бути обчислене за допомогою співвідношень*

$$N^{**}(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(N^*(n) + 2^{(n-3)/2}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right), & n \neq 2m \\ \frac{1}{2}\left(N^*(n) + 2^{(n-8)/2}\cdot(n+4)\cdot\left(\frac{n-2}{2}\right)!\right), & n = 2m. \end{cases} \tag{5}$$

Постановка задач

З урахуванням зауваження 2 та теорем A і B, задачі про підрахунок числа неізоморфних та нееквівалентних, зокрема опуклих і неопуклих n-кутників з класу $\Im_n$, є повністю розв'язаними. Про наявність результатів, пов'язаних із підрахунком числа неізоморфних та нееквівалентних k_n-кутників з класів $L_{n,k}$, $P_{n,k}$ та $\Im_{n,k}$, авторам є невідомим.

Дана робота присвячена розв’язанню зазначених вище задач, а саме встановленню формул для підрахунку числа:

З1) неізоморфних k_n-кутників з класу $L_{n,k}$;

З2) нееквівалентних k_n-кутників з класу $L_{n,k}$;

З3) неізоморфних k_n-кутників з класу $P_{n,k}$;

З4) нееквівалентних k_n-кутників з класу $P_{n,k}$;

З5) неізоморфних k_n-кутників з класу $\Im_{n,k}$;

З6) нееквівалентних k_n-кутників з класу $\Im_{n,k}$.

Зауважимо, що розв’язки задач З3) і З4) є безпосереднім наслідком результатів задач З1) і З5) та З2) і З6) відповідно.

В роботі також наведено один з можливих підходів до встановлення формул підрахунку (4) числа неізоморфних n-кутників з класу $\Im_n$.

1. Опуклі k_n-кутники та задача «про намиста»

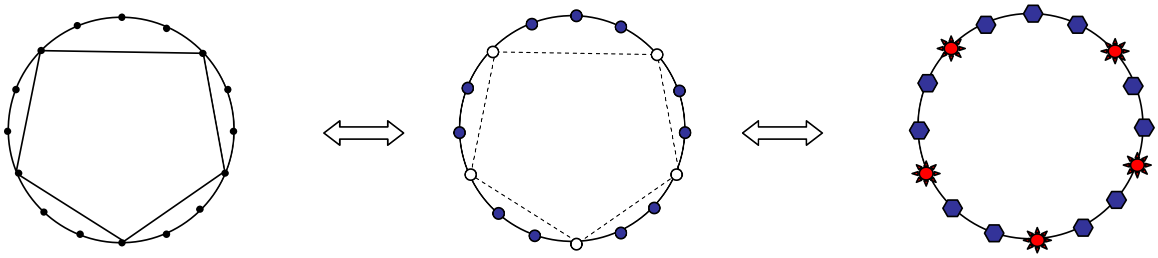
Використовуючи лему Бернсайда (напр. [2]), не важко встановити, що число неізоморфних опуклих k_n-кутників можна обчислити за формулою

$$L^*_{n,k} = \frac{1}{n}\left(C_n^k + \sum_{j|n;j\neq n} \phi\left(\frac{n}{j}\right)\rho\left(n,k,j\right)\right), \tag{6}$$

де $\rho\left(n,k,j\right)$ — число k_n-кутників, які самосуміщаються при повороті на кут $\omega_j = \frac{2\pi}{n}\cdot j$ ($j = 1,...,n-1$) за годинниковою стрілкою; $\phi\left(q\right)$ – функція Ейлера (число натуральних менших за q чисел взаємно простих із ним); а підсумовування ведеться за всіма дільниками j числа n.

Очевидно, що обчислення величини (6) зводиться до встановлення формули підрахунку величини $\rho\left(n,k,j\right)$ для j, що ділять n.

