МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

Ровенська О.Г.

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Донбаської державної машинобудівної академії

e-mail: rovenskaya.olga.math@gmail.com

НАБЛИЖЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ СУМАМИ ФЕЙЄРА

Розглянуто питання наближення сумами Фейєра класів аналітичних періодичних функцій однієї змінної. Отримано асимптотичну формулу для точних верхніх меж відхилень сум Фейєра на класах періодичних функцій, що дозволяють регулярне подовження у фіксовану смугу комплексної площини.

Ключові слова: *суми Фейєра, аналітична функція, асимптотична формула.*

Вступ

Нехай $S_n(f;x)$ — часткові суми ряду Фур'є функції $f(x)\in L_{2\pi}$, $p\in\mathbb{N}$. Суми Валле Пуссена функції $f(x)$ задаються співвідношеннями

$$V_{n,p}(f;x)=\frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}S_k(f;x).$$

Частинним випадком поліномів $V_{n,p}(f;x)$ є суми Фейєра

$$\sigma_n(f;x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k(f;x).$$

Поліноми $V_{n,p}(f;x)$ і $\sigma_n(f;x)$ представляються у вигляді лінійних середніх рядів Фур'є, які породжуються нескінченними трикутними матрицями чисел $\Lambda=||\lambda_k^{(n)}||$, $k,\ n=0,1,\ldots$

$$U_n(f;x;\Lambda)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{(n)}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Нехай $\psi(k)$ — фіксована послідовність і β — фіксоване дійсне число. Множина функцій $f(x)\in C_{2\pi}$, для яких ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi^{-1}(k)\big(a_k\cos\big(kx+\frac{\beta\pi}{2}\big)+b_k\sin\big(kx+\frac{\beta\pi}{2}\big)\big)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції $f_\beta^\psi(x)$, позначається через C_β^ψ. Якщо $f \in C_\beta^\psi$ і $f_\beta^\psi(x) \in S_M^0$, тобто

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(t)dt = 0, \quad \operatorname{ess\,sup}|f_\beta^\psi(t)| \leqslant 1, \quad t \in [-\pi;\pi],$$

то множина цих функцій позначається $C_{\beta,\infty}^\psi$.

Позначимо через D_q множину послідовностей $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, для яких

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q, \;\; q \in (0;1).$$

За цих умов множини $C_{\beta,\infty}^\psi$ складаються з 2π-періодичних функцій, що дозволяють подовження до функцій $F(z) = F(x+iy)$, регулярних у смузі $|Im\ z| < \ln\frac{1}{q}$.

Одним із прикладів таких класів функцій є класи неперервних 2π-періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x+t)P_\beta^q(t)dt,$$

де

$$P_\beta^q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2}), \quad q \in (0;1), \quad \beta \in \mathbb{R}$$

— ядро Пуассона. В цьому випадку класи $C_{\beta,\infty}^\psi$ позначаються $C_{\beta,\infty}^q$ і називаються класами інтегралів Пуассона.

У 1946 році С.М. Нікольський [1] (також [2]) показав, що для точних верхніх меж відхилень часткових сум Фур'є на класах $C_{\beta,\infty}^q$, має місце

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^q; S_n) := \sup_{f\in C_{\beta,\infty}^q} ||f(x) - S_n(f;x)||_C = \frac{8q^n}{\pi^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}} + O(1)\frac{q^n}{n}.$$

Аналогічну задачу для точних верхніх меж відхилень сум Фур'є на класах $C_{\beta,\infty}^\psi$ розв'язано у роботі [3]

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^\psi; S_n) := \sup_{f\in C_{\beta,\infty}^\psi} ||f(x) - S_n(f;x)||_C =$$

$$= \psi(n)\left(\frac{8}{\pi^2}K(q) + O(1)(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2})\right),$$

де

$$\varepsilon_n = \sup_{k \geqslant n} \left| \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q \right|,$$

$O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n, q, β і $\psi(k)$.

Питання наближення класів аналітичних функцій, зокрема, класів інтегралів Пуассона іншими лінійними методами вивчалися у багатьох роботах [4–11].

