УДК 514.115:372.851

Бунакова А.С., Кадубовський О.А.

[1] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, СДПУ*

[2] *доцент кафедри геометрії та МВМ, СДПУ*

e-mail: stasy.makov@mail.ru, kadubovs@ukr.net

ПРО ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ КІЛ НУЛЬОВОГО РАДІУСУ

Дана стаття присвячена дослідженню граничних випадків при застосуванні пучків кіл (зокрема кіл нульового радіусу) та їх властивостей до розв'язування задач на побудову кіл з додатковими умовами. Також досліджується питання щодо можливих застосувань кіл нульового радіусу, як методу розв'язування певного кола задач на побудову в контексті порівняння з традиційними підходами.

Ключові слова: *кола нульового радіусу, задачі на побудову, граничний перехід.*

> «Было бы ошибкой считать, что с евклидовых времен учение о круге остается неизменным и что изложение его во всех учебниках одинаково. Напротив, разработка этой теории продолжается и в наше время.
> ...истинный дух геометрии означает нечто большее: он требует подхода к изучению геометрических образов не с одной, а с разных точек зрения, ибо только такой путь ведет к полному знанию.» [8]
>
> **Литцман В.**

Вступ

Загально визнаною є теза про те, що задачі на побудову розвивають в учнів та студентів конструктивний підхід до осмислення геометричних знань, підвищують алгоритмічну культуру та розвивають логічне мислення і просторову уяву. Граничний перехід в геометричних задачах широко застосовується в курсі елементарної математики (наприклад, трикутник – як вироджена трапеція і т.ін.). Проте аналіз існуючої навчально-методичної літератури з геометрії кіл показав, що колам нульового радіусу (в контексті радикальної та діаметральної осей) приділяється недостатня увага. Виключенням є [7], [11] і [12], в яких застосування кіл нульового радіусу пропонується на рівні вказівок або ж другого альтернативного способу розв'язування.

На превеликий жаль, слід констатувати, що в навчально-методичній літературі є відсутніми (або ж авторам невідомими) дослідження щодо застосування кіл нульового радіусу (у зазначеному контексті), *як самостійного методу розв'язування певного кола задач на побудову.*

Дослідження ж авторів у цьому напрямку дозволяють стверджувати, що для певного кола задач на побудову (з ряду задач на застосування властивостей пучків кіл) традиційні підходи, в основі яких застосування властивостей пучків кіл, поступаються (в сенсі наочності та простоти) запропонованому у статті методу, заснованому на застосуванні кіл нульового радіусу (без використання пучків кіл у явному вигляді або ж пучків взагалі).

Не є також новиною, що в геометрії є гостра необхідність у класифікації та систематизації задач, зокрема за методами розв'язування.

Наведені факти визначають актуальність зазначених питань, спробі вирішення яких й присвячена дана стаття. Отже, метою даної статті є:

з одного боку – ознайомити вчителів та учнів ЗОШ з такими геометричними об'єктами, як *степінь точки відносно кола, радикальна і діаметральна вісь (двох) кіл, радикальний центр (трьох) кіл* та деякими їх застосуваннями до розв'язування геометричних задач, зокрема задач на побудову за допомогою циркуля та односторонньої лінійки без поділок;

з іншого боку – ознайомити студентів математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ з одним із можливих способів розв'язування певного кола задач на побудову (20 з яких й наведено у даній статті), які традиційно потрапляли до списків задач на «застосування ГМТ» або ж на «застосування властивостей пучків кіл» (див. напр. [2, 3]), проте припускають більш прості розв'язування, засновані на використанні виключно властивостей радикальної осі та кіл нульового радіусу.

1. Основні поняття та зауваження

Означення 1. *Степенем точки* M *відносно кола* $\omega(O,r)$ *називають скалярну величину, що визначається рівністю* $\deg(M,\omega) = MO^2 - r^2$.

Твердження 1. *Геометричним місцем точок площини, які мають однаковий степінь відносно двох неконцентричних кіл* $\omega_1(O_1,r_1)$ *і* $\omega_2(O_2,r_2)$ *є пряма, що проходить через одну з таких точок перпендикулярно до прямої* (O_1O_2), *яку називають лінією центрів цих кіл.*

Означення 2. *Пряму, що є ГМТ площини, які мають однаковий степінь відносно двох неконцентричних кіл* $\omega_1(O_1,r_1)$ *і* $\omega_2(O_2,r_2)$ *називають радикальною віссю, яку позначатимемо* $l_{rad}(\omega_1,\omega_2)$.

Зауваження 1. *Геометричний зміст степеня точки* M, *зовнішньої відносно кола* $\omega(O,r)$, *полягає в тому, що* $\deg(M,\omega)$ *є квадратом довжини відрізка дотичної, проведеної з точки* M *до кола* $\omega(O,r)$.

Тому ГМТ площини, довжини відрізків дотичних яких до двох даних неконцентричних кіл є рівними, є зовнішня частина радикальної осі цих кіл.