Авторами встановлено зазначену формулу для випадку опуклих k_n-кутників. Проте автори вважають своїм обов’язком навести зв’язок цієї задачі із класичною задачею про «намиста».



a) *b*) *c*)

Рис. 4: *a*) опуклий 5_{16}-кутник; *b*) «трансформація»; *c*) відповідне намисто з 5-ма намистинами 1-го типу і 11-ма намистинами 2-го типу

В класичній постановці задачу «про намиста» (див. напр. [3]) формулюють наступним чином: *знайти число намист, складених із k намистин 1-го типу* і m *намистин 2-го типу* (рис. 4 c)). Ця задача має **дві постановки**:
по-перше, можна вважати, що намиста «однакові», якщо одне одержується з іншого в результаті повороту («ізоморфні» в наших термінах);
по-друге, можна вважати два намиста «однаковими», якщо одне одержується з іншого в результаті повороту або осьової симетрії (дзеркального відбиття), або ж їх композиції («еквівалентні» в наших термінах).

З огляду на очевидну «трансформацію», наведену на рис. 4, задачі про обчислення неізоморфних та нееквівалентних опуклих k_n-кутників та задачі про підрахунок «різних» (в сенсі відповідних постановок) намист з k намистинами 1-го типу та $n-k$ намистинами 2-го типу *є еквівалентними.*

У 1998 р. в роботі [3] розглядався більш загальний варіант цієї задачі (в обох зазначених вище постановках), а саме *про число* $B(m_1, m_2, ..., m_q)$ *різних намист із* m *намистин (бусин)* q *типів, якщо є* m_1 *намистин 1-го типу,* m_2 *намистин 2-го типу,...,* m_q *намистин* q*-го типу.*

З урахуванням результатів роботи [3] (при $q=2$, $m_1=k$, $m_2=n-k$), для натуральних $3 \le k \le n$ мають місце наступні твердження

Теорема 3. *Число* **неізоморфних** *опуклих* k_n*-кутників можна обчислити за формулою*

$$L^*_{n,k} = \frac{1}{n}\left(C^k_n + \sum_{i|(n,k);\ i\neq 1} \phi(i) \cdot C^{\frac{k}{i}}_{\frac{n}{i}} \right), \tag{7}$$

де підсумовування ведеться за всіма дільниками найбільшого спільного дільника (n,k) *чисел* n *і* k*;*

а число **нееквівалентних** *опуклих* k_n*-кутників — за формулою*

$$L^{**}_{n,k} = \frac{1}{2}\left(L^*_{n,k} + C^{\left[\frac{k}{2}\right]}_{\left[\frac{n-k}{2}\right]+\left[\frac{k}{2}\right]} \right), \tag{8}$$

де $[q]$ *– ціла частина числа* q *(найменше ціле число, що не перевищує* q*).*

2. Неопуклі k_n-кутники

Позначимо далі $N^*_{n,k}$ число неізоморфних k_n-кутників з класу $\Im_{n,k}$. Тоді очевидно, що число $P^*_{n,k}$ неізоморфних k_n-кутників з класу $P_{n,k}$ становить

$$P^*_{n,k} = N^*_{n,k} - L^*_{n,k}, \tag{9}$$

де $L^*_{n,k}$ – число неізоморфних опуклих k_n-кутників з класу $L_{n,k}$.

Отже, обчислення величини $P^*_{n,k}$ зводиться до обчислення величини $N^*_{n,k}$. Для доведення основного результату роботи доведемо спочатку **теорему A**.

2.1. Доведення теореми A

Подамо співвідношення (4) у вигляді, який найбільше відповідає введеним позначенням і потребам

$$N^*(n)=\begin{cases}\frac{1}{n}\left(\frac{(n-1)!}{2}+\sum\limits_{i|n,i\neq n}\phi\left(\frac{n}{i}\right)\cdot\rho(n,i)\right), & n\neq 2t\\ \frac{1}{n}\left(\frac{(n-1)!}{2}+\sum\limits_{i|n,i\neq n,i\neq\frac{n}{2}}\phi\left(\frac{n}{i}\right)\cdot\rho(n,j)+\mu\left(n,\frac{n}{2}\right)\right) & n=2t;\end{cases} \tag{10}$$

$$\text{де}\quad \rho(n,i)=\frac{(i-1)!}{2}\cdot\left(\frac{n}{i}\right)^{i-1}\cdot\phi\left(\frac{n}{i}\right),\quad i\neq\frac{n}{2}; \tag{11}$$

$$\mu\left(n,\frac{n}{2}\right)=\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)!}{2}\cdot 2^{\frac{n}{2}-1}\cdot\left(1+\frac{n}{2}\right),\quad n=2t, \tag{12}$$

$\rho(n,i)$ і $\mu\left(n,\frac{n}{2}\right)$ – число n-кутників, які самосуміщаються при повороті на кут $\omega_i=\frac{2\pi}{n}i$ ($i\neq\frac{n}{2}$) і $\omega=\pi$ відповідно (за годинниковою стрілкою).

