

**ПЕРЕРАХУВАННЯ ДВОКОЛЬОРОВИХ ХОРДОВИХ
O-ДІАГРАМ РОДУ 1,
ЯКІ МАЮТЬ ТРИ СІРИХ (АБО ЧОРНИХ) ЦИКЛИ,
ВІДНОСНО ДІЇ ГРУПИ ДІЕДРА**

Для натуральних $n \geq 5$ встановлено формули підрахунку числа нееквівалентних 2-кольорових хордових O -діаграм (з n хордами), які мають лише три сірих (чорних) та $(n-4)$ чорних (відповідно сірих) циклів відносно дії дієдральної групи (порядку $2n$). Крім того, для натуральних 5 і 6 в явному вигляді наведено всі неізоморфні та нееквівалентні діаграми із зазначених класів, а для $5 \leq n \leq 30$ — точні значення числа неізоморфних та відповідно нееквівалентних таких діаграм.

Ключові слова: 2-кольорова хордова O -діаграма з n хордами, род діаграми, цикл діаграми, група дієдра.

Вступ

Нагадаємо, що хордовою діаграмою або, коротко, n -діаграмою називають конфігурацію на площині, що складається з кола, $2n$ точок на ньому (які є вершинами правильного $2n$ -кутника) та n хорд, що сполучають вказані точки. Хордові діаграми називають *ізоморфними*, якщо одну можна одержати з іншої в результаті повороту. Діаграми називають *еквівалентними*, якщо їх можна сумістити за допомогою повороту, дзеркального відбиття, або ж їх композиції.

Питаннями переліку певних класів хордових n -діаграм (відносно дії циклічної групи порядку $2n$ та дієдральної групи порядку $4n$) займалась ціла низка відомих математиків: T.R.S. Walsh, A.V. Lehman, J. Riordan, J. Harer, D. Zagier. Серед сучасників слід виділити авторів робіт [6], [2], [7], [4], [1].

Задачі про підрахунок числа неізоморфних та нееквівалентних n -діаграм були повністю розв'язані у 1997–1998 рр. в роботах [6], [4], [2], [7]. Формули для підрахунку числа неізоморфних *планарних* (роду 0), *тороїдальних* (роду 1) n -діаграм та $2t$ -діаграм *максимального роду* t було встановлено у 2000 р. в роботі [2]. Причому задача про підрахунок числа нееквівалентних діаграм *максимального роду* була повністю розв'язана лише у 2017 р. в роботі [5].

Крім того, слід констатувати, що *одержання явних формул для підрахунку числа неізоморфних (а тому і нееквівалентних), зокрема двокольорових, n -діаграм фіксованого роду* виявилось досить складною задачею і в загальному випадку до сьогодні *нерозв'язаною проблемою*.

Для **двокольорових** діаграм найбільш вагомими є наступні результати: задачі про підрахунок числа неізоморфних та нееквівалентних O - і N -діаграм (відповідно) повністю розв'язано в 2010 р. у роботі [10];

формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних O -діаграм (N -діаграм), які мають *точно один цикл певного кольору* (чорний або ж сірий) одержано в 2010 та 2012 рр. у роботах [11] і [12] відповідно;

формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних *планарних* O -діаграм (з n хордами) було встановлено у 2000 р. в роботі [1]; проте питання про узагальнення цієї задачі на випадок фіксованого числа чорних (або ж сірих) циклів було повністю розв'язано лише у 2014 р. в роботі [13];

задача про підрахунок числа неізоморфних O -діаграм *максимального роду* (з одним чорним та одним сірим циклом) була розв'язана у 2006 р. в роботі [9], а про число нееквівалентних таких діаграм — лише у 2015 р. в [14].

Слід зазначити, що навіть для класу $\mathfrak{S}_{k;l}^{n,1}$ O -діаграм (з n хордами) роду 1, які мають *точно k чорних (або ж сірих) та $l = n - k - 1$ сірих (відповідно чорних) циклів*, питання про підрахунок числа нееквівалентних діаграм відносно дії циклічної та дієдральної груп в загальному випадку **залишаються відкритими**. Явні формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних діаграм з класів $\mathfrak{S}_{n-2;1}^{n,1}$ та $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$ (для початкових $l = 1$ та $l = 2$) одержано в роботах [15] і [16] відповідно.

Крім того, нерозв'язними залишаються й задачі про підрахунок числа неізоморфних та нееквівалентних діаграм з більш ємного класу $\mathfrak{S}^{n,1}$ двокольорових хордових O -діаграм (з n хордами) роду 1 (без фіксації кількості чорних та/або сірих циклів).

Дана стаття є логічним продовженням робіт [15] і [16] та присвячена встановленню формул для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;3}^{n,1}$. А її основною метою — виклад одержаних результатів, аносованих автором в роботі [17].

2. Основна частина

В подальшому через $\mathfrak{S}_{k,l}^{n,g}$ будемо позначати клас двокольорових хордових O -діаграм (з n хордами) роду $g = \frac{n+1-k-l}{2}$, які мають *точно l сірих та k чорних циклів*.

Більш детально з основними поняттями та попередніми відомостями з теорії переліку двокольорових хордових діаграм, можна ознайомитися в роботах [10], [15], [16].

2.1. Число діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;3}^{n,1}$ та його характеристичні підкласи

У 1997 р. в роботі [8, С. 4] вперше встановлено рекурентні формули, за допомогою яких є принципово можливим підрахунок числа діаграм з класу $\mathfrak{S}_{k,l}^{n,g}$ ($2g = n + 1 - k - l$).

Крім того, для початкових $g = 0; 1; 2; 3$ в [8, С. 8-9] встановлено явні формули, які пізніше також були одержані та уточнені й в [3, С. 833]. Так, наприклад, для випадку $g = 1$ в роботі [3] наведено наступну формулу

$$t(n; k, l) = \left| \mathfrak{S}_{k,l}^{n,1} \right| = \frac{1}{3!} \cdot C_{n+1}^2 \cdot C_{n-1}^{k-1} \cdot C_{n-1}^{l-1}, \tag{1}$$

звідки маємо, що число $t(n) = t(n; n - 4, 3)$ діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;3}^{n,1}$ можна знайти за формулою

$$\begin{aligned} t(n; n - 4, 3) &= \frac{1}{3!} \cdot C_{n+1}^2 \cdot C_{n-1}^{n-5} \cdot C_{n-1}^{3-1} = \frac{1}{3!} \cdot C_{n+1}^2 \cdot C_{n-1}^4 \cdot C_{n-1}^2 = \\ &= \frac{5}{4}(n - 1)(n - 2)C_{n+1}^6 = t(n). \end{aligned} \tag{2}$$

Зауваження 1. *Оскільки діаграми з класу $\mathfrak{S}_{n-4;3}^{n,1}$ (крім 3 сірих циклів) мають точно $k = n - 4$ чорних циклів (які містять всі n чорних дуг двокольорового $2n$ -шаблону), то кожна з таких діаграм може мати лише один з наступних наборів чорних циклів:*

- або один 5-цикл (довжини 5) та $(n - 5)$ 1-циклів (довжини 1);*
- або один 4-цикл, один 2-цикл та $(n - 6)$ 1-циклів;*
- або два 3-цикли та $(n - 6)$ 1-циклів;*
- або один 3-цикл, два 2-цикли та $(n - 7)$ 1-циклів;*
- або чотири 2-цикли та $(n - 8)$ 1-циклів.*

Таким чином, всі діаграми з класу $\mathfrak{S}_{n-4;3}^{n,1}$ умовно можна поділити на п'ять зазначених вище класів — A , B , D , E та F відповідно.