Означення 3. *Два кола називають ортогональними між собою, якщо дотичні до обох кіл в точці їх перетину є взаємно перпендикулярними.*

Твердження 2. *ГМ центрів кіл, ортогональних двом даним колам, є зовнішня частина радикальної осі цих кіл.*

Означення 4. *Коло* ω_1 *називають діаметральним до кола* ω *, якщо коло* ω_1 *перетинає коло* ω *у двох діаметрально протилежних точках.*

Твердження 3. *Геометричним місцем точок площини, що є центрами кіл діаметральних до двох неконцентричних кіл* ω_1 *і* ω_2 *є пряма, що проходить через одну з таких точок перпендикулярно до лінії центрів* (O_1O_2) *.*

Означення 5. *Пряму, що є ГМ центрів кіл діаметральних до двох неконцентричних кіл* ω_1 *і* ω_2 *, називають діаметральною віссю цих кіл, яку позначатимемо* $d_{iam}(\omega_1, \omega_2)$ *.*

Зауваження 2. *ГМ центрів кіл, діаметральних до двох даних кіл, є пряма, симетрична радикальній осі даних кіл відносно середини відрізка, кінцями якого є центри цих кіл.*

Означення 6. *Пучком кіл називають сукупність кіл площини, що мають спільну радикальну вісь. В залежності від числа (*2*,* 1 *або* 0*) спільних точок кола пучка з його радикальною віссю виділяють* еліптичний, параболічний *та* гіперболічний *пучки.*

До основних *властивостей пучків* кіл слід віднести наступні:

1) центри кіл пучка належать одній прямій – лінії центрів пучка;
3) радикальна вісь розташована ближче до кола, радіус якого є меншим;
2) центри всіх кіл площини, ортогональних до кожного кола пучка P, належать одній прямій – радкальній осі даного пучка; всі такі кола утворюють пучок P^*, який називають спряженим до пучка P.

Означення 7. *Радикальним центром трьох кіл, центри яких не належать одній прямій, називають точку, що має однаковий степінь відносно цих кіл.*

Зв'язкою кіл називають сукупність кіл площини, що мають спільний радикальний центр.

Більш детальну інформацію з теорії пучків та зв'язок кіл можна знайти, наприклад в [1,10–12].

2. Основна частина

2.1. Побудова радикальної осі двох кіл, з яких хоча б одне є колом нульового радіусу

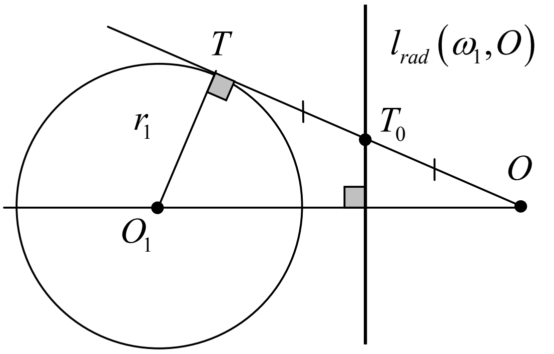

Рис. 1

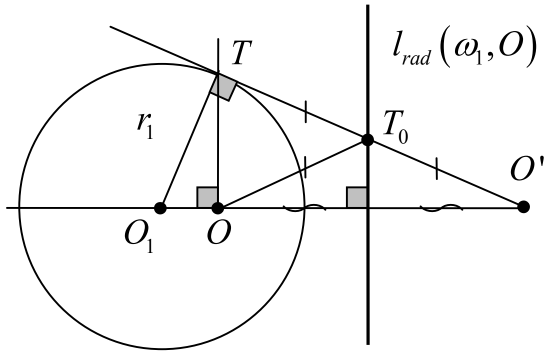

Рис. 2

Якщо точка O (коло нульового радіусу) є зовнішньою відносно кола $\omega_1(O_1; r_1)$, то їх радикальна вісь $l_{rad}(\omega_1, O)$ може бути побудована наступним чином (рис. 1): нехай $[OT]$ ($T \in \omega_1$) відрізок дотичної, проведеної з точки O до кола ω_1, T_0 – середина відрізка $[OT]$. Тоді точка T_0 має однаковий степінь відносно кола ω_1 і точки O (кола $\omega(O; 0)$) і тому належить радикальній осі $l_{rad}(\omega_1, O)$. Таким чином радикальна вісь $l_{rad}(\omega_1, O)$ проходить через точку T_0 перпендикулярно до лінії центрів (O_1O).