2.1.1. Доведення співвідношення (11).

Нехай $n=i\cdot m$, $m\neq 2$.

1) З'ясуємо спочатку питання про те, який вид мають n-кутники, що самосуміщаються при повороті на кут $\omega_i=\frac{2\pi}{n}i$ — задовольняють **умову** (*).

Як було встановлено раніше, кожен n-кутник можна ототожнити з циклом $b=(1,l_2,l_3,...,l_n)$ або ж $b'=(1,l_n,...,l_3,l_2)=b^{-1}$, елементи якого – номери вершин n-шаблону, що зустрічаються при обході сторін n-кутника у двох можливих напрямках. Отже, нехай $b=(1,l_2,l_3,...,l_n)$ – цикл, який визначає n-кутник, що задовольняє умову (*). В подальшому арифметичні операції слід розуміти як такі, що виконуються *за модулем* n.

Ідея доведення полягає у наступному: якщо n-кутник самосуміщається при повороті на кут $\frac{2\pi}{n}\cdot i$, містить сторону $[1,l_2]$ (в подальшому хорду), то він повинен містити й хорду $[1+i,l_2+i]$, в яку переходить перша. За тих самих причин n-кутник містить й хорду $[1+2i,l_2+2i]$, в яку переходить друга і т.д. Таким чином: якщо впорядкована пара $\{1,l_2\}\in b$, то циклу b повинна належати й впорядкована пара $\{1+i,l_2+i\}$, аналогічно $\{1+2i,l_2+2i\}\in b$ ... $\{1+i(m-1),l_2+i(m-1)\}\in b$; якщо впорядкована пара $\{l_2,l_3\}\in b$, то циклу b повинна належати й впорядкована пара $\{l_2+i,l_3+i\}$, аналогічно

$$\{l_2+2i,l_3+2i\}\in b,\ ...,\ \{l_2+i(m-1),l_3+i(m-1)\}\in b.$$

Отже, множина вершин n-кутника, який самосуміщається при повороті на кут $\frac{2\pi}{n}\cdot i$, розбивається на m підмножин – блоків $[b_j]$, в кожному з яких по i вершин n-шаблону:

$[b_1]=\{1,l_2,l_3,...,l_i\}$; $[b_2]=\{1+i,l_2+i,l_3+i,...,l_i+i\}$; ...
$[b_m]=\{1+(k-1)i,l_2+(k-1)i,l_3+(k-1)i,...,l_i+(k-1)i\}$

2) *Порядок входження блоків* $[b_2],[b_3],..,[b_m]$ до циклу $b=([b_1]...)$ зазначеного n-кутника однозначно визначається вибором блоку, який слідує за $[b_1]$. Більше того, обхід цих блоків здійснюється з деяким кроком h.
Пояснимо останнє. Припустимо, що

$$b=([b_1][b_2]...)=(1,l_2,l_3,...,l_i;1+i,l_2+i,l_3+i,...,l_i+i;...).$$

Оскільки циклу b належить пара $\{l_i,1+i\}$, то $\{l_i+i,1+2i\}\in b$. Це означає, що після блоку $[b_2]$ слідує блок $[b_3]$ і т.д.. Тобто $b=([b_1][b_2][b_3]...[b_m])$. Отже, обхід блоків здійснюється з кроком $h=1$. Припустимо тепер, що

$$b=([b_1][b_3]...)=(1,l_2,l_3,...,l_i;1+2i,l_2+2i,l_3+2i...,l_i+2i;...).$$

Оскільки циклу b належить впорядкована пара $\{l_i,1+2i\}$, то циклу b належить й впорядкована пара $\{l_i+i;1+3i\}$, а отже і пара $\{l_i+2i;1+4i\}\in b$. Це означає, що після блоку $[b_3]$ слідує блок $[b_5]$ і т.д. Тобто $b=([b_1][b_3][b_5]...)$. Отже, обхід блоків здійснюється з кроком $h=2$. І.т.д.