Більше того, якісний аналіз можливих типів діаграм із класів A , B , D , E і F дозволяє виділити лише 34 характеристичних підкласи (об'єднання яких дає $\mathfrak{S}_{n-4;3}^{n,1}$ та перетин будь-яких двох із них є порожньою множиною), типові представники яких зображено на рис. 1 нижче та (заради зручності) позначено у спосіб: $A1 - A3$, $B1 - B8$, $D1 - D4$, $E1 - E10$ та $F1 - F9$ відповідно.

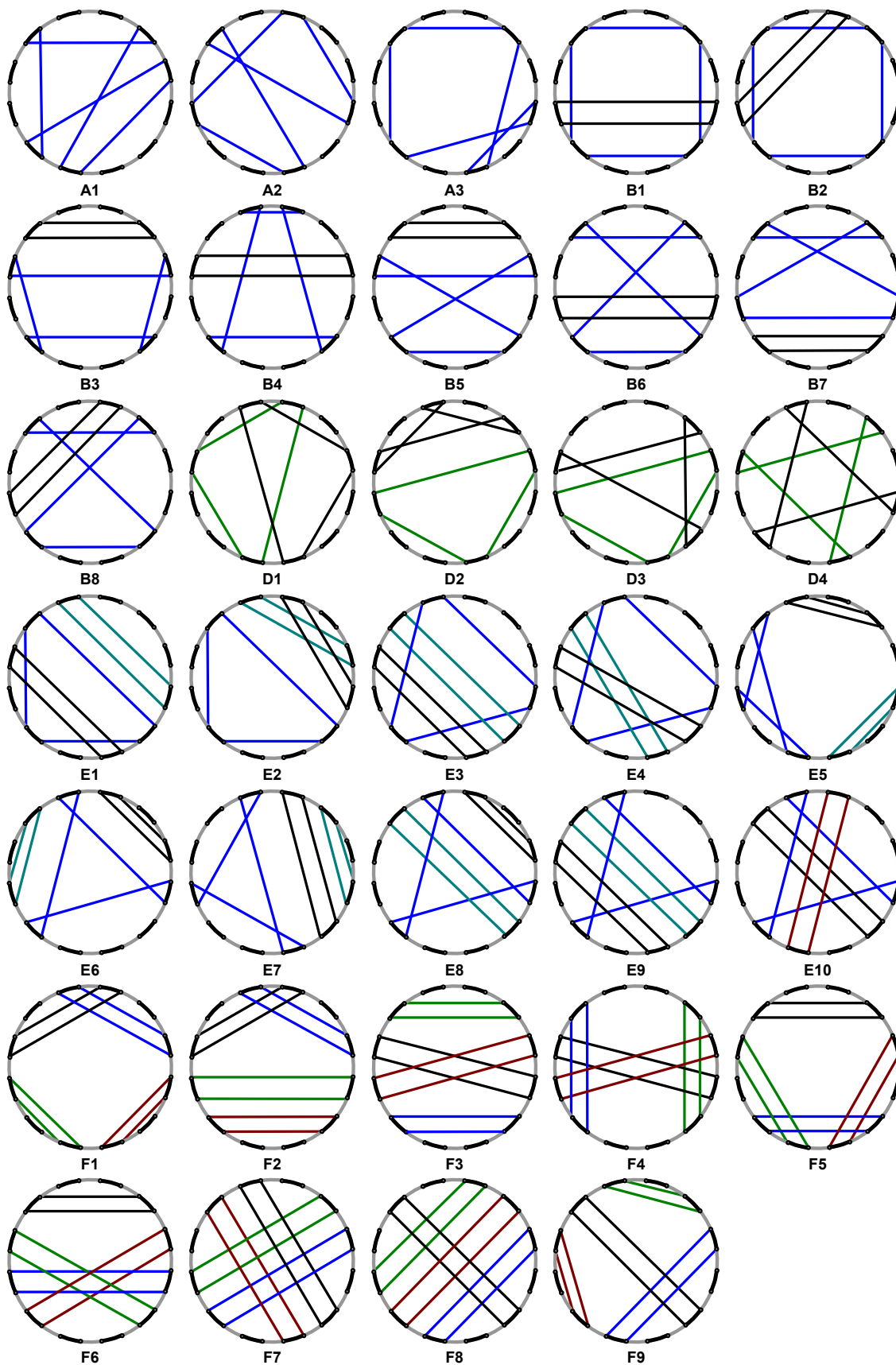


Рис. 1: типові представники характеристичних підкласів діаграм з класу $\mathcal{S}_{n-4;3}^{n,1}$

2.2. Число неізоморфних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;3}^{n,1}$

За лемою Бернсайда (див. напр. [2], [10], [11]) число $t^*(n)$ неізоморфних (нееквівалентних відносно дії циклічної групи порядку n) діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;3}^{n,1}$ можна знайти за допомогою співвідношення

$$t^*(n) = \frac{1}{n} \left(t(n) + \sum_{i|n, i \neq n} \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \rho(n, i) \right), \quad (3)$$

де $t(n) = \left| \mathfrak{S}_{n-4;3}^{n,1} \right|$; $\phi(q)$ — функція Ейлера (кількість натуральних менших за q чисел, взаємнопростих із ним), а $\rho(n, i)$ — число тих діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;3}^{n,1}$, які самосуміщуються при повороті (за годинниковою стрілкою) на кут $\omega(n, i) = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i = 2\pi \cdot \frac{i}{n}$.

Очевидно, що для дільників $i \neq n$ числа n кут $\omega(n, i) \leq 180^\circ$. Більше того, поклавши $j = \frac{n}{i}$, співвідношення (3) можна подати у вигляді

$$t^*(n) = \frac{1}{n} \left(t(n) + \sum_{j|n, j \neq 1} \phi(j) \cdot \rho\left(n, \frac{n}{j}\right) \right), \quad (4)$$

де $\rho\left(n, \frac{n}{j}\right)$ — число тих діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;3}^{n,1}$, які самосуміщуються при повороті (за годинниковою стрілкою) на кут $\omega\left(n, \frac{n}{j}\right) = \frac{2\pi}{j}$.

