УДК 512.53

Величко В.Є.

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри МНМ та МНІ, ДВНЗ «ДДПУ»

e-mail: vladislav.velichko@gmail.com

ЛІВІ ТА ПРАВІ ІДЕАЛИ НАПІВГРУПИ ЕНДОМОРФІЗМІВ ВІЛЬНОЇ ГРУПИ

В статті описуються ліві та праві ідеали напівгрупи ендоморфізмів вільної групи і на їх основі – головний квазіідеал напівгрупи ендоморфізмів вільної групи.

Ключові слова: *вільна група, ліві ідеали напівгруп, праві ідеали напівгруп, квазіідеали напівгруп*

Вступ

Дослідження напівгрупи ендоморфізм будь-якої алгебраїчної системи завжди становить значний інтерес. Деякі властивості алгебраїчної системи знаходять своє відображення у властивостях напівгрупи ендоморфізм цієї системи. Найбільший інтерес представляє випадок, коли напівгрупа ендоморфізм визначає структуру вихідної алгебраїчної системи, тобто характеризує її з точністю до ізоморфізму. Одним з перших результатів такого роду отриманий Л.М. Глускіним. В роботі [1] він показав, що відношення квазіпорядку характеризується напівгрупою ендоморфізм з точністю до ізоморфізму або антиізоморфізму. Для визначення структури напівгрупи будемо використовувати ліві та праві ідеали напівгрупи.

Основна частина

1. Наведемо опис лівих ідеалів напівгрупи ендоморфізмів вільної групи F скінченного рангу або зліченого рангу в термінах вербальних підгруп. Для довільної послідовності слів $w_1, w_2, \ldots, w_k \in F$ прямий добуток вербальних підгруп

$$w_1(F) \times w_2(F) \times \ldots \times w_k(F) \tag{1}$$

групи F містить піднапівгрупу, яка складається з "узгоджених"елементів, тобто наборів вигляду

$$(w_1(g_1, g_2, \ldots), w_2(g_1, g_2, \ldots), \ldots, w_k(g_1, g_2, \ldots)) \tag{2}$$

Означення 1. *Піднапівгрупу прямого добутку (1), яка складається з узгоджених елементів вигляду (2) називатимемо узгодженим підпрямим добутком вербальних підгруп групи* F.

Теорема 1. *Довільних головний лівий ідеал напівгрупи ендоморфізмів вільної групи F зліченого або скінченного рангу ізоморфний як напівгрупа деякому узгодженому підпрямому добутку вербальних підгруп цієї групи.*

Д о в е д е н н я. Нехай $I_l = \Sigma^{(1)}$ – деякий лівий ідеал напівгрупи $\Sigma = End\, F$. Ендоморфізм α, можна однозначно задати набором $[\alpha] =< w_1(g_1, \dots, g_n), w_2(g_1, \dots, g_n), \dots, w_n(g_1, \dots, g_n) >$. Будь-який елемент лівого ідеалу I_l має вигляд:

$$< w_1(g_1, \dots, g_n), w_2(g_1, \dots, g_n), \dots, w_n(g_1, \dots, g_n) >,$$

де $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ довільний кортеж над групою F.

Нехай $\upsilon(x_1, \dots, x_n)$ – деяке незвідне слово з вільної групи зліченного рангу, F – вільна група скінченного або зліченного рангу. Вербальна підгрупа $\upsilon(F)$ складається з найможливіших суперпозицій виду $\upsilon(g_1, g_2, \dots, g_n)$, $g_1, g_2, \dots, g_n \in F$.

При довільному i, $1 \leqslant i \leqslant n$ множина $w_i(g_1, \dots, g_n)$, $g_1, g_2, \dots, g_n \in F$ породжує вербальну підгрупу $w_i(F)$. Таким чином дістаємо прямий добуток $w_1(F) \times w_2(F) \times \dots \times w_n(F)$ вербальних підгруп $w_1(F), w_2(F), \dots, w_n(F)$. За побудовою, кожен з кортежів, що завдають автоморфізми, є узгодженим. А тому набір таких кортежів збігається з узгодженим підпрямим добутком вербальних підгруп $w_1(F), w_2(F), \dots, w_n(F)$ і теорему доведено. □

Таким чином, в напівгрупі $End\, F$ виділяються ліві ідеали, які породжуються, наприклад, вербальними підгрупами з прикладів а)-г) в попередньому параграфі.

