МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

Новіков О.О., Ровенська О.Г., Козаченко Ю.О., Бондаренко А.О., Панюхно В.Д.

[1] *канд. фізико-математичних наук, доцент каф. математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *канд. фізико-математичних наук, доцент каф. вищої математики, ДДМА*

[3] *студентка 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[4] *студентка 2 курсу (магістратура) фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[5] *студентка 2 курсу (магістратура) фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ОЦІНКА ЗНИЗУ ГОЛОВНОГО ЧЛЕНА АСИМПТОТИЧНОЇ РІВНОСТІ ВІДХИЛЕНЬ ОПЕРАТОРІВ ФЕЙЄРА НА КЛАСІ ІНТЕГРАЛІВ ПУАСОНА

Розглянуті питання наближення функцій, які можна подати у вигляді інтегралів Пуассона, класичними операторами Фейєра. Отримані оцінки знизу значень верхніх граней відхилень операторів Фейєра на класі інтегралів Пуассона для більш широкого спектру параметрів, що їх визначають.

Ключові слова: *ряди Фур'є, оператори Фейєра, асимптотичні формули*

Стаття присвячена питанням наближення періодичних функцій тригонометричними поліномами, породжуваними лінійними операторами підсумовування рядів Фур'є. Досліджуються питання у рамках екстремальної задача для метода Фейєра, на класах аналітичних періодичних функцій дійсної змінної, які можна подати у вигляді згорток.

Позначимо через L множину 2π –періодичних функцій, які на проміжку $[-\pi;\pi]$ мають скінчений інтеграл Лебега. Нехай $f \in L$ і

$$S_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

– часткова суми ряду Фур'є порядку n. Суми Фейєра задаються співвідношенням

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f,x). \tag{1}$$

Через $C^q_{\beta,\infty}$, ($q \in (0;1)$, $\beta \in \mathbb{R}$) позначимо класи неперервних $2\pi-$ періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t)\sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})\; dt,$$

де для функції $\varphi(x)$ виконана така умова $\mathrm{esssup}|\varphi(x)| \leqslant 1$. Функцію $f(x)$ називають інтегралом Пуассона функції $\varphi(x)$ [1].

В роботі [2] показано, що має місце твердження.

Теорема 1. *Нехай* $q \in (0;q_0]$, $q_0 = 2-\sqrt{3} \approx 0,267949$. *Тоді при* $n \to \infty$ *виконуються рівності*

$$\mathcal{E}(C^q_{0,\infty},\sigma_n) \equiv \sup_{f\in C^q_{0,\infty}} ||f(x)-\sigma_n(f,x)||_C = \frac{4q}{\pi n(1+q^2)} + O(1)\frac{q^n}{n}, \qquad (2)$$

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty},\sigma_n) \equiv \sup_{f\in C^q_{1,\infty}} ||f(x)-\sigma_n(f,x)||_C = \frac{4q}{\pi n(1-q^2)} + O(1)\frac{q^n}{n}, \qquad (3)$$

де величина $O(1)$ *рівномірно обмежена за* n, q.

З цього випливає, що для $\beta \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty},\sigma_n) \leqslant \frac{4q|\sin\frac{\beta\pi}{2}|}{\pi n(1-q^2)} + \frac{4q|\cos\frac{\beta\pi}{2}|}{\pi n(1+q^2)} + O(1)\frac{q^n}{n},$$

Дане повідомлення присвячене обчисленню оцінки знизу для величин

$$\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty},\sigma_n) \equiv \sup_{f\in C^q_{\beta,\infty}} ||f(x)-\sigma_n(f,x)||_C.$$

Оцінка знизу для відхилення сум Фейєра від своїх інтегралів Пуассона

Теорема 2. *Нехай* $\beta \in \mathbb{R}$, $q \in (0;q_0]$, $q_0 = 2-\sqrt{3} \approx 0,267949$. *Тоді при* $n \to \infty$ *виконується нерівність*

$$\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty},\sigma_n) \geqslant \frac{4q\cos^3\frac{\beta\pi}{2}}{\pi n(1+q^2)} + \frac{4q\sin^3\frac{\beta\pi}{2}}{\pi n(1-q^2)} + O(1)\frac{q^n}{n}. \qquad (4)$$

де величина $O(1)$ *рівномірно обмежена за* n, q.

Доведення.