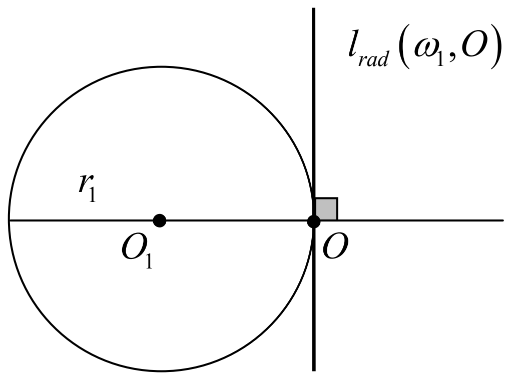

Рис. 3

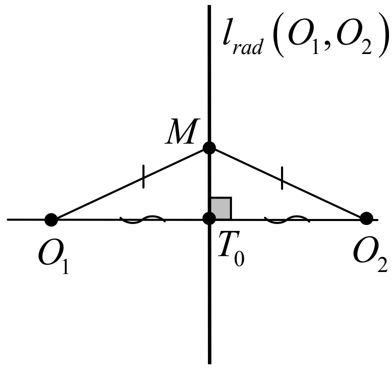

Рис. 4

Якщо ж точка O (коло нульового радіусу) є внутрішньою відносно кола $\omega_1(O_1; r_1)$, то їх радикальна вісь $l_{rad}(\omega_1, O)$ може бути побудована наступним чином (рис. 2): нехай $[OT]$ ($T \in \omega_1$) перпендикуляр до прямої (O_1O), а точка O' – точка перетину (O_1O) з дотичною до кола ω_1 в точці T; нехай далі T_0 – середина відрізка $[TO']$. Тоді точка T_0 має однаковий степінь відносно кола ω_1 і точки O'. Оскільки T_0 середина гіпотенузи $\triangle TOO'$, то $T_0O = T_0O'$, звідки й випливає, що точка T_0 має однаковий степінь відносно кола ω_1 і точки O.

Таким чином радикальна вісь $l_{rad}(\omega_1, O)$ проходить через точку T_0 перпендикулярно до лінії центрів (O_1O).

Якщо точка O (коло нульового радіусу) належить колу $\omega_1(O_1; r_1)$, то їх радикальною віссю $l_{rad}(\omega_1, O)$ буде дотична до кола ω_1 в точці O – рис. 3.

Якщо ж обидва кола є точками (колами нульового радіусу), то їх радикальною віссю $l_{rad}(O_1, O_2)$ буде пряма, що містить серединний перпендикуляр до відрізка, кінцями якого є центри кіл – рис. 4.

2.2. Побудова діаметральної осі двох кіл, з яких хоча б одне є колом нульового радіусу

Нижче на рис. 5 – 8 наведено способи побудови діаметральної осі двох неконцентричних кіл для всіх можливих випадків, коли хоча б одне з кіл є колом нульового радіусу.

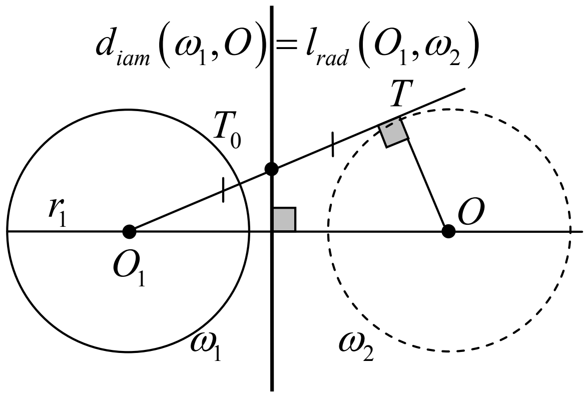

Рис. 5

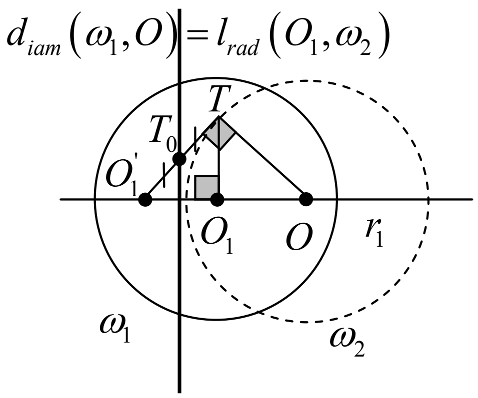

Рис. 6

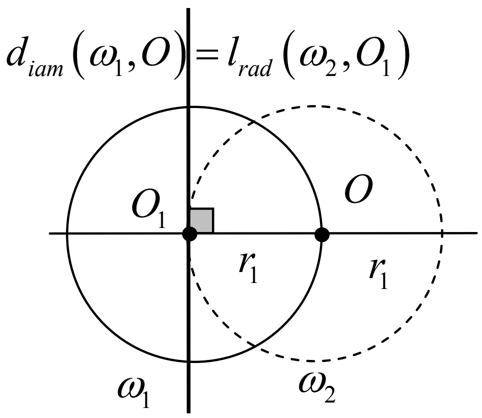

Рис. 7

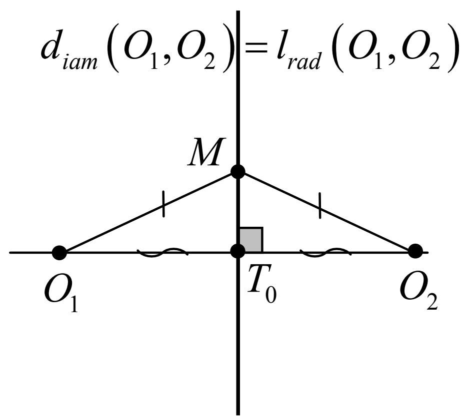

Рис. 8

Зі способами побудови радикальної та діаметральної осей двох неконцентричних кіл в загальному випадку можна ознайомитись, наприклад в [4, 7, 10–12].