Теорема 1. Для натуральних $n \geq 5$ число $t^*(n)$ неізоморфних (нееквівалентних відносно дії циклічної групи порядку n) діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;3}^{n,1}$ можна обчислити за формулою

$$t^*(n) = \frac{1}{n} \left(\frac{5}{4}(n-1)(n-2)C_{n+1}^6 + \sum_{j|n, j \in \{2;3;4;6\}} \phi(j) \cdot \rho\left(n, \frac{n}{j}\right) \right), \quad (5)$$

де: $\phi(q)$ — функція Ейлера; $\forall j \in N : \frac{n}{j} \notin N$ величини $\rho\left(n, \frac{n}{j}\right) \equiv 0$, а $\forall j \in \{2;3;4;6\} : \frac{n}{j} \in N$ величини $\rho\left(n, \frac{n}{j}\right)$ визначаються за допомогою співвідношень

$$\rho\left(n, \frac{n}{2}\right) = \frac{n(n-2)^2(n-4)}{192}, \quad \rho\left(n, \frac{n}{3}\right) = \frac{n(n-3)}{18}, \quad (6)$$

$$\rho\left(n, \frac{n}{4}\right) = \frac{n(n-4)}{16}, \quad \rho\left(n, \frac{n}{6}\right) = \frac{n}{6}.$$

Доведення. Не важко переконатися, що серед діаграм з характеристичних підкласів $A1, A2, A3; B2, B3, B5-B8, D1-D3, E1-E10, F1, F2, F5, F8$ та $F9$ взагалі немає таких, які самосуміщуються при повороті на певний кут

$$\omega_j = \omega\left(n, \frac{n}{j}\right) = \frac{2\pi}{j} < 2\pi, \quad \text{при } j \in \{2, \dots, n\}.$$

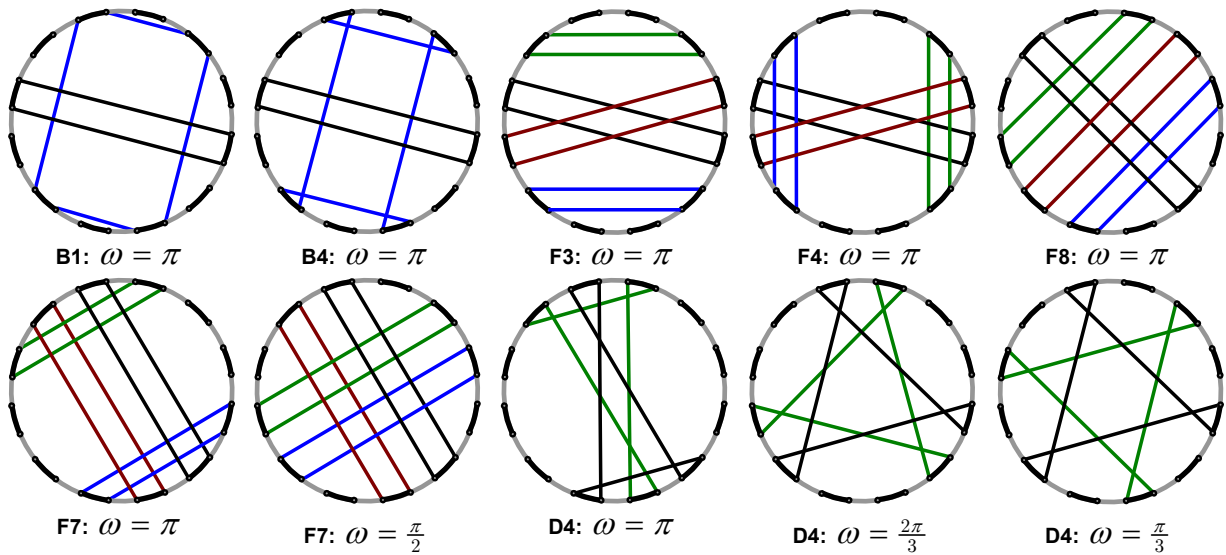


Рис. 2: всі типи діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4,3}^{n,1}$, які самосуміщуються при повороті на кут $\omega \leq \pi$

1) Діаграми з підкласів $B1$ та $B2$ самосуміщуються при повороті на певний кут $\omega_j < 2\pi$ лише за умов, коли n ділиться на 2 , а поворот здійснюється на кут $\omega = \frac{2\pi}{2}$ (при $j = 2$); для натуральних $n = 2k \geq 6$ число таких діаграм (для кожного з підкласів $B1$ та $B2$) становить $3 \cdot C_k^3$; звідки для натуральних $\frac{n}{2} \geq 3$ число зазначених діаграм становить

$$\rho_{B1}\left(n, \frac{n}{2}\right) = \rho_{B2}\left(n, \frac{n}{2}\right) = 3 \cdot C_{\frac{n}{2}}^3.$$

2) Діаграми з підкласів $F3, F4$ та $F8$ самосуміщуються при повороті на певний кут $\omega_j < 2\pi$ лише за умов, коли n ділиться на 2 , а поворот здійснюється на кут $\omega = \frac{2\pi}{2}$ (при $j = 2$); для натуральних $n = 2k \geq 8$ число таких діаграм (для кожного з підкласів $F3, F4$ та $F8$) становить $4 \cdot C_k^4$; звідки для натуральних $\frac{n}{2} \geq 4$ число зазначених діаграм становить

$$\rho_{F3}\left(n, \frac{n}{2}\right) = \rho_{F4}\left(n, \frac{n}{2}\right) = \rho_{F8}\left(n, \frac{n}{2}\right) = 4 \cdot C_{\frac{n}{2}}^4.$$

3) Діаграми з підкласу $F7$ самосуміщуються при повороті на певний кут $\omega_j < 2\pi$ лише за умов, коли n ділиться на 2 або ж на 4 . Причому:

в 1-му випадку поворот здійснюється на кут $\omega = \frac{2\pi}{2}$ (при $j = 2$);

в 2-му випадку — на кут $\omega = \frac{2\pi}{4}$ (при $j = 4$).

Крім того, не важко перевірити, що:

в 1-му випадку для $n = 2k \geq 8$ число відповідних діаграм становить $2 \cdot C_k^4$; звідки для натуральних $\frac{n}{2} \geq 4$ число зазначених діаграм становить

$$\rho_{\mathbf{F7}}\left(n, \frac{n}{2}\right) = 2 \cdot C_{\frac{n}{2}}^4;$$

в 2-му випадку для $n = 4k \geq 8$ число відповідних діаграм становить $2 \cdot C_k^2$; звідки для натуральних $\frac{n}{4} \geq 2$ число зазначених діаграм становить

$$\rho_{\mathbf{F7}}\left(n, \frac{n}{4}\right) = 2C_{\frac{n}{4}}^2 = \frac{n(n-4)}{16}.$$

4) Діаграми з підкласу $D4$ самосуміщуються при повороті на певний кут $\omega_j < 2\pi$ лише за умов, коли n ділиться на 2, 3 або ж на 6. Причому:

в 1-му випадку поворот здійснюється на кут $\omega = \frac{2\pi}{2}$ (при $j = 2$);

в 2-му випадку — на кут $\omega = \frac{2\pi}{3}$ (при $j = 3$);

в 3-му випадку — на кут $\omega = \frac{2\pi}{6}$ (при $j = 6$).