2. Нехай $F(X)$ — вільна група над зліченим алфавітом $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, $\Sigma = End\, F(X)$ — напівгрупа ендоморфізмів групи $F(X)$. Символом Q позначимо відношення правої подільності на напівгрупі Σ: для $\varphi, \psi \in \Sigma$ співвідношення $(\varphi, \psi) \in Q$ має місце тоді й лише тоді, коли $\psi = \sigma\varphi$ для деякого $\sigma \in \Sigma$. Це відношення для $F(X)$ може бути охарактеризовано в термінах їх зображень.

Лема 1. *Для довільних $\varphi, \psi \in \Sigma$ співвідношення $(\varphi, \phi) \in Q$ має місце тоді й лише тоді, коли $Im \quad \psi \leqslant Im \quad \varphi$.*

Д о в е д е н н я. Якщо для ендоморфізмів $\varphi, \psi \in \Sigma$ має місце $(\varphi, \psi) \in Q$ і $\upsilon \in Im\, \psi$, то $\psi = \sigma\varphi$, $\upsilon = u\psi$ для деяких $\sigma \in \Sigma$, $u \in F(X)$. Звідки дістаємо $\upsilon = (u\sigma)\varphi \in Im\, \varphi$, тобто $Im\, \psi \leqslant Im\, \varphi$.

Навпаки, якщо, $Im\, \psi \leqslant Im\, \varphi$, то для кожного елемента $x \in X$ знайдеться елемент $t_x \in F(X)$ такий, що $x\psi = t_x\varphi$. Позначивши символом σ

ендоморфізм групи $F(X)$, який визначається відображенням

$$\sigma(x) = t_x,\ x \in X,$$

отримуємо, як легко пересвідчитись, $\psi = \sigma\varphi$. $\square$

Нехай $S_F = Sub\ F(X)$ — решітка всіх підгруп вільної групи $F(X)$. Підмножину $\mathfrak{M} \subset S_F$ назвемо спадковою, якщо для всіх $H \in \mathfrak{M}$, $U \in S_F$ із $U \leqslant H$ випливає, що $U \in \mathfrak{M}$. Родину всіх спадкових множин з S_F позначимо символом $\mathfrak{L}(S_F)$. Безпосередньо перевіряється, що $\mathfrak{L}(S_F)$ є решіткою відносно теоретико-множинних операцій об'єднання та перетину.

Нехай, далі, $Lat_l\Sigma$ — решітка всіх лівих ідеалів напівгрупи $\Sigma = End\ F(X)$. Визначимо відображення

$$s : Lat_l\Sigma \to S_F$$

поклавши для довільного $\Lambda \in \Sigma_l$

$$s(\Lambda) = \{Im\ \sigma \mid \sigma \in \Lambda \in \Sigma_l\}. \tag{3}$$

Лема 2. *Для довільного лівого ідеалу $\Lambda \in \Sigma_l$ його образ $s(\Lambda)$ є спадковою множиною.*

Д о в е д е н н я. Нехай $H \in s(\Lambda)$ и $U \leqslant H$, $U \in S_F$. Тоді $H = Im\ \sigma$, $U = Im\ \eta$ для деяких $\sigma \in \Lambda$, $\eta \in \Sigma$ (існування η випливає з того, що система вільних твірних довільної підгрупи з S_F не більш, ніж злічена). З $U \leqslant H$ за лемою п.1 випливає, що $\eta = \tau\sigma$ для деякого $\tau \in \Sigma$ і, таким чином $\eta \in \Lambda$. Звідки $U \in s(\Lambda)$. $\square$

З леми 1 отримуємо, що $s(\Lambda) \in \mathfrak{L}(S_F)$ за довільного $\Lambda \in \Sigma_l$, тобто $Ims \subseteq \mathfrak{L}(S_F)$. Більше того, має місце

Лема 3. *Відображення*

$$s : Lat_l(\Sigma) \to \mathfrak{L}(\mathcal{S_F}),$$

визначене рівністю (3) є сюр'єктивним.