Основна частина

У роботі розглядається асимптотична поведінка при $n \to \infty$ величин

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; \sigma_n) := \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}} ||f(x) - \sigma_n(f;x)||_C,$$

що є точними верхніми межами відхилень сум Фейєра на класах аналітичних періодичних функцій $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, $\psi(k) \in D_q$, $q \in (0;1)$.

Теорема 1. *Нехай $\psi(k) \in D_q$, $q \in (0; 2-\sqrt{3}]$, $\psi(k) > 0$. Тоді при $n \to \infty$ має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{0,\infty}; \sigma_n) = \frac{4q}{\pi n(1+q^2)} + O(1)\left(\frac{q^n}{n} + \varepsilon_0\right),$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n, $\psi(k)$.

Доведення. Зазначимо, що $\forall f(x) \in C^{\psi}_{\beta}$, у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ має місце

$$\delta_n(f;x) := f(x) - \sigma_n(f;x) = f(x) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(x+t) \sum_{k=0}^{\infty}(1-\lambda^{(n)}_k)\psi(k)\cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})dt.$$

Виконаємо елементарні перетворення

$$\delta_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(x+t) \sum_{k=0}^{\infty}(1-\lambda^{(n)}_k)q^k\cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(x+t) \sum_{k=0}^{\infty}(1-\lambda^{(n)}_k)[\psi(k) - q^k]\cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x+t)\sum_{k=0}^{\infty}(1-\lambda_k^{(n)})q^k\cos(kt+\frac{\beta\pi}{2})dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x+t)r(t)dt,$$

де

$$r(t) = (\psi;\beta;t) = \sum_{k=0}^{\infty}(1-\lambda_k^{(n)})[\psi(k)-q^k]\cos(kt+\frac{\beta\pi}{2}).$$

Розглянемо величину $r(t)$. Оскільки

$$\prod_{l=1}^{k}\frac{\psi(l)}{\psi(l-1)} = \psi(k),$$

то має місце рівність

$$r(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(1-\lambda_k^{(n)})\left[\prod_{l=1}^{k}\frac{\psi(l)}{\psi(l-1)} - q^k\right]\cos(kt+\frac{\beta\pi}{2}).$$

Враховуючи оцінку із [3]

$$\left|\prod_{l=0}^{i-1}\frac{\psi(m+l+1)}{\psi(m+l)} - q^i\right| \leqslant (q+\varepsilon_m)^i - q^i,$$

де

$$\varepsilon_m = \sup_{k\geqslant m}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|,$$

та умову $0 \leqslant 1-\lambda_k^{(n)} \leqslant 1$, маємо

$$|r(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}[(q+\varepsilon_0)^k - q^k] = \frac{1}{1-q-\varepsilon_0} - \frac{1}{1-q} = \frac{\varepsilon_0}{(1-q-\varepsilon_0)(1-q)}.$$

Позначимо

$$R(f_\beta^\psi;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x+t)r(t)dt.$$

Має місце

$$\|R(f_\beta^\psi;x)\|_C = O(1)\frac{\varepsilon_0}{(1-q)^2}.$$

Нехай далі $J_\beta^\psi(\varphi)$ — функція, для якої $(J_\beta^\psi(\varphi))_\beta^\psi = \varphi,\ \varphi \in S_M^0$. У випадку $\psi(k) = q^k,\ q \in (0;1)$ позначимо $J_\beta^\psi(\varphi) = J_\beta^q(\varphi)$. Тоді $\forall f \in C_\beta^\psi,\ x \in \mathbb{R}$

$$\delta_n(J_\beta^q(f_\beta^\psi);x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x+t)\sum_{k=0}^{\infty}(1-\lambda_k^{(n)})q^k\cos(kt+\frac{\beta\pi}{2})dt.$$