Не важко перевірити, що:

в 1-му випадку для $n = 2k \geq 6$ число відповідних діаграм становить C_k^3 ; звідки для натуральних $\frac{n}{2} \geq 3$ число зазначених діаграм становить

$$\rho_{\mathbf{D4}}\left(n, \frac{n}{2}\right) = C_{\frac{n}{2}}^3;$$

в 2-му випадку для $n = 3k \geq 6$ число відповідних діаграм становить C_k^2 ; звідки для натуральних $\frac{n}{3} \geq 2$ число зазначених діаграм становить

$$\rho_{\mathbf{D4}}\left(n, \frac{n}{3}\right) = C_{\frac{n}{3}}^2 = \frac{n(n-3)}{18};$$

в 3-му випадку для $n = 6k \geq 6$ число відповідних діаграм становить C_k^1 ; звідки для натуральних $\frac{n}{6} \geq 1$ число зазначених діаграм становить

$$\rho_{\mathbf{D4}}\left(n, \frac{n}{6}\right) = \frac{n}{6}.$$

Таким чином маємо, що:

$$\rho\left(n, \frac{n}{6}\right) = \rho_{\mathbf{D4}}\left(n, \frac{n}{6}\right) = \frac{n}{6}; \quad \rho\left(n, \frac{n}{4}\right) = \rho_{\mathbf{F7}}\left(n, \frac{n}{4}\right) = \frac{n(n-4)}{16};$$

$$\rho\left(n, \frac{n}{3}\right) = \rho_{\mathbf{D4}}\left(n, \frac{n}{3}\right) = \frac{n(n-3)}{18};$$

$$\begin{aligned} \rho\left(n, \frac{n}{2}\right) &= \rho_{\mathbf{B1}}\left(n, \frac{n}{2}\right) + \rho_{\mathbf{B4}}\left(n, \frac{n}{2}\right) + \rho_{\mathbf{D4}}\left(n, \frac{n}{2}\right) + \\ &\quad + \rho_{\mathbf{F3}}\left(n, \frac{n}{2}\right) + \rho_{\mathbf{F4}}\left(n, \frac{n}{2}\right) + \rho_{\mathbf{F7}}\left(n, \frac{n}{2}\right) + \rho_{\mathbf{F8}}\left(n, \frac{n}{2}\right) = \\ &= 3 \cdot C_{\frac{n}{2}}^3 + 3 \cdot C_{\frac{n}{2}}^3 + 1 \cdot C_{\frac{n}{2}}^3 + 4 \cdot C_{\frac{n}{2}}^4 + 4 \cdot C_{\frac{n}{2}}^4 + 2 \cdot C_{\frac{n}{2}}^4 + 4 \cdot C_{\frac{n}{2}}^4 = \\ &= 7 \cdot C_{\frac{n}{2}}^3 + 14 \cdot C_{\frac{n}{2}}^4 = \frac{n(n-2)^2(n-4)}{192}. \end{aligned} \quad \square$$

Зауваження 2. Оскільки клас $\mathfrak{S}_{k;l}^{n,1}$ ($n = k+l+1$) двокольорових O -діаграм є підмножиною класу («звичайних») хордових n -діаграм роду 1, то, з урахуванням результатів робіт [2], [15] і [16], є всі підстави стверджувати:

якщо діаграма з класу $\mathfrak{S}_{k;l}^{n,1}$ самосуміщується при повороті на певний кут $\varphi < 360^\circ$, то цей кут обов'язково 60° або 90° , або 120° , або ж 180° .

2.3. Число нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;3}^{n,1}$

Застосовуючи лему Бернсайда (див. напр. [2], [10], [11]), не важко встановити, що число $t^{**}(n)$ нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи) діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;3}^{n,1}$ можна визначити за допомогою співвідношень

$$t_n^{**} = \frac{1}{2} (t^*(n) + S(n)), \quad (7)$$

де $t^*(n)$ — число неізоморфних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$,

$$S(n) = \begin{cases} s_0(n), & n = 2m + 1 \\ \frac{1}{2}(s_1(n) + s_2(n)), & n = 2m, \end{cases} \quad (8)$$

$s_0(n)$ — число тих діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;3}^{n,1}$, що є симетричними відносно **фіксованої осі симетрії**, яка проходить через середини протилежних чорної та сірої дуг 2-кольорового $2n$ -шаблону;

$s_1(n)$ ($s_2(n)$) — число тих діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;3}^{n,1}$, що є симетричними відносно **фіксованої осі симетрії**, яка проходить через середини протилежних сірих (відповідно чорних) дуг 2-кольорового $2n$ -шаблону.

Таким чином, з урахуванням співвідношень (7), (8) та встановлених формул (5), (6) для обчислення величини $t^*(n)$, задача про підрахунок числа $t^{**}(n)$ нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;3}^{n,1}$ зводиться до задач про підрахунок величин $s_0(n)$, $s_1(n)$, $s_2(n)$.

Лема 1. *Нехай $n = 2m + 1$. Тоді число $s_0(n)$ діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;3}^{n,1}$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через середини протилежних чорної та сірої дуг 2-кольорового $2n$ -шаблону, можна обчислити за формулою*

$$s_0(n) = \frac{1}{192}(n-1)(n-3)(7n^2 + 8n - 143). \quad (9)$$

Доведення. Всі діаграми з класу $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через середини протилежних чорної та сірої дуг 2-кольорового $2n$ -шаблону ($n = 2m + 1$), вичерпуються діаграмами, зображеними на рис. 3 та (заради зручності) позначеними у спосіб 1.1–1.3, 2.1–2.23 та 3.1–3.14.

Оскільки $n = 2m + 1$, то сумарне число $s_0(n)$ діаграм зазначених типів становить

$$\begin{aligned} 3 \times C_{\frac{n-1}{2}}^2 + 23 \times C_{\frac{n-1}{2}}^3 + 14 \times C_{\frac{n-1}{2}}^4 &= 3 \times C_m^2 + 23 \times C_m^3 + 14 \times C_m^4 = \\ &= \frac{1}{12}m(m-1)(7m^2 + 11m - 32), \end{aligned}$$