Д о в е д е н н я. Нехай $\mathcal{P} \in \mathfrak{L}(\mathcal{S_F})$. Покладемо

$$\lambda(\mathcal{P}) = \{\sigma \in \Sigma \mid Im\ \sigma \in \mathcal{P}\}. \tag{4}$$

Тоді $\lambda(\mathcal{P}) \in Lat_l(\Sigma)$. Справді, якщо $\sigma \in \lambda(\mathcal{P})$, $\tau \in \Sigma$, то за лемою 1 отримуємо $Im\ \tau\sigma \leqslant Im\ \sigma$, а це в силу спадковості $\mathcal{P}$ означає що $\tau\sigma \in \lambda(\mathcal{P})$. Неважко пересвідчитись, що $s(\lambda(\mathcal{P})) = \mathcal{P}$. $\square$

З леми 3 випливає, що відображення

$$\lambda : \mathfrak{L}(\mathcal{S}_{\mathcal{F}}) \to Lat_l\Sigma$$

задане рівністю (4) є оберненим до s, тобто λs – тотожне перетворення на $\mathcal{F}(\mathcal{S}_{\mathcal{F}})$. Неважко перевірити, що $s\lambda$ тотожньо на $Lat_l\Sigma$. Таким чином, маємо таке твердження

Лема 4. *Відображення*
$$s : Lat_l\Sigma \to \mathfrak{L}(S_F),$$
що визначене умовою (3) бієктивне.

Відображення s визначаючи взаємно однозначну відповідність між елементами решіток $Lat_l\Sigma$ та $\mathfrak{L}(S_F)$, зберігає і відповідні операції в решітках. Тобто, має місце

Лема 5. *Для всіх* $\Lambda_1, \Lambda_2 \in Lat_l\Sigma$ *виконуються співвідношення:*

$$s(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) = s(\Lambda_1) \cap s(\Lambda_2),$$
$$s(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) = s(\Lambda_1) \cup s(\Lambda_2). \tag{4}$$

Д о в е д е н н я. Нехай $\sigma \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2$, де $\Lambda_1, \Lambda_2 \in Lat_l\Sigma$. За означенням відображення s отримуємо $Im\ \sigma \in s(\Lambda_1) \cap s(\Lambda_2)$. Звідки $s(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) \subset s(\Lambda_1) \cap s(\Lambda_2)$. Якщо, обернено, $H \in s(\Lambda_1) \cap s(\Lambda_2)$, то знайдуться $\sigma_1 \in \Lambda_1,\ \sigma_2 \in \Lambda_2$, для яких $H = Im\ \sigma_1 = Im\ \sigma_2$. Але тоді $\sigma_1 = \tau_1\sigma_2 \in \Lambda_2,\ \sigma_2 = \tau_2\sigma_1 \in \Lambda_1$, звідки $\sigma_1, \sigma_2 \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2$ і, таким чином, $s(\Lambda_1) \cap s(\Lambda_2) \subset s(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)$.

Аналогічно доводиться друге співвідношення. □

Враховуючи встановлені леми, можна тепер довести таке твердження

Теорема 2. *Решітка* $Lat_l\Sigma$ *лівих ідеалів напівгрупи* Σ *ендоморфізмів вільної групи* $F(X)$ *зчисленного рангу ізоморфна решітці* $\mathfrak{L}(S_F)$ *усіх спадкових множин підгруп групи* $F(X)$.