2.3 Застосування кіл нульового радіусу до розв'язування деяких задач на побудову шуканого кола

1. Через точку C провести коло ω_x, що перетинає дане коло ω у точках A і B на ньому.

   Вказівка: центр шуканого кола належить перетину радикальних осей $l_{rad}(A,B)$ і, наприклад, $l_{rad}(A,C)$.

2. Через точку A провести коло $\omega_x(O_x;r_x)$, що дотикається даної прямої t в даній на ній точці T.

   Вказівка: центр шуканого кола належить перетину радикальної осі $l_{rad}(A,T)$ і прямої t', що проходить через точку T перпендикулярно до прямої t.

3. Через точку A провести коло ω_x, що дотикається кола $\omega(O;r)$ в даній на ньому точці T.

   Вказівка: центр шуканого кола належить перетину прямої OT і радикальної осі $l_{rad}(A,T)$.

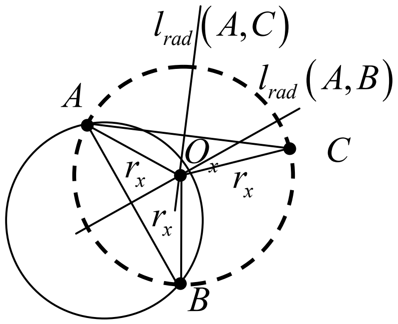

Рис 9: до задачі 1

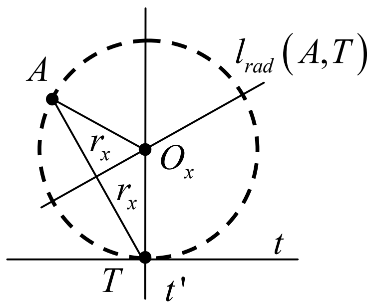

Рис 10: до задачі 2

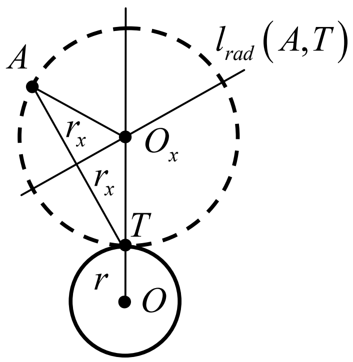

Рис 11: до задачі 3

4. Через точку A провести коло ω_x, ортогональне даному колу $\omega(O;r)$.
   Вказівка: *центри* шуканих кіл належать радикальній осі $l_{rad}(A,\omega)$.

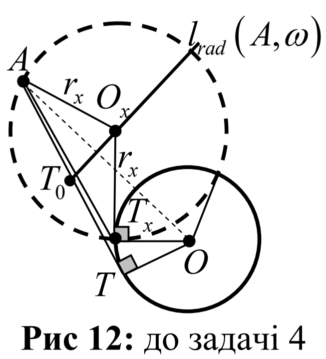

Рис 12: до задачі 4

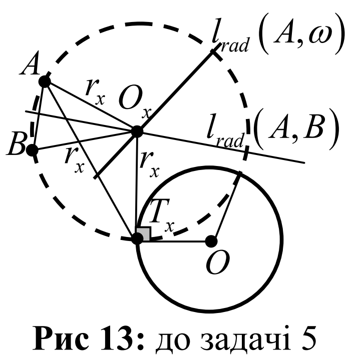

Рис 13: до задачі 5

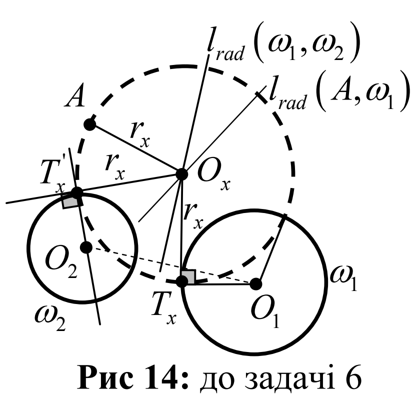

Рис 14: до задачі 6

5. Через точки A і B провести коло, ортогональне даному колу $\omega(O;r)$.
   Вказівка: центр шуканого кола належить перетину радикальних осей $l_{rad}(A,B)$ і, наприклад, $l_{rad}(A,\omega)$.
6. Через точку A провести коло, ортогональне даним колам ω_1 і ω_2.
   Вказівка: центр шуканого кола належить перетину радикальних осей $l_{rad}(A,\omega_1)$ і $l_{rad}(\omega_1,\omega_2)$ і $l_{rad}(A,\omega_1)$ або ж $l_{rad}(\omega_2,A)$.
7. Через точки A і B провести коло, довжина відрізка дотичної до якого, проведеної з третьої точки C, дорівнює довжині a даного відрізка.
   Вказівка: центр шуканого кола належить перетину радикальних осей $l_{rad}(A,B)$ і, наприклад, $l_{rad}(A,\omega')$, де $\omega'=\omega(C;a)$ – див. зад. 5.
8. Через точку A провести коло так, щоб воно було ортогональним колу $\omega(O;r)$, а довжина відрізка дотичної до нього, проведеної з другої точки B, дорівнювала б довжині a даного відрізка.
   Вказівка: центр шуканого кола належить перетину радикальних осей $l_{rad}(A,\omega)$ і $l_{rad}(\omega,\omega')$, де $\omega'=\omega(B;a)$ – див. зад. 6.
9. Через точку A провести коло діаметральне даному колу $\omega(O;r)$.
   Вказівка: *центри* шуканих кіл належать діаметральній осі $d_{iam}(\omega,A)$.