звідки, з урахуванням рівності $m = \frac{n-1}{2}$, одержуємо, що

$$s_0(n) = \frac{1}{192}(n-1)(n-3)(7n^2 + 8n - 143).$$

□

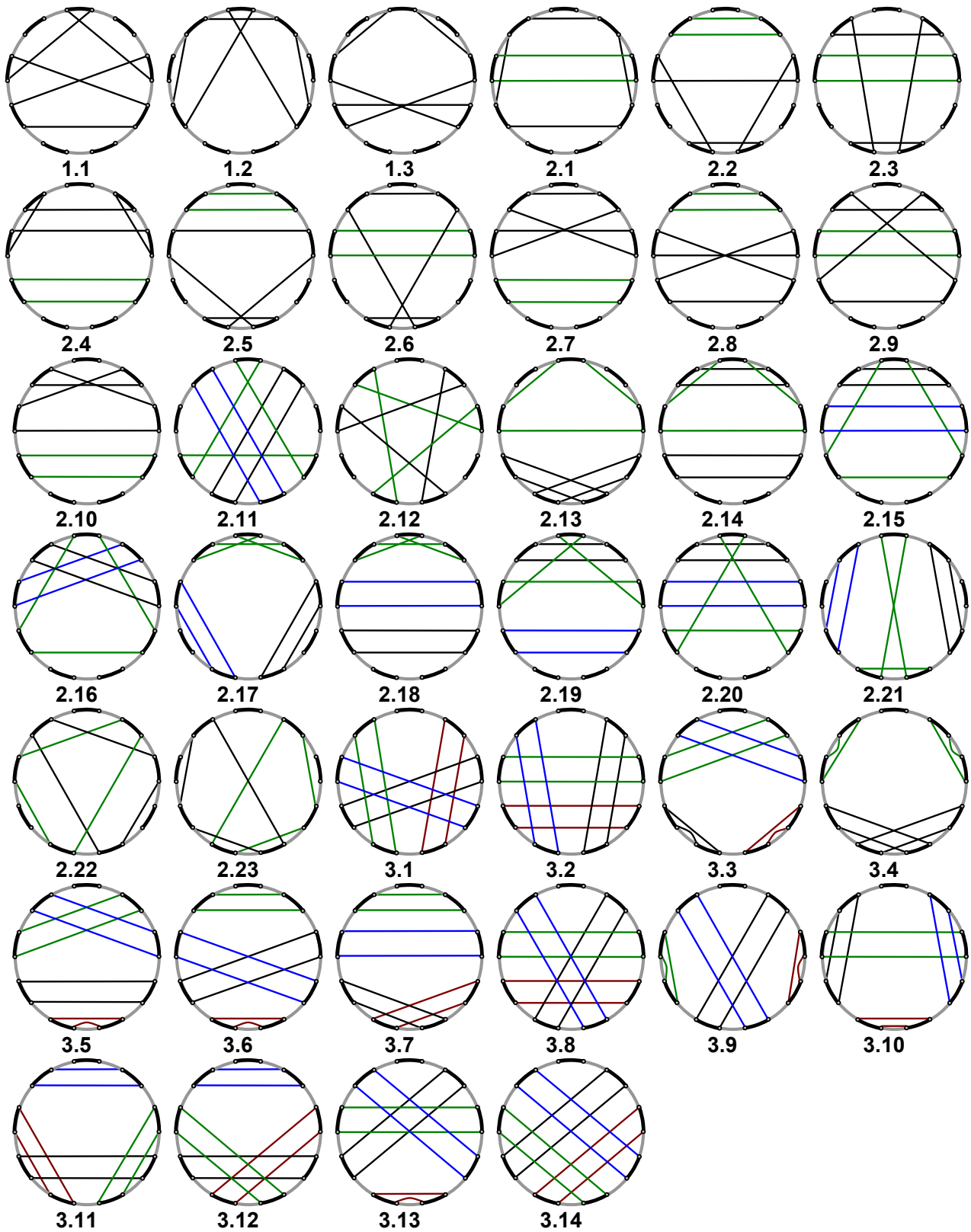


Рис. 3: до леми 1

Лема 2. Нехай $n = 2m$. Тоді мають місце рівності

$$s_1(n) = \frac{1}{192}n(n-2)(n-4)(7n+10), \quad (10)$$

$$s_2(n) = \frac{1}{192}(n-2)(n-4)(7n^2+50n-240); \quad (11)$$

$$\frac{1}{2}(s_1(n) + s_2(n)) = \frac{1}{192}(n-2)(n-4)(7n^2+30n-120). \quad (12)$$

Доведення. Всі діаграми з класу $\mathfrak{S}_{n-4;3}^{n,1}$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через середини протилежних **сірих** дуг 2-кольорового $2n$ -шаблону, вичерпуються діаграмами, зображеними на рис. 4 та (заради зручності) позначеними у спосіб 1.1–1.13 та 2.1–2.14.

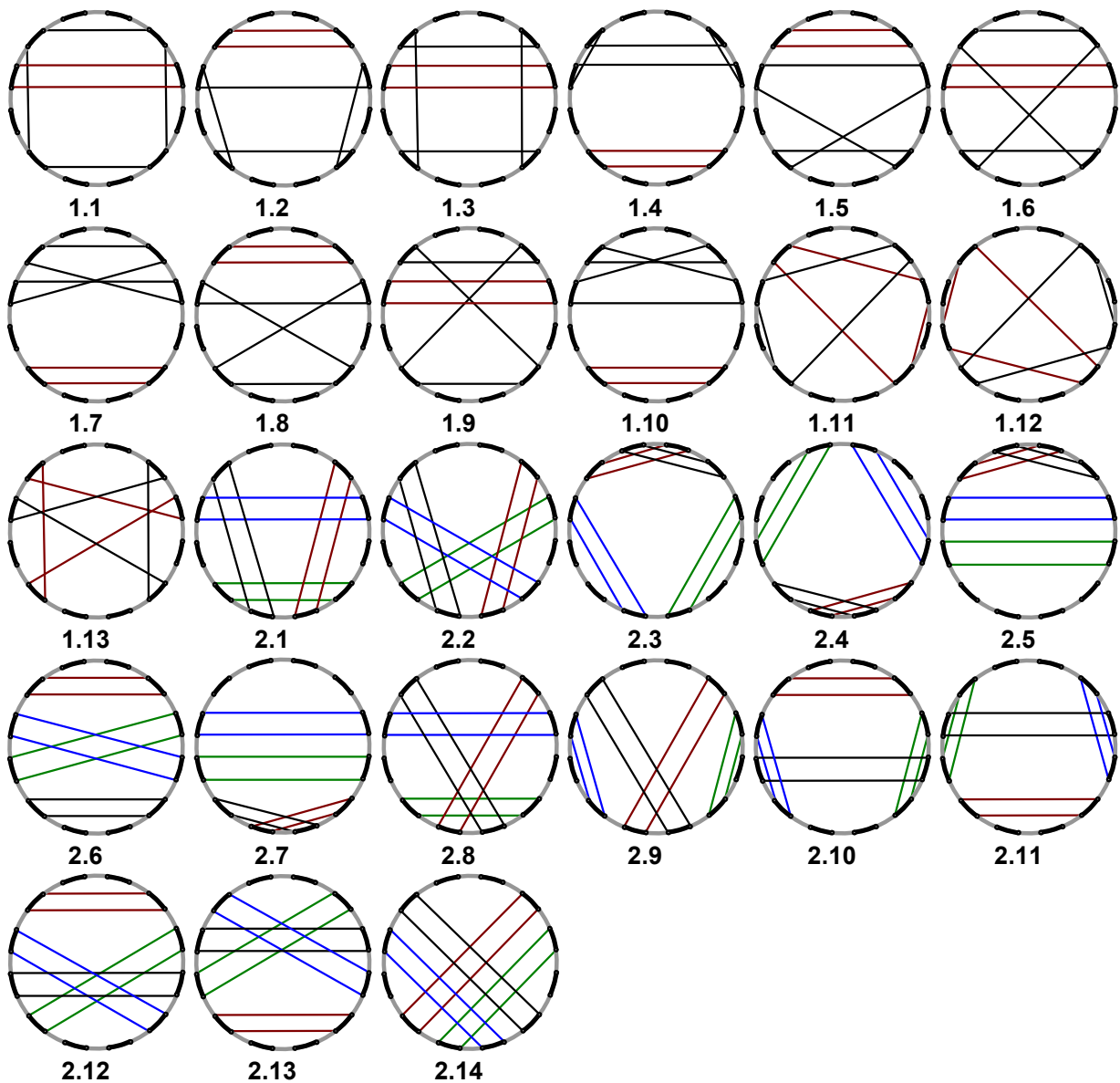


Рис. 4: до лема 2

Оскільки $n = 2m$, то сумарне число $s_1(n)$ діаграм зазначених типів становить

$$13 \times C_{\frac{n}{2}}^3 + 14 \times C_{\frac{n}{2}}^4 = 13 \times C_m^3 + 14 \times C_m^4 = \frac{1}{4!}m(m-1)(m-2)(10+14m),$$

звідки, з урахуванням рівності $m = \frac{n}{2}$, одержуємо, що

$$s_1(2m) = s_1(n) = \frac{1}{192}n(n-2)(n-4)(7n+10).$$

Діаграми з класу $\mathfrak{S}_{n-4;3}^{n,1}$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через середини протилежних **чорних** дуг 2-кольорового $2n$ -шаблону, вичерпуються діаграмами, зображеними на рис. 5 і 6 та позначеними у спосіб 1.1–1.13, 2.1–2.14 та 3.1–3.37 відповідно.