Таким чином, маємо точно $(m-1)$ можливостей перегрупувати блоки. Але не в кожному з цих випадків ми одержимо n-кутник. Так, наприклад, для парних m обхід з кроком $h=2$ не є припустимим, оскільки відповідний «n-кутник» розпадається на два $\frac{n}{2}$-кутники

$$([b_1],[b_3],...[b_{m-1}],[b_1]) \quad \text{і} \quad ([b_2],[b_4],...[b_m],[b_2]).$$

Вказаного «розпадання» не відбуватиметься лише у випадку, коли обхід відповідних блоків здійснюватиметься з кроком h, взаємно простим з $m=\frac{n}{i}$. Тобто існує точно $\phi(m)=\phi\left(\frac{n}{i}\right)$ суттєво різних типів таких n-кутників.

3) Зафіксуємо припустимий крок h (взаємно простий з m), з яким здійснюється обхід m блоків $[b_1],[b_2],...,[b_m]$. Очевидно, що другу вершину l_2 блоку $[b_1]$ можна обрати $(n-m)$ способами, оскільки m вершин з номерами $1,1+i,...,1+i(m-1)$ зайняли перші позиції в блоках $[b_1],[b_2],...,[b_m]$; третю вершину l_3 блоку $[b_1]$ – $(n-2m)$ способами і т.д.

Отже, при кожному припустимому кроці h можна утворити точно

$$(n-m)\cdot(n-2m)\cdot...\cdot(n-(i-1)m)=\left(\tfrac{n}{i}\right)^{i-1}\cdot(i-1)!$$

n-кутників, які самосуміщаються при повороті на кут $\omega=\frac{2\pi}{n}\cdot i$.

З урахуванням пунктів 2) і 3) загальне число таких циклів становить

$$\phi\left(\frac{n}{i}\right)\cdot\left(\frac{n}{i}\right)^{i-1}\cdot(i-1)!. \tag{13}$$

4) Множину циклів, побудованих у вказаний спосіб, позначимо $\Im_n(i,m)$. Не важко показати, що з кожним циклом $b\in\Im_n(i,m)$ множині $\Im_n(i,m)$ належить також і цикл b^{-1}. Оскільки $b\neq b^{-1}$, а цикли b і b^{-1} визначають один n-кутник, то з урахуванням (13) маємо, що загальне число n-кутників з класу $\Im_n(i,m)$ становить

$$\frac{1}{2}\phi\left(\frac{n}{i}\right)\cdot\left(\frac{n}{i}\right)^{i-1}\cdot(i-1)!. \tag{14}$$

2.1.2. Доведення співвідношення (12). Нехай $n=2t$.

Подамо вираз $\mu\left(n,\frac{n}{2}\right)$ у вигляді

$$\mu\left(n,\tfrac{n}{2}\right)=\left(\tfrac{n}{2}-1\right)!\cdot 2^{\frac{n}{2}-2}+\tfrac{n}{2}!\cdot 2^{\frac{n}{2}-2}=\mu_1\left(n,\tfrac{n}{2}\right)+\mu_2\left(n,\tfrac{n}{2}\right).$$

Зауважимо, що

$$\mu_1\left(n,\frac{n}{2}\right)=\left(\frac{n}{2}-1\right)!\cdot 2^{\frac{n}{2}-2}=\rho\left(n,\frac{n}{2}\right). \tag{15}$$

Таким чином, для доведення формули (12) достатньо з'ясувати «характер» тих n-кутників (що самосуміщаються при повороті на кут $\omega=\pi$), число яких не враховано величиною $\mu_1\left(n,\frac{n}{2}\right)=\rho\left(n,\frac{n}{2}\right)$, та підрахувати число $\mu_2\left(n,\frac{n}{2}\right)$ таких n-кутників.

1) Для цього спочатку з'ясуємо вид n-кутників (що самосуміщаються при повороті на кут $\omega=\pi$), які ввійшли до величини $\mu_1\left(n,\frac{n}{2}\right)=\rho\left(n,\frac{n}{2}\right)$. Використовуючи результати доведення формули (11), всі такі n-кутники можна подати циклом виду $([b_1],[b_2])$, де

$$[b_1]=\left\{1,l_2,l_3,...,l_{\frac{n}{2}}\right\},[b_2]=\left\{1+\frac{n}{2},l_2+\frac{n}{2},l_3+\frac{n}{2},...,l_{\frac{n}{2}}+\frac{n}{2}\right\}, \tag{16}$$

або ж у розгорнутому вигляді $c=(1,l_2,l_3,...,l_t|1+t,l_2+t,l_3+t,...,l_t+t)$.