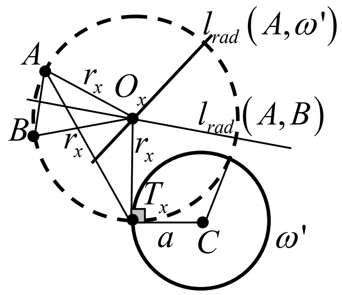

Рис 15: до задачі 7

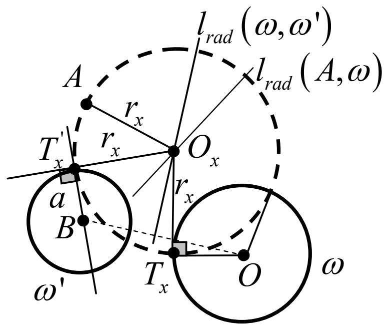

Рис 16: до задачі 8

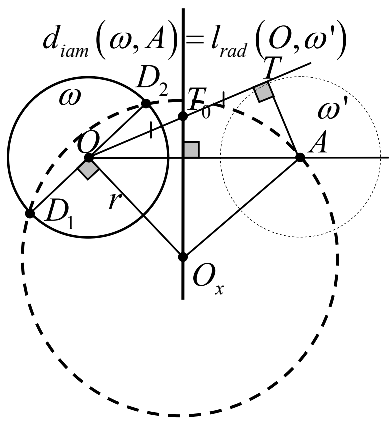

Рис 17: до задачі 9

10. Через точку A провести коло, діаметральне двом даним колам ω_1 і ω_2.
    Вказівка: центр шуканого кола належить перетину діаметральних осей $d_{iam}(\omega_1,\omega_2)$ і, наприклад, $d_{iam}(\omega_1,A)$.
11. Через точки A і B провести коло діаметральне даному колу $\omega(O;r)$.
    Вказівка: центр шуканого кола належить перетину діаметральних осей $d_{iam}(A,B)$ і, наприклад, $d_{iam}(A,\omega)$.
12. Через точку A провести коло так, щоб друга дана точка B була серединою хорди цього кола даної довжини a.
    Вказівка: дана задача зводиться до **задачі 9**, бо шукане коло є колом, що проходить через точку A і є діаметральним до кола $\omega(B;a)$.

13. Через точки A і B провести коло так, щоб третя дана точка C була серединою хорди цього кола даної довжини a.

    Вказівка: дана задача зводиться до **задачі 11**, бо шукане коло є колом, що проходить через точки A, B і є діаметральним до кола $\omega'(C; a)$.

14. Через точку A провести коло, що є ортогональним до кола ω_1 і діаметральним до кола ω_2.

    Вказівка: центр шуканого кола належить перетину радикальної осі $l_{rad}(A, \omega_1)$ та діаметральної осі $d_{iam}(A, \omega_2)$.

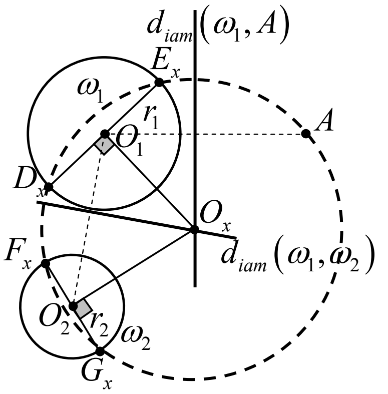

Рис 18: до задачі 10

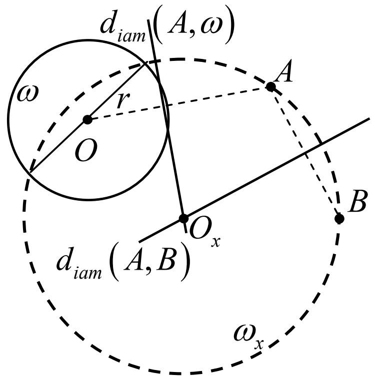

Рис 19: до задачі 11

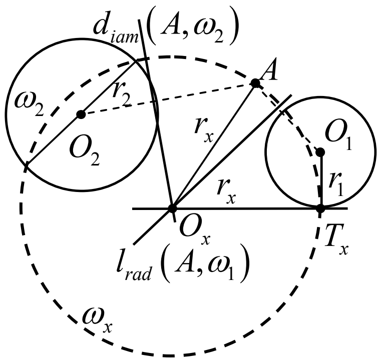

Рис 20: до задачі 14

15. Побудувати коло, що дотикається даного кола $\omega(O, r)$ і даної прямої t в даній на ній точці T.