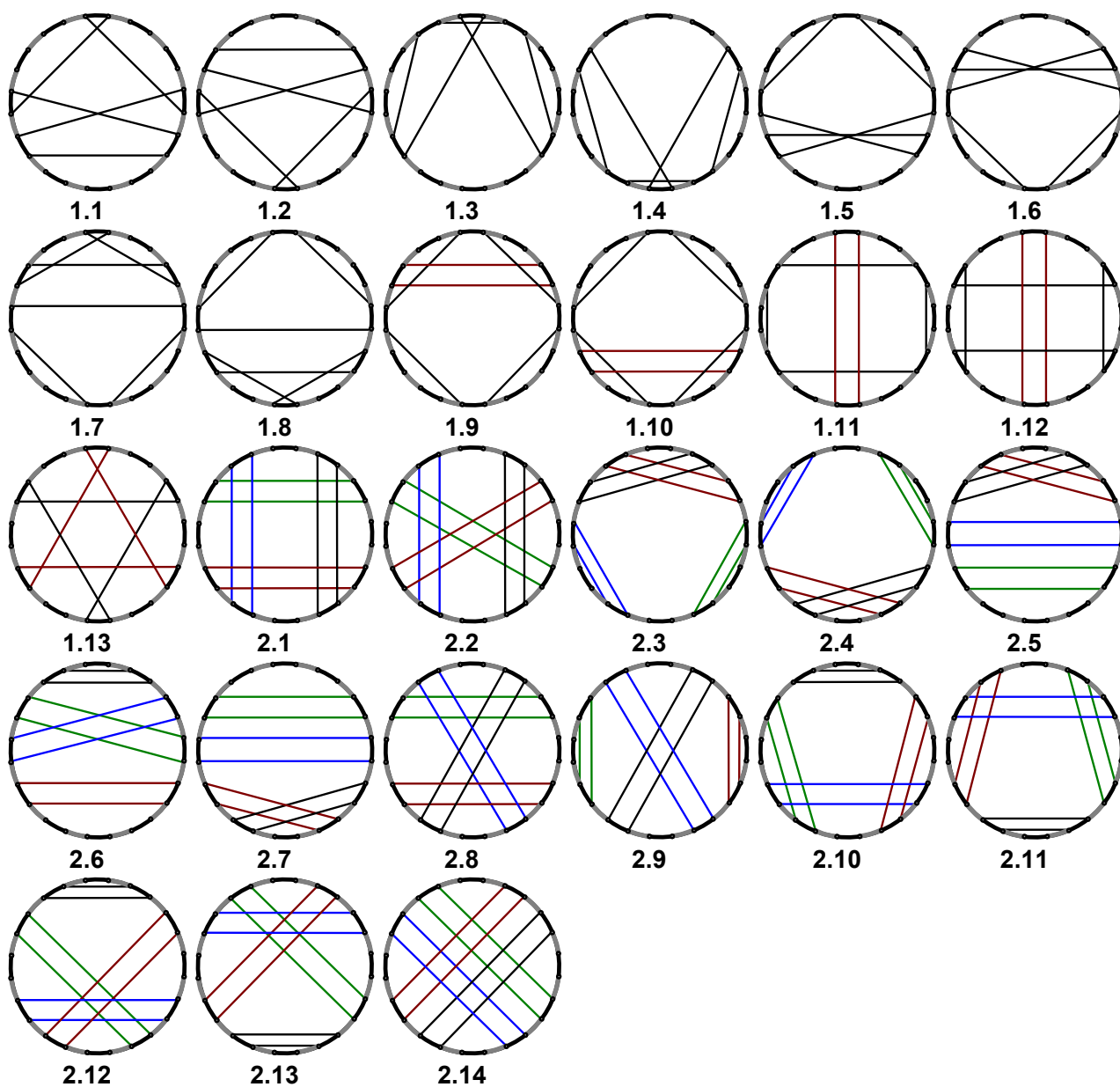


Рис. 5: до леми 2

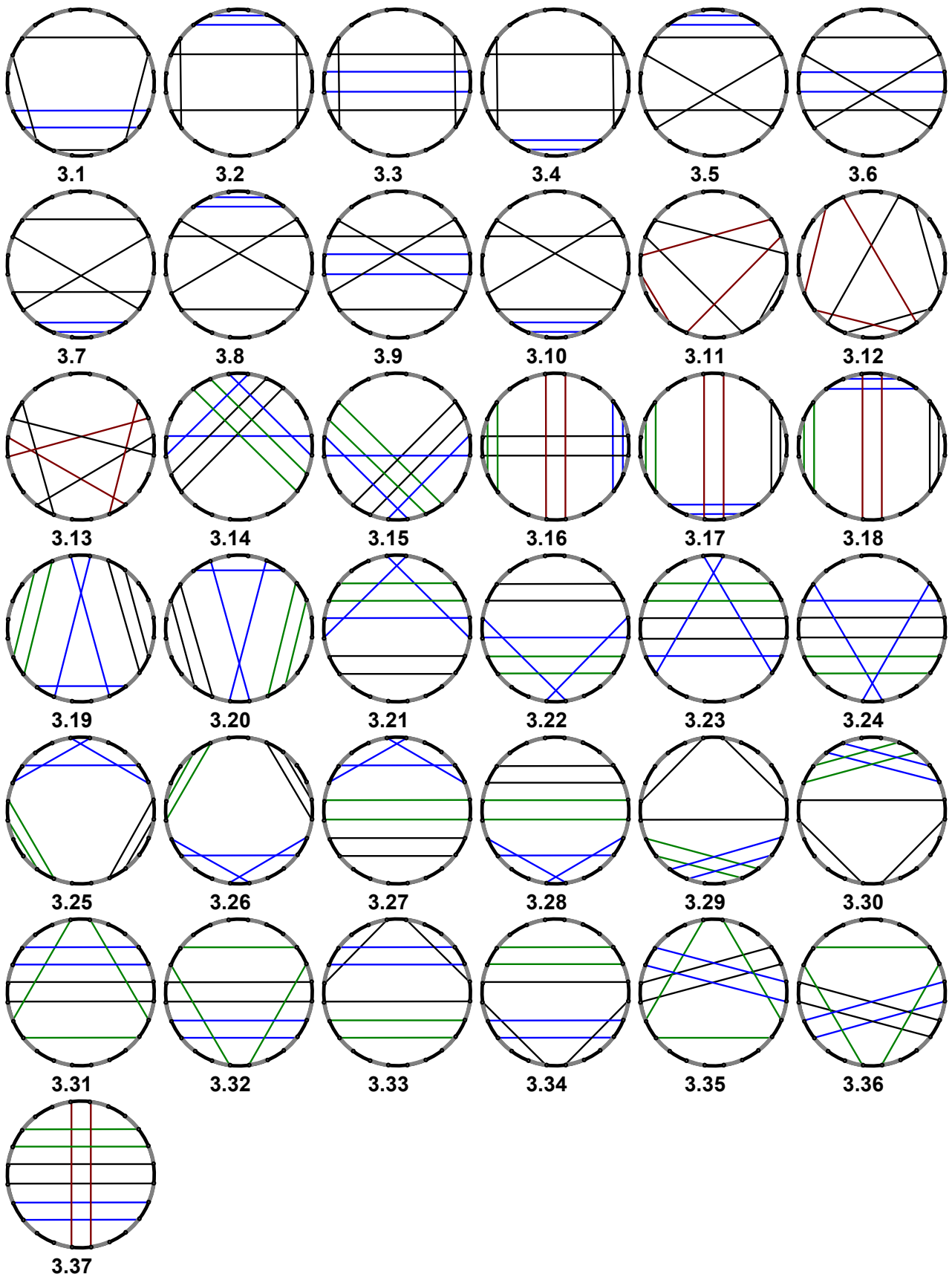


Рис. 6: до леми 2

Оскільки $n = 2m$, то сумарне число $s_2(n)$ діаграм зазначених типів становить

$$13 \times C_{\frac{n-2}{2}}^2 + 14 \times C_{\frac{n-2}{2}}^4 + 37 \times C_{\frac{n-2}{2}}^3 = 13 \times C_{m-1}^2 + 14 \times C_{m-1}^4 + 37 \times C_{m-1}^3 = \\ = \frac{1}{12}(m-1)(m-2)(7m^2 + 25m - 60),$$

звідки, з урахуванням рівності $m = \frac{n}{2}$, одержуємо, що

$$s_2(2m) = s_2(n) = \frac{1}{192}(n-2)(n-4)(7n^2 + 50n - 240).$$

Крім того, безпосередньою перевіркою не важко переконатися, що

$$\frac{1}{2}(s_1(n) + s_2(n)) = \frac{1}{192}(n-2)(n-4)(7n^2 + 30n - 120).$$

□

З урахуванням співвідношень (7), (8) та лем 1 і 2, має місце

Теорема 2. Для натуральних $n \geq 5$ число $t^{**}(n)$ нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи) діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;3}^{n,1}$ можна обчислити за формулою

$$t^{**}(n) = \frac{1}{2}(t^*(n) + S(n)), \tag{13}$$

де $t^*(n)$ визначається за формулами (5), (6), а

$$S(n) = \begin{cases} \frac{1}{192}(n-1)(n-3)(7n^2 + 8n - 143), & n = 2m + 1 \\ \frac{1}{192}(n-2)(n-4)(7n^2 + 30n - 120), & n = 2m. \end{cases} \tag{14}$$

3. Додатки та прикінцеві зауваження

Зауваження 3. За допомогою одержаних формул можна підрахувати й число нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{3;n-4}^{n,1}$

Повторюючи міркування, аналогічні наведеним в роботі [4], не важко встановити справедливість наступного твердження

Твердження 1. При $n \rightarrow \infty$ величини $t^{**}(n)$ та

$$\delta(n) = \frac{t(n)}{2n} = \frac{(n+1) \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2)^2 \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{1152}$$