Загальне число таких циклів становить $(t-1)!\cdot 2^{t-1}=\left(\frac{n}{2}-1\right)!\cdot 2^{\frac{n}{2}-1}$. Проте цикли $c=(\mathbf{1},l_2,l_3,...,l_t|1+t,l_2+t,l_3+t,...,l_t+t)$

і $c'=(\mathbf{1},l_t+t,...,l_3+t,l_2+t,|1+t,l_t,...,l_3,l_2)=c^{-1}$

визначають один $2t$-кутник (що самосуміщається при повороті на кут $\omega=\pi$). Тому $\mu_1\left(n,\frac{n}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)!\cdot 2^{\frac{n}{2}-1}=\left(\frac{n}{2}-1\right)!\cdot 2^{\frac{n}{2}-2}$.

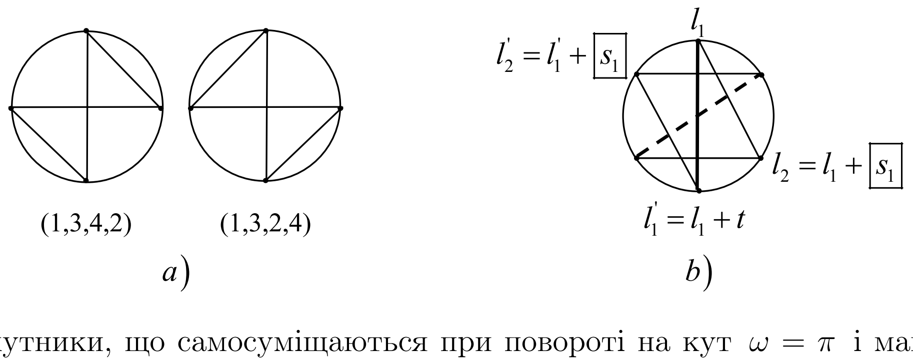


Рис. 5: $2t$-кутники, що самосуміщаються при повороті на кут $\omega=\pi$ і мають сторони, що сполучають діаметрально протилежні вершини $2t$-шаблону

Зауважимо, що з представлення (16) випливає, що жоден із зазначених вище $2t$-кутників не містить сторін, що сполучають діаметрально протилежні вершини $2t$-шаблону. Тому «характер» тих $2t$-кутників (що самосуміщаються при повороті на кут $\omega=\pi$), число яких не враховано величиною

$\mu_1(2t,t)=\rho(2t,t)$, полягає у *наявності сторін, що сполучають саме діаметрально протилежні вершини $2t$-шаблону.*

Існування таких $2t$-кутників (напр. при $t=2$) показано на рис. 5 a). Оскільки n є парним, то зазначені $2t$-кутники можуть мати лише парне число сторін, що сполучають діаметрально протилежні вершини $2t$-шаблону.

2) Покажемо спочатку, що всі такі $2t$-кутники мають **точно дві** сторони, що сполучають діаметрально протилежні вершини $2t$-шаблону.

Нехай l_1 та $l_1^{'}=l_1+t$ фіксована пара діаметрально протилежних вершин $2t$-шаблону, яка визначає відповідну сторону $2t$-кутника, що самосуміщається при повороті на кут $\omega=\pi$. Подамо такий $2t$-кутник циклом виду $b=\left(...,l_1^{'},l_1,...\right)$. Якщо вказаному $2t$-кутнику належить сторона $[l_1,l_2]$, де $l_2=l_1+s_1$, то йому повинна належати й сторона $[l_2',l_1']$, де $l_2'=l_1'+s_1$. Тому b має вид $b=\left(...,l_2^{'},l_1^{'},l_1,l_2,...\right)$. – рис. 5 b).