    Вказівка: нехай t' – пряма, що проходить через точку T перпендикулярно до прямої t, а K_1 і K_2 – точки перетину прямої t' з колом $\omega_1(T, r)$, причому K_2 в одній півплощині з центром O відносно прямої t. Тоді центр O_{x1} шуканого кола ω_{x1}, що дотикається даного кола зовнішнім чином, є точкою перетину прямої t' з $l_{rad}(O, K_1)$, а центр O_{x2} шуканого кола ω_{x2}, що дотикається даного кола внутрішнім чином, є точкою перетину прямої t' з $l_{rad}(O, K_2)$.

16. Побудувати коло, яке дотикається кіл ω_1 і ω_2, якщо відомою є точка T дотику з колом $\omega_2(O_2; r_2)$.

    Вказівка: дана задача зводиться до **задачі 15**, бо шукане коло є колом, що дотикається кола ω_1 і прямої t (яка є дотичною до кола ω_2 в точці T) в даній на ній точці T.

17. Побудувати коло, що проходить через точки A і B та дотикається даної прямої t у випадках коли $AB \parallel t$ або ж $AB \perp t$ відповідно.

    Вказівка: нехай $AB \parallel t$, $l' = l_{rad}(A, B)$, $l' \bigcap t = T'$, $l'' = l_{rad}(A, T')$, $O_x = l' \bigcap l''$. Тоді шуканим колом буде коло $\omega_x(O_x, O_x A)$.

Нехай тепер $AB \perp t$, h – відстань між прямими t і l', $\omega' = \omega(A, h)$, а O_{x1} O_{x2} – точки перетину кола ω' з l'. Тоді шуканими є кола $\omega(O_{x1}, h)$ і $\omega(O_{x2}, h)$.

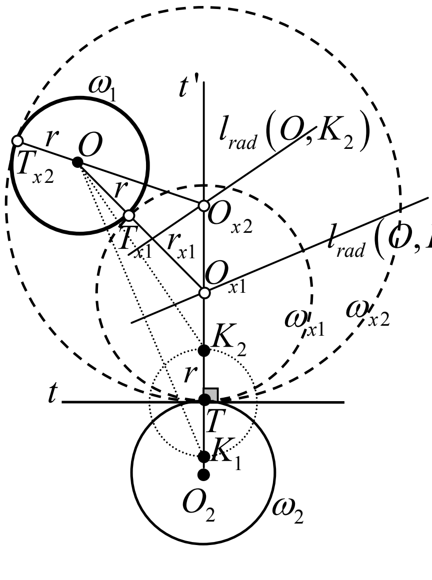

Рис 21: до задач 15, 16

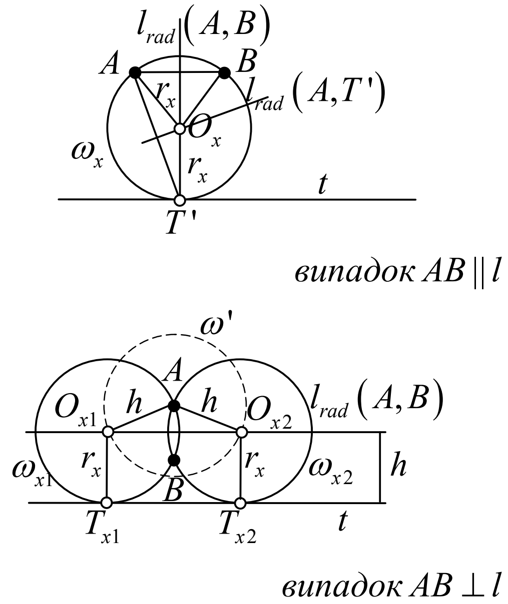

Рис 22: до задачі 17

18. Побудувати коло, що є ортогональним до трьох даних кіл $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.
    Вказівка: якщо центри даних кіл належать одній прямій, то задача не має розв'язків; якщо ж центри кіл не належать одній прямій, а радикальний центр (точка перетину радикальних осей кіл, наприклад $l_{rad}(\omega_1, \omega_2)$ і $l_{rad}(\omega_1, \omega_3)$) цих кіл має додатній степінь відносно одного (і тому відносно кожного) з них, то центр шуканого кола є радикальним центром цих кіл.
19. Побудувати коло, що є діаметральним до трьох даних кіл $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.
    Вказівка: якщо центри даних кіл належать одній прямій, то задача не має розв'язків; якщо ж центри кіл не належать одній прямій, то центр шуканого кола є точкою перетину діаметральних осей кіл, наприклад $d_{iam}(\omega_1, \omega_2)$ і $d_{iam}(\omega_1, \omega_3)$.
20. Побудувати коло, по відношенню до якого кожне з трьох даних кіл $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ є діаметральним.
    Вказівка: якщо центри даних кіл належать одній прямій, то задача не має розв'язків; якщо ж центри кіл не належать одній прямій, а радикальний центр (точка перетину радикальних осей кіл, наприклад $l_{rad}(\omega_1, \omega_2)$ і $l_{rad}(\omega_1, \omega_3)$) цих кіл має від'ємний степінь відносно одного (і тому відносно кожного) з них, то центр шуканого кола є радикальним центром цих кіл.