є еквівалентними нескінченно великими величинами.

n	$t(n)$	$t^*(n)$	$t^{**}(n)$
5	15	3	3
6	175	31	22
7	1 050	150	91
8	4 410	557	314
9	14 700	1 634	879
10	41 580	4 172	2 196
11	103 950	9 450	4 890
12	235 950	19 694	10 107
13	495 495	38 115	19 415
14	975 975	69 765	35 405
15	1 821 820	121 456	61 407
16	3 248 700	203 131	102 507
17	5 569 200	327 600	164 976
18	9 224 880	512 626	257 881
19	14 825 700	780 300	392 052
20	23 197 860	1 160 084	582 502
21	35 441 175	1 687 677	846 756
22	52 997 175	2 409 225	1 208 295
23	77 729 190	3 379 530	1 694 055
24	112 015 750	4 667 681	2 339 148
25	158 858 700	6 354 348	3 183 268
26	222 007 500	8 539 212	4 277 020
27	306 101 250	11 337 086	5 676 954
28	416 830 050	14 887 382	7 453 779
29	561 117 375	19 348 875	9 685 767
30	747 325 215	24 911 587	12 469 216

Табл. 1: початкові значення величин $t(n)$, $t^*(n)$ та $t^{**}(n)$

Нижче на рис. 7 та 8 в явному вигляді наведено всі неізоморфні (нееквівалентні відносно дії циклічної групи / «поворотів») діаграми з класів $\mathfrak{S}_{1;3}^{5,1}$ та $\mathfrak{S}_{2;3}^{6,1}$ відповідно.

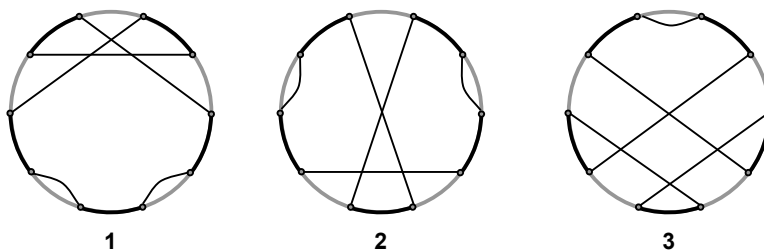


Рис. 7: всі неізоморфні (нееквівалентні) діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1;3}^{5,1}$

Очевидно, що:

у випадку $n = 5$ всі вони (неізоморфні) є також і нееквівалентними (відносно дії дієдральної групи);

у випадку $n = 6$ з 31 неізоморфних діаграм пари $\{14; 15\}$, $\{16; 17\}$, $\{19; 20\}$, $\{21; 22\}$, $\{18; 23\}$, $\{24; 5\}$, $\{26; 27\}$, $\{28; 29\}$ та $\{30; 31\}$ є еквівалентними, а тому існує лише $31 - 9 = 22$ нееквівалентні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{2;3}^{6,1}$.