В [2] показано, що

$$\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty}, \sigma_n) =$$

$$\sup_{f\in C^q_{\beta,\infty}} \left\| \frac{q}{\pi n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t) \frac{[(1+q^2)\cos t - 2q]\cos\frac{\beta\pi}{2} - [(1-q^2)\sin t]\sin\frac{\beta\pi}{2}}{(1-2q\cos t+q^2)^2} dt \right\|,$$

а для

$$\varphi_0(t) = \operatorname{sign}\left(\frac{(1+q^2)\cos t - 2q}{(1-2q\cos t+q^2)^2} - \frac{-2q}{(1+q^2)^2}\right) = \begin{cases} -1, & t\in(-\pi;-\pi/2) \\ 1, & t\in(-\pi/2;\pi/2) \\ -1, & t\in(\pi/2;\pi). \end{cases}$$

$$\varphi_1(t) = \operatorname{sign}((1-q^2)\sin t) = \begin{cases} -1, & t\in(-\pi;0) \\ 1, & t\in(0;\pi). \end{cases} = \begin{cases} -1, & t\in(-\pi;-\pi/2) \\ -1, & t\in(-\pi/2;0) \\ 1, & t\in(0;\pi/2) \\ 1, & t\in(\pi/2;\pi), \end{cases}$$

для $q\in(0;q_0]$, $q_0 = 2-\sqrt{3}\approx 0,267949$ мають місце рівності

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty}, \sigma_n) = \left\| \frac{q}{\pi n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(t) \frac{[(1-q^2)\sin t]}{(1-2q\cos t+q^2)^2} dt \right\|,$$

$$\mathcal{E}(C^q_{0,\infty}, \sigma_n) = \left\| \frac{q}{\pi n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t) \frac{(1+q^2)\cos t - 2q}{(1-2q\cos t+q^2)^2} dt \right\|.$$

Тоді, поклавши

$$\varphi(t) = \varphi_0(t)\cos^2\frac{\beta\pi}{2} - \varphi_1(t)\sin^2\frac{\beta\pi}{2} =$$

$$= \cos^2\frac{\beta\pi}{2} \begin{cases} -1, & t\in(-\pi;-\pi/2) \\ 1, & t\in(-\pi/2;0) \\ 1, & t\in(0;\pi/2) \\ -1, & t\in(\pi/2;\pi). \end{cases} - \sin^2\frac{\beta\pi}{2} \begin{cases} -1, & t\in(-\pi;-\pi/2) \\ -1, & t\in(-\pi/2;0) \\ 1, & t\in(0;\pi/2) \\ 1, & t\in(\pi/2;\pi) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -\cos^2\frac{\beta\pi}{2} + \sin^2\frac{\beta\pi}{2}, & t\in(-\pi;-\pi/2) \\ \cos^2\frac{\beta\pi}{2} + \sin^2\frac{\beta\pi}{2}, & t\in(-\pi/2;0) \\ \cos^2\frac{\beta\pi}{2} - \sin^2\frac{\beta\pi}{2} & t\in(0;\pi/2) \\ -\cos^2\frac{\beta\pi}{2} - \sin^2\frac{\beta\pi}{2}, & t\in(\pi/2;\pi) \end{cases}$$

і $f^q_\beta(x+t)=\varphi(t)$, отримуємо

$$\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty},\sigma_n)\geqslant$$

$$\geqslant\left\|\frac{q}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\frac{[(1+q^2)\cos t-2q]\cos\frac{\beta\pi}{2}-[(1-q^2)\sin t]\sin\frac{\beta\pi}{2}}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt\right\|=$$

$$=\left\|\frac{q\cos^3\frac{\beta\pi}{2}}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi_0(t)\frac{[(1+q^2)\cos t-2q]}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt+\right.$$

$$\left.+\frac{q\sin^3\frac{\beta\pi}{2}}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi_1(t)\frac{-[(1-q^2)\sin t]}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt\right\|.$$

Виконуючи обчислення, отримуємо співвідношення (4).

Література

1. *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. — К. : Наук. думка, 1981. — 340 с.
2. *Novikov O.O.* Approximation of periodic analytic functions by Fejer sums / O.O. Novikov, O.G. Rovenska // Mat. Stud. — 2017. — 47. — P. 196–201.

Novikov O., Rovenska O., Kozachenko Y., Bondarenko A., Paniukhno V.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine
Donbas State Engineering Academy, Kramatorsk, Ukraine

Lower estimate of the main member of asymptotic equality of deviations of operators of Fejer on the class of Poisson integrals

The questions of an approximation of functions, which can be presented in the form of Poisson integrals, classical operators of Fejer have been considered. The lower estimates of values of upper bounds of deviations of operators of Fejer on the class of Poisson integrals for the wider spectrum of parameters which define them have been received.

Keywords: *Fourier series, operators of Fejer, asymptotic formulas.*