Основні задачі на пучки кіл

Пучок кіл P заданий радикальною віссю l і колом $\omega(O;r)$ пучка. Всюди нижче A, B – точки перетину радикальної осі з даним колом у випадку *еліптичного* пучка; T – точка дотику радикальної осі з даним колом у випадку *параболічного* пучка; t – пряма, що проходить через центр даного кола пучка, перпендикулярно радикальній осі (лінія центрів пучка); S – точка перетину радикальної осі та лінії центрів пучка.

1. Побудувати «нульові» кола гіперболічного пучка.

   Вказівка: нехай SK – відрізок дотичної проведеної з точки S до даного кола ω. Тоді точки перетину S_1 та S_2 кола $\omega'(S;SK)$ з лінією центрів будуть нульовими колами гіперполічного пучка.

Побудувати:

2. коло пучка P, знаючи його центр K на лінії центрів пучка;

   Вказівка: якщо пучок еліптичний, то шуканим колом буде коло $\omega_x(K;KA) \equiv \omega_x(K;KB)$; якщо пучок параболічний, то шуканим колом буде коло $\omega_x(K;KT)$; якщо ж пучок гіперболічний, то шукане коло $\omega_x(K;r_x)$ може бути побудоване наступним чином: нехай SF – відрізок дотичної, проведеної з точки S до кола ω, а KF' – відрізок дотичної, проведеної з точки K до кола $\omega'(S;SF)$. Тоді шуканим колом буде коло $\omega_x(K;KF')$.

3. коло пучка P, що проходить через дану точку M;

   Вказівка: якщо пучок еліптичний, то центром O_x шуканого кола $\omega_x(O_x;O_xM)$ буде така точка O_x, що є перетином $l_{rad}(A,B)$ (лінії центрів t) та наприклад $l_{rad}(A,M)$; якщо пучок параболічний, то центром O_x шуканого кола $\omega_x(O_x;O_xM)$ буде така точка O_x, що є перетином прямої OT (лінії центрів t) та $l_{rad}(T,M)$; якщо ж пучок гіперболічний, то центр O_x шуканого кола $\omega_x(O_x;O_xM)$ може бути побудований наступним чином: нехай SF – відрізок дотичної, проведеної з точки S до кола ω, $\omega' = \omega(S;SF)$. Тоді шуканий центр O_x є точкою перетину лінії центрів t та $l_{rad}(\omega';M)$.

4. ортогональну траєкторію пучка P (коло, що є ортогональним певному, а тому і довільному колу пучка);

   Вказівка: нехай K – довільна точка радикальної осі (зовнішня відносно кіл пучка), а KT – відрізок дотичної, проведеної з точки K до кола ω. Тоді коло $\omega'(K;KT)$ є ортогональною траєкторією пучка P.

5. ортогональну траєкторію пучка P, що проходить через дану точку M.

   Вказівка: розв'язування задачі зводиться до побудови кола спряженого пучка, яке проходить через точку M.