Зауважимо, що l_2 та l_2' номери діаметрально протилежних вершин $2t$-шаблону. Продовжуючи вказаний процес далі («відновлення» циклу b), в результаті одержимо цикл виду

$$b=(l_t'\rfloor,...,l_2',[l_1',l_1],l_2,...,\lfloor l_t),$$

де l_k і l_k' $(\forall k=1,...,t)$ – номери діаметрально протилежних вершин $2t$-шаблону. Крім того, відповідний $2t$-кутник має точно **дві** сторони $[l_1',l_1]$ і $[l_t,l_t']$, що сполучають діаметрально протилежні вершини $2t$-шаблону.

3) Підрахуємо нарешті число $\mu_2(2t,t)$ $2t$-кутників (що самосуміщаються при повороті на кут $\omega=\pi$), які мають (точно дві) сторони, що **сполучають діаметрально протилежні вершини $2t$-шаблону**. Кожен такий $2t$-кутник можна подати за допомогою одного з t циклів виду

$$\begin{array}{l}
b_{1,1}=([1,(t+1)],j_2,j_3,j_4,...,j_{t-2},j_{t-1},[j_t,j_t'],j_{t-1}',j_{t-2}',...,j_4',j_3',j_2'),\\
b_{1,2}=(1,[j_2,j_2'],(t+1),j_3,j_4,...,j_{t-2},j_{t-1},[j_t,j_t'],j_{t-1}',j_{t-2}',...,j_4',j_3'),\\
b_{1,3}=(1,j_2,[j_3,j_3'],j_2',(t+1),j_4,...,j_{t-2},j_{t-1},[j_t,j_t'],j_{t-1}',j_{t-2}',...,j_4'),\\
\dots\\
b_{1,t-1}=(1,j_2,j_3,...,j_{t-2},[j_{t-1},j_{t-1}'],j_{t-2}',j_{t-3}',...,j_3',j_2',(t+1),[j_t,j_t']),\\
b_{1,t}=(1],j_2,j_3,j_4,...,j_{t-2},j_{t-1},[j_t,j_t'],j_{t-1}',j_{t-2}',...,j_4',j_3',j_2',[(t+1)).
\end{array}\qquad(17)$$

Загальне число циклів виду (17) становить

$$t\times(2t-2)\cdot(2t-4)\cdot...\cdot4\cdot2=t!\cdot2^{t-1}.$$

Проте $\forall j=1,...,m$ цикли $b_{1,j}$ і $b_{1,j}^{-1}$ визначають один $2t$-кутник. Тому

$$\mu_2\left(n,\frac{n}{2}\right)=\mu_2(2t,t)=\frac{1}{2}\cdot t!\cdot2^{t-1}=t!\cdot2^{t-2}=\left(\frac{n}{2}\right)!\cdot2^{\frac{n}{2}-2}.\qquad(18)$$

2.2. Число неізоморфних k_n-кутників

За лемою Бернсайда та з урахуванням співвідношень (7) і (10)–(12), число неізоморфних k_n-кутників можна обчислити за допомогою співвідношення

$$n \cdot N^*_{n,k} = \frac{1}{2k} A_n^k +$$

$$+ \begin{cases} \sum\limits_{j|(n,k);\ j\neq 1} \phi(j) \cdot \rho\left(n,k,\frac{n}{j}\right), & n = 2t+1 \text{ або } k \neq 2m \\ \sum\limits_{j|(n,k);\ j\neq 1;2} \phi(j) \cdot \rho\left(n,k,\frac{n}{j}\right) + \mu\left(n,k,\frac{n}{2}\right), & n = 2t, k = 2m, \end{cases} \qquad (19)$$

де $\rho\left(n,k,\frac{n}{j}\right)$ і $\mu\left(n,k,\frac{n}{2}\right)$ – число k_n-кутників, які самосуміщаються при повороті на кут $\omega_j = \frac{2\pi}{j}$ і $\omega = \pi$ (за годинниковою стрілкою) відповідно.

Лема 1. *Нехай $j \neq 2$ – дільник числа $d = (n,k)$. Тоді*

$$\rho\left(n,k,\frac{n}{j}\right) = \frac{1}{2k} A_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j}} \cdot (j)^{\frac{k}{j}} \cdot \phi(j). \qquad (20)$$

Доведення. З урахуванням доведення рівності (11), число $\rho\left(n,k,\frac{n}{j}\right)$ k_n-кутників, які самосуміщаються при повороті на кут $\omega_j = \frac{2\pi}{j}$ можна обчислити за допомогою співвідношення $\rho\left(n,k,\frac{n}{j}\right) = C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j}} \cdot \rho\left(k,\frac{k}{j}\right)$, де $\rho\left(k,\frac{k}{j}\right)$ – число k-кутників, які самосуміщаються при повороті на кут $\omega_j = \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{k}{j} = \frac{2\pi}{j}$.