Маємо

$$\delta_n(f;x) = \delta_n(J^q_\beta(f^\psi_\beta);x) + R(f;x).$$

Використовуючи міркування роботи [3] можна показати, що для $f \in C^\psi_{\beta,\infty}$ має місце

$$\|\delta_n(f;x)\|_C = \|\delta_n(J^q_\beta(f^\psi_\beta);x)\|_C + O(1)\frac{\varepsilon_0}{(1-q)^2}.$$

Враховуючи, що

$$\sup_{f\in C^\psi_{\beta,\infty}} \|\delta_n(J^q_\beta(f^\psi_\beta);\cdot)\|_C = \sup_{\varphi\in S^0_M} \|\delta_n(J^q_\beta(\varphi);\cdot)\|_C,$$

отримуємо

$$\mathcal{E}(C^\psi_{\beta,\infty};\sigma_n) = \mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty};\sigma_n) + O(1)\frac{\varepsilon_0}{(1-q)^2},$$

де

$$\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty};\sigma_n) := \sup_{f\in C^q_{\beta,\infty}} \|\delta_n(f;x)\|_C.$$

У випадку $\beta = 0$ і $q \in (0; 2-\sqrt{3}]$ для величини $\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty};\sigma_n)$ в роботі [12] (також [13]) отримано асимптотичну рівність

$$\mathcal{E}(C^q_{0,\infty};\sigma_n) = \frac{4q}{\pi n(1+q^2)} + O(1)\frac{q^n}{n},$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n.

Поєднуючи останні два співвідношення, отримаємо твердження теореми.

Висновки

Для того, щоб одержане співвідношення було асимптотично точним, окрім наведених у теоремі, мають виконуватися додаткові умови для параметру $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, що визначає клас.

Література

1. Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — **10**, № 3. — С. 207–256.
2. Стечкин С.Б. Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1980. — **145**. — С. 126–151.
3. Степанец А.И., Сердюк А.С. Приближения суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, № 3. — С. 375–395.

4. Рукасов В.І., Чайченко С.О. Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. – 2002. — **54**, № 12. — С. 1653–1668.
5. Рукасов В.И. Приближение суммами Валле Пуссена классов аналитических функций // Укр. мат. журн. —2003. — **55**, № 6. — С. 806–816.
6. Сердюк А.С. Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, № 1. — С. 97–107.
7. Ровенская О.Г., Новиков О.А. Приближение интегралов Пуассона повторными суммами Валле Пуссена // Нелінійні коливання. — 2010. — **13**, № 1. — С. 96–99.
8. Новиков О.А., Ровенская О.Г. Приближение классов интегралов Пуассона r-повторными суммами Валле Пуссена // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. —2014. — **19**, вип. 3(23). — С. 14–26.
9. Ровенская О.Г., Новиков О.А. Приближение аналитических периодических функций линейными средними рядов Фурье // Чебышевский сб. — 2016. — **17**, вып. 2. — С. 170–183.
10. Novikov O., Rovenska O. Approximation of classes of Poisson integrals by repeated Fejer sums // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2017. — **38**, no 3. — P. 502–509.
11. Новіков О.О., Ровенська О.Г. Наближення аналітичних періодичних функцій повторними сумами Валле Пуссена // Буковинський математичний журнал. — 2017. — **5**, № 3-4. — 137–143.
12. Novikov O.O., Rovenska O.G. Approximation of periodic analytic functions by Fejer sums // Matematchni Studii. — **47**, no 2. — 2017. — P. 196–201.
13. Novikov O.O., Rovenska O.G., Kozachenko Yu.A. Approximation of classes of Poisson integrals by Fejer sums // Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. — 2018. — **87**. — P. 4–12.

Rovenska O.G.
Donbas State Engineering Academy, Kramators'k, Ukraine.

Approximation of analytic functions by Fejer sums

In the paper is studied the approximative properties of Fejer sums on the classes of periodic functions that can be regularly extended into the corresponding strip of the complex plane. Under certain conditions, we obtained asymptotic formulas for upper bounds of deviations in the uniform metric of Fejer sums on classes of analytic functions. The obtained formulas provide a solution of the corresponding Kolmogorov-Nikolsky problem with additional conditions.

Keywords: *Fejer sums, analytic function, asymptotic formula.*