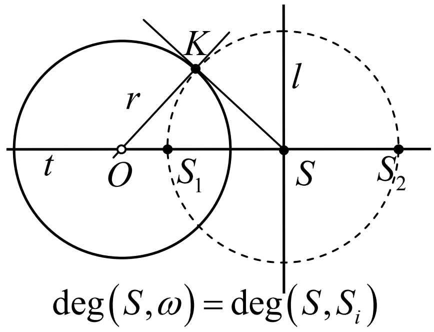

Рис 23: до задачі 1

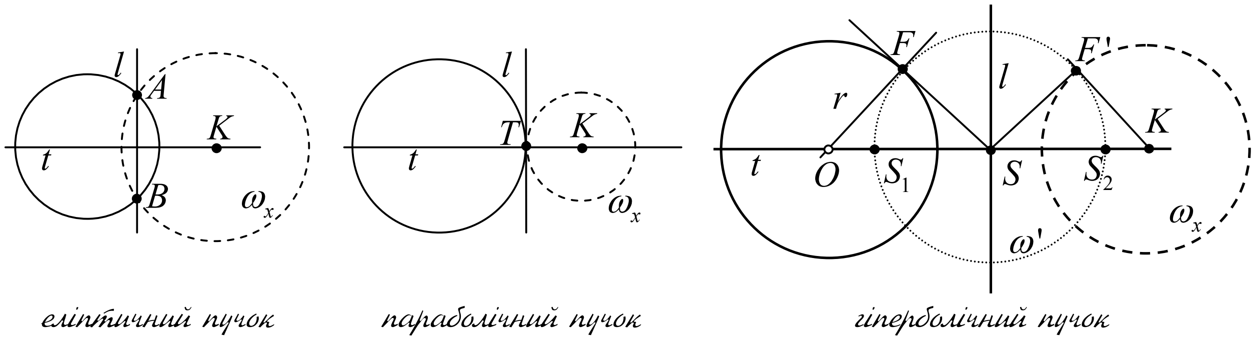

Рис 24: до задачі 2

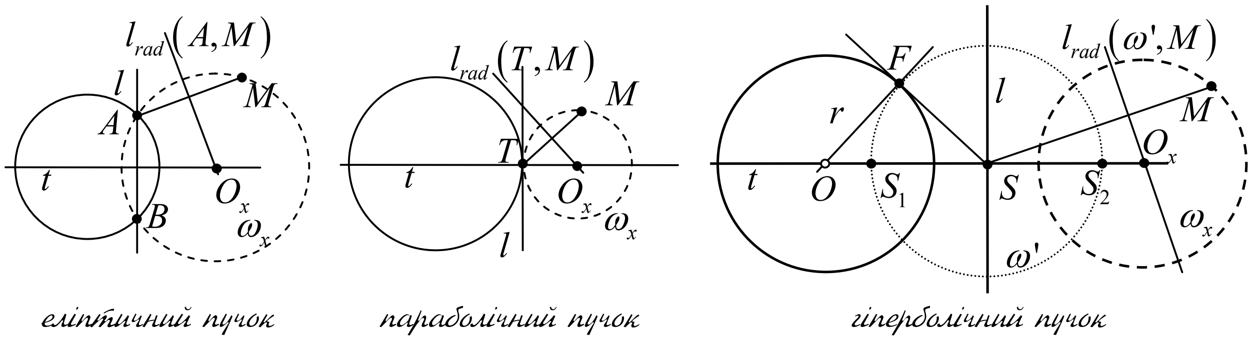

Рис 25: до задачі 3

Висновки

Результати проведених досліджень та аналіз навчально-методичної літератури із зазначених питань дозволяють зробити висновок, що застосування кіл нульового радіусу значно спрощує розв'язування низки задач на побудову кіл (з додатковими умовами) у порівнянні з традиційними підходом, заснованим на застосуванні пучків кіл та їх властивостей.

Зауважимо, що вказані спрощення при розв'язуванні наведеної низки задач, лише підтверджують доцільність та «потужність» методу, заснованого на використанні властивостей пучків кіл, дослідження граничних випадків якого й дозволило звернути увагу на можливе полегшення методики роботи над задачами вказаного типу.

На думку авторів дослідження в цьому напрямку можуть бути продовженні за рахунок розширення кола задач, що відносять до «основних» задач на зв'язки кіл та задач Аполонія «про дотики кіл». Крім того, цікавим здається дослідження питання про геометричне місце центрів кіл, що дотикаються двох даних кіл.

На нашу думку «геометрія кіл» є чудовим матеріалом для факультативних занять з математики, для самостійних пошуків та перших наукових досліджень учнів-членів МАН України.

Література

[1] *Адамар Ж.* Элементарная геометрия: [Пособие для высших педагогических учебных заведений и преподавателей средней школы] / Ж. Адамар – [3-е изд.]. – М.: Учпедгиз, 1948. – 608 с.

[2] *Адлер А.* Теория геометрических построений / А.Адлер; [пер. с нем. Г. М. Фихтенгольца]. – [3 изд.]. – Л.: Учпедгиз, 1940. – 232 с.

[3] *Александров И. И.* Сборник геометрических задач на построение с решениями / И.И. Александров – [18 изд.]. – М.: Учпедгиз, 1950. – 176с.

[4] *Аргунов Б.И.* Геометрические построения на плоскости: [Пособие для студентов педагогических институтов] / Б.И. Аргунов, М.Б. Балк – [2-е изд.]. – М.: Учпедгиз, 1957. – 264 с.

[5] *Балан В.Г.* Геометричні задачі на побудову на вступних іспитах: [Навч. пос.] / В.Г. Балан, В.І Лавренюк, Л.І. Шарова. – К.: Альфа, 2005. – 86 с.

[6] *Бевз Г.П.* Геометрія кіл: [методичні рекомендації] / Г.П. Бевз – Х.: Вид. група «Основа», 2004. – 112 с.

[7] *Кушнир И.А.* Геометрия. Теоремы и задачи: [Том 1. Планиметрия] / И.А. Кушнир - К.: Астарта, 1996. – 480с.

[8] *Литцман В.* Старое и новое о круге / В. Литцман; [Перев. с нем. В.С. Бермана]. – М.: Физматгиз, 1960. – 60 с.

[9] Методика розв'язування задач на побудову / [О.М. Астряб, О.С. Смогоржевський, М.Б. Гельфанд та інш.]; за ред. проф. О.М. Астряба та проф. О.С. Смогоржевського. – К.: Радянська школа, 1960. – 387 с.

[10] *Перепелкин Д.И.* Курс элементарной геометрии: [Учебник для педагогических институтов. Ч.1: Геометрия на плоскости] / Д.И.Перепелкин – М.; Л.: Госиздат технико-теоретической литературы, 1949. – 348с.

[11] *Понарин Я.П.* Элементарная геометрия: [В 2 т. – Т1: Планиметрия, преобразование плоскости] / Я.П. Понарин – М.: МЦНМО, 2004. – 312с.

[12] *Яглом И.М.* Геометрические преобразования: [В 2 т. – Т.2: Линейные и круговые преобразования] / И.М. Яглом – М., ГИТТЛ, 1956. – 611 с.