Тому $\rho\left(n,k,\frac{n}{j}\right) = C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j}} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{k}{j}-1\right)! \cdot (j)^{\frac{k}{j}-1} \cdot \phi(j) = \frac{1}{2k} A_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j}} \cdot (j)^{\frac{k}{j}} \cdot \phi(j)$.

Лема 2. *Нехай $n = 2t$, $k = 2m$. Тоді*

$$\mu\left(n,k,\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{k} A_{\frac{n}{2}}^{\frac{k}{2}} \cdot 2^{\frac{k}{2}-2}(2+k). \qquad (21)$$

Доведення. Подамо величину (21) у наступному вигляді

$$\mu\left(n,k,\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{k} A_{\frac{n}{2}}^{\frac{k}{2}} \cdot 2^{\frac{k}{2}-1} + A_{\frac{n}{2}}^{\frac{k}{2}} \cdot 2^{\frac{k}{2}-2} = \mu_1\left(n,k,\frac{n}{2}\right) + \mu_2\left(n,k,\frac{n}{2}\right) \qquad (22)$$

й покажемо, що $\mu_1\left(n,k,\frac{n}{2}\right) = \mu_1(2t,2m,t)$ і $\mu_2\left(n,k,\frac{n}{2}\right) = \mu_2(2t,2m,t)$ – число $(2m)_{(2t)}$-кутників (що самосуміщаються при повороті на кут $\omega = \pi$), які <u>не мають</u>, відповідно <u>мають</u> сторони, що сполучають діаметрально протилежні вершини $2t$-шаблону.

1) З урахуванням співвідношення (15), число $\mu_1\left(n,k,\frac{n}{2}\right) = \mu_1(2t,2m,t)$ $(2m)_{(2t)}$-кутників, що самосуміщаються при повороті на кут $\omega = \pi$ і <u>не мають</u>

сторін, що сполучають діаметрально протилежні вершини $2t$-шаблону можна обчислити за формулою

$$\mu_1(2t,2m,t)=C_t^m\cdot\mu_1\left(k,\tfrac{k}{2}\right)=C_t^m\cdot\mu_1(2t,t),$$

де $\mu_1\left(k,\frac{k}{2}\right)=\mu_1(2m,m)$ – число $2m$-кутників, що самосуміщається при повороті на кут $\omega=\pi$ і не мають сторін, що сполучають діаметрально протилежні вершини $2m$-шаблону. Тому

$$\mu_1(2t,2m,t)=C_t^m\cdot\mu_1(2t,t)=C_t^m\cdot(m-1)!\cdot2^{m-2}=\tfrac{1}{2m}A_t^m\cdot2^{m-1}=\tfrac{1}{k}A_{\frac{n}{2}}^{\frac{k}{2}}\cdot2^{\frac{k}{2}-1}.$$

2) З урахуванням співвідношення (18), число $\mu_2\left(n,k,\frac{n}{2}\right)$ $(2m)_{(2t)}$-кутників (що самосуміщаються при повороті на кут $\omega=\pi$), які мають (точно дві) сторони, що сполучають діаметрально протилежні вершини $2t$-шаблону, можна обчислити за формулою

$$\mu_2(2t,2m,t)=C_t^m\cdot\mu_2\left(k,\tfrac{k}{2}\right)=C_t^m\cdot\mu_2(2t,t),$$

де $\mu_2\left(k,\frac{k}{2}\right)=\mu_2(2m,m)$ – число $2m$-кутників, що самосуміщається при повороті на кут $\omega=\pi$ та мають сторони, що сполучають діаметрально протилежні вершини $2m$-шаблону. Тому

$$\mu_2\left(n,k,\tfrac{n}{2}\right)=\mu_2(2t,2m,t)=C_t^m\cdot m!\cdot2^{m-2}=A_t^m\cdot2^{m-2}=A_{\frac{n}{2}}^{\frac{k}{2}}\cdot2^{\frac{k}{2}-2}.$$