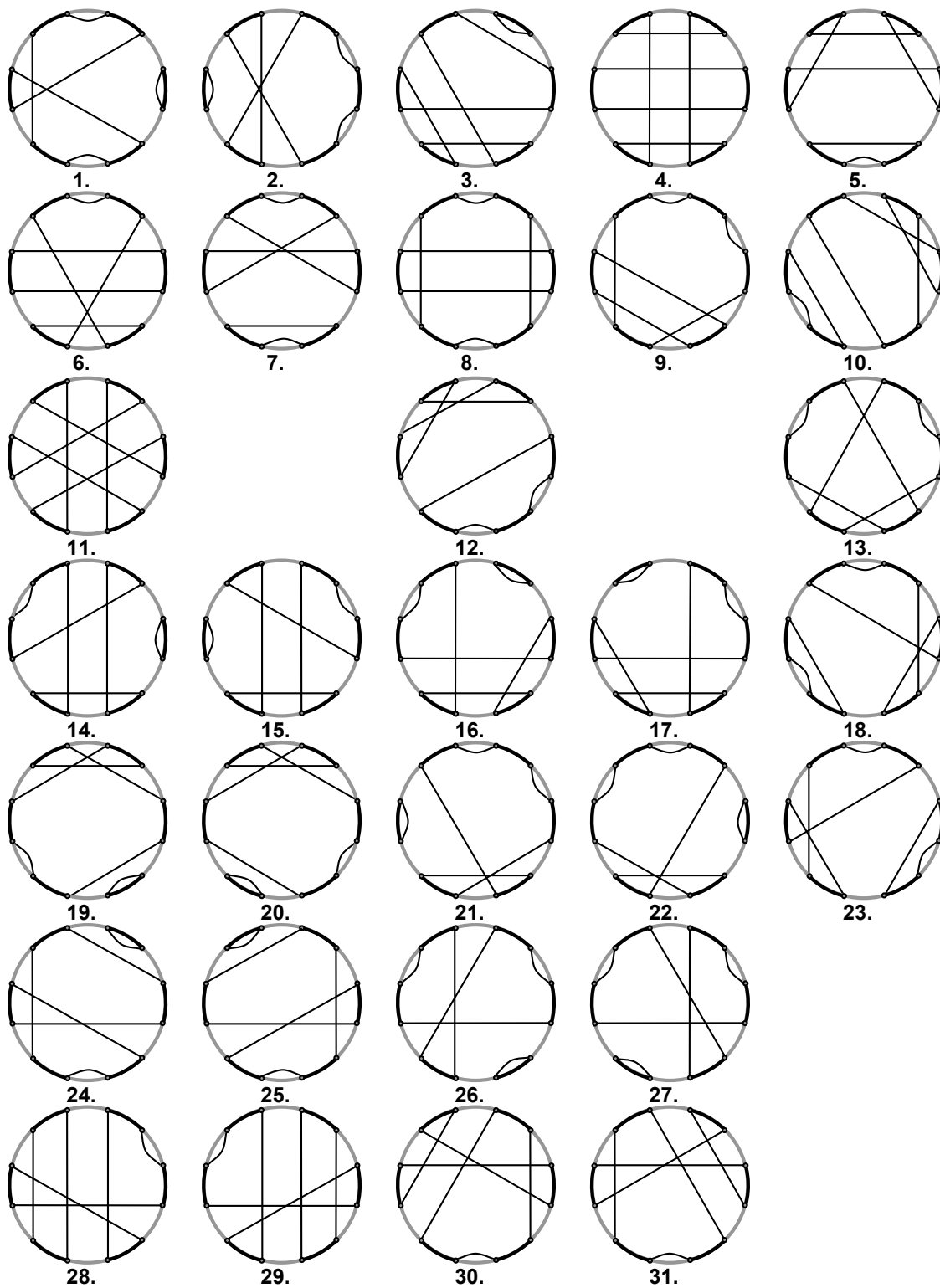


Рис. 8: всі неізоморфні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{2;3}^{6,1}$

Висновки

Таким чином, в представленій роботі повністю розв'язано задачі про підрахунок числа неізоморфних та нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;3}^{n,1}$.

Крім того, для $n = 5$ та $n = 6$ в явному вигляді наведено всі неізоморфні та нееквівалентні діаграми з відповідних класів, а для $5 \leq n \leq 30$ — точні значення числа неізоморфних та нееквівалентних таких діаграм.

Цілком природно подальшу роботу спрямувати на узагальнення одержаних результатів для класу $\mathfrak{S}_{k,l}^{n,g}$ на випадок довільного $1 \leq l \leq n - 2$.

Література

1. *Callan D., Smiley L.* Noncrossing partitions under reflection and rotation; preprint, arXiv:math/0510447 [math.CO], 2000.
2. *Cori R., Marcus M.* Counting non-isomorphic chord diagrams. Theoretical Computer Science. 1998. Vol. 204. P. 55–73.
3. *Goupil A., Schaeffer G.* Factoring n -cycles and counting maps of given genus. European Journal of Combinatorics. 1998. Vol. 19, No. 7. P. 819–834.
4. *Khruzin A.* Enumeration of chord diagrams; preprint, arXiv:math/0008209 [math.CO], 1998.
5. *Krasko E.* Counting Unlabelled Chord Diagrams of Maximal Genus; preprint, arXiv:1709.00796 [math.CO], 2017.
6. *Li B., Sun H.* Exact number of chord diagrams and an estimation of the number of spine diagrams of order n . Chinese Science Bulletin. 1997. Vol. 42, No. 9. P. 705–720.
7. *Stoimenov A.* Enumeration of chord diagrams and an upper bound for Vassiliev invariants. Journal of Knot and its Ramifications. 1998. Vol. 7, No. 1. P. 93–114.
8. *Адрианов Н. М.* Аналог формулы Харера-Цагира для одноклеточных двукрашенных карт. Функциональный анализ и его приложения. 1997. Том 31, № 3. С. 1–9.
9. *Кадубовський О.* Про один клас хордових діаграм максимального роду. Вісник Київського університету Серія: фізико-математичні науки. 2006. Вип. 1. С. 17–27.
10. *Кадубовський О. А., Сторожилова О. В., Сторожилова Н. В.* Двокольорові O - і N -діаграми. Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки. 2010. Том I, Вип. 10. С. 41–50.
11. *Кадубовський О. А., Саприкіна Ю. С., Мазур С. Ю.* Двокольорові O -діаграми з одним чорним циклом. Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки. 2010. Том I, Вип. 10. С. 51–60.

12. Кадубовський А.А. Двухцветные хордовые N -диаграммы с одним черным циклом. Труды института прикладной математики и механики НАН Украины. 2012. Том 24. С. 134–146.
13. Кадубовський А.А. О числе топологически неэквивалентных функций с одной вырожденной критической точкой типа седло на двумерной сфере, II. Труды международного геометрического центра. 2015. Том 8, № 1. С. 46–61.
14. Кадубовський О.А. Перерахування топологічно нееквівалентних гладких мінімальних функцій на замкнених поверхнях // Топологія відображень маловимірних многовидів : Збірник праць Інституту математики НАН України. 2015. Том 12, № 6. С. 105–145.
15. Кадубовський О. А., Баляса Н. П. Перерахування двокольорових хордових O -діаграм роду 1, які мають один чорний (або сірий) цикл, відносно дії циклічної та дієдральної груп. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. 2016. Вип. 6. С. 31–46.
16. Кадубовський О. А., Калініченко Я. В. Перерахування двокольорових хордових O -діаграм роду 1, які мають два чорних (або сірих) циклів, відносно дії групи дієдра. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. 2018. Вип. 8. С. 30–45.
17. Кадубовський О. А. Перерахування двокольорових хордових O -діаграм роду один з трьома сірими (або чорними) циклами // Матеріали XXI Міжнародного науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування». — Кропивницький, 17-18 травня 2019 р. (в друці).

Kadubovs'kyi Oleksandr A.

Donbas State Pedagogical University, Slovians'k, Ukraine.

Enumeration of 2-color chord O -diagrams of the genus one that have three grey (or black) faces under rotation and reflection

In this paper we consider 2-color chord O -diagrams (of order n) with three grey and $(n - 4)$ black faces under the action of (i) the rotation group (cyclic of the order n) and of (ii) the rotation/reflection group (dihedral of the order $2n$).

For natural 5 and 6 we have illustrated all non-isomorphic and non-equivalent of such diagrams. We have established explicit formulas for counting the number of non-isomorphic and non-equivalent diagrams from the specified class. In addition, for natural $5 \leq n \leq 30$ we have also listed the exact value of the number of non-isomorphic and non-equivalent such diagrams accordingly.

Keywords: 2-color chord O -diagrams, genus of a diagram, faces of a diagram, cyclic and dihedral groups.