Д о в е д е н н я. Задамо відображення

$$s : Lat_l\Sigma \to \mathfrak{L}(S_F)$$

рівністю (3). За лемою 4 відображення s є бієктивним. За лемою 5 воно узгоджене з діями $\cap$ і $\cup$, що визначені в решітках $Lat_l\Sigma$ і $\mathfrak{L}(S_F)$. Отже це ізоморфізм решіток. □

Нехай тепер F_n – вільна група рангу n, S_F^n – множина всіх підгруп групи F, ранг яких не перевищує n (Зазначимо, що це є власне підмножина множини S_F, бо група F_n містить вільні підгрупи довільного скінченого та зчисленого рангів). Символом $\mathfrak{L}(S_F^n)$ позначимо решітку усіх спадкових множин підгруп із S_F^n. Має місце таке твердження

Теорема 3. *Решітка $Lat_l\Sigma^n$ лівих ідеалів напівгрупи Σ^n ендоморфізмів вільної групи F_n рангу n ізоморфна решітці $\mathfrak{L}(S_F^n)$ усіх спадкових множин підгруп з S_F^n.*

Доведення цієї теореми цілком подібне до доведення теореми 2 і ми його не наводимо.

3. Дамо тепер певну характеризацію правих ідеалів напівгрупи Σ.

Лема 6. *Нехай $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ – фіксований впорядкований набір незвідних слів з вільної групи F рангу n. Множина суперпозицій*

$$g(w_1, w_2, \ldots, w_n),\ g \in F,$$

збігається з підгрупою групи F, що породжена елементами $w_1, w_2, \ldots, w_n$.

Доведення очевидне.

Теорема 4. *Правий ідеали напівгрупи $End\,F$, який породжений ендоморфізмом $\alpha =< w_1, w_2, \ldots, w_n >$, є ізоморфний прямому степеню підгрупи групи F, яка породжена елементами $w_1, w_2, \ldots, w_n$.*

Д о в е д е н н я. Довільний елемент ідеалу $(\alpha)_r$ має зображення впорядкованими наборами слів із F вигляду

$$< g_1(w_1, \ldots, w_n), g_2(w_1, \ldots, w_n), \ldots, g_n(w_1, \ldots, w_n) >, \tag{5}$$

де $g_1(w_1, \ldots, w_n), g_2(w_1, \ldots, w_n), \ldots, g_n(w_1, \ldots, w_n)$ можуть бути будь-якими елементами групи F, причому незалежно один від одного. Звідси за лемою 6 дістаємо, що кожна компонента наборів виду (5) незалежно від інших пробігає підгрупу, що породжена $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Це й означає, що множина таких наборів для дії суперпозиції є групою, яка ізоморфна прямому добутку груп $< w_1, w_2, \ldots, w_n >$. $\square$

Оскільки головні квазіідеали є перетином відповідних лівих і правих головних ідеалів, то з теорем 1 та 4 дістаємо таку характеризацію головних квазіідеалів напівгрупи Σ.

Теорема 5. *Головний квазіідеал напівгрупи ендоморфізмів вільної групи рангу* n*, який породжений ендоморфізмом* $\alpha =< w(x_1,x_2,\ldots,x_n), w_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,w_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) >$*, складається з усіх узгоджених кортежів виду*

$$< w_1(g_1,g_2,\ldots,g_n),\ldots,w_n(g_1,g_2,\ldots,g_n >$$

кожна компонента яких міститься в підгрупі, що породжена елементами $w_1,w_2,\ldots,w_n$.

Доведення випливає безпосередньо з теорем 1 та 4.

Висновки

Виконаний опис лівих та правих ідеалів напівгрупи ендоморфізмів вільної групи дозволив визначити головний квазіідеал напівгрупи ендоморфізмів вільної групи породжений довільним ендоморфізмом.

Література

1. Глускин, Л. М. (1959). Полугруппы и кольца эндоморфизмов линейных пространств. Известия Российской академии наук. Серия математическая, 23(6), 841-870.
2. Глускин, Л. М. (1961) Полугруппы изотонных преобразований. Успехи мат. наук., 16(5). 157–162.
3. Валуцэ, И. И. (1963). Левые идеалы полугруппы эндоморфизмов свободной универсальной алгебры. Математический сборник, 62(3), 371-384.

Velychko V.Ye.
Donbas State Pedagogical University, Slovians'k, Ukraine.

Left and right ideals of the semigroup of endomorphisms of a free group

The article describes the left and right ideals of the semigroup of endomorphisms of a free group and on their basis the main quasi-ideal semigroup of endomorphisms of a free group

Keywords: *free group, left ideals of semigroups, right ideals of semigroups, quasi-ideal semigroups.*