Таким чином $\mu\left(n,k,\frac{n}{2}\right)=\mu_1\left(n,k,\frac{n}{2}\right)+\mu_2\left(n,k,\frac{n}{2}\right)=$

$$=\tfrac{1}{k}A_{\frac{n}{2}}^{\frac{k}{2}}\cdot2^{\frac{k}{2}-1}+A_{\frac{n}{2}}^{\frac{k}{2}}\cdot2^{\frac{k}{2}-2}=A_{\frac{n}{2}}^{\frac{k}{2}}\cdot2^{\frac{k}{2}-2}\left(\tfrac{2+k}{k}\right).$$

Теорема 4. (основна) *Число $N_{n,k}^*$ неізоморфних k_n-кутників можна обчислити за допомогою співвідношень*

$$n\cdot N_{n,k}^*=\frac{1}{2k}A_n^k+$$

$$+\begin{cases}\sum\limits_{j|(n,k);\ j\neq1}\phi^2(j)\cdot\frac{1}{2k}A_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j}}\cdot j^{\frac{k}{j}}, & n=2t+1\\ \sum\limits_{j|(n,k);\ j\neq1}\phi^2(j)\cdot\frac{1}{2k}A_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j}}\cdot j^{\frac{k}{j}}, & n=2t,k\neq2m\\ \sum\limits_{j|(n,k);j\neq1;2}\phi^2(j)\cdot\frac{1}{2k}A_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j}}\cdot j^{\frac{k}{j}}+\frac{1}{k}A_{\frac{n}{2}}^{\frac{k}{2}}\cdot2^{\frac{k}{2}-2}(k+2), & n=2t,k=2m.\end{cases}\tag{23}$$

Наслідок 1. *Якщо числа n і k є взаємно простими, то число $N_{n,k}^*$ неізоморфних k_n-кутників можна обчислити за формулою*

$$N_{n,k}^*=\frac{1}{2nk}\cdot A_n^k,\tag{24}$$

а число $P_{n,k}^*$ неізоморфних неопуклих k_n-кутників – за формулою

$$P_{n,k}^*=\frac{1}{2nk}A_n^k-\frac{1}{n}C_n^k=\frac{1}{2n}C_n^k\Big((k-1)!-2\Big).\tag{25}$$

Не важко пересвідчитись у тому, що при $k = n$ встановлені формули (23) співпадають із формулами (4) роботи [1].

$n\backslash k$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	1									
4	1	1								
5	2	1	1							
6	4	3	1	1						
7	5	5	3	1	1					
8	7	10	7	4	1	1				
9	10	14	14	10	4	1	1			
10	12	22	26	22	12	5	1	1		
11	15	30	42	42	30	15	5	1	1	
12	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1

Табл. 1: Початкові значення числа неізоморфних *опуклих* k_n-кутників

$n\backslash k$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	0									
4	0	1								
5	0	2	3							
6	0	6	11	13						
7	0	10	33	59	53					
8	0	19	77	214	359	331				
9	0	28	154	552	1 436	2 519	2 245			
10	0	44	278	1 254	4 308	11 395	20 159	18 263		
11	0	60	462	2 478	10 770	37 785	100 795	181 439	164 949	
12	0	85	726	4 570	23 694	104 059	369 593	998 490	1 814 399	1 664 353

Табл. 2: Початкові значення числа неізоморфних *неопуклих* k_n-кутників

Висновки

В роботі встановлено формули для підрахунку числа *неізоморфних* опуклих та неопуклих k_n-кутників, які є узагальненням результатів роботи [1]. На думку авторів дослідження в цьому напрямку можна успішно продовжити за рахунок встановлення формул підрахунку числа *нееквівалентних* опуклих та неопуклих k_n-кутників.

Література

[1] *Golomb S.W., Welch L.R.* On the Enumeration of Polygons The American Mathematical Monthly, Vol. 67, No. 4, 1960, pp. 349 – 353.

[2] *Калужнин Л.А., Сущанский В.И.* Преобразования и перестановки // М.: Наука, 1979.

[3] *Яковенко Д.И.* Задача об ожерельях // Вестник Омского университета, 1998, Вып. 2. С. 21 – 24.