УДК 517.5

Бодра В.В., Новіков О.О., Козаченко Ю.О., Семенова Ю.І., Сипчук Є.Ю.

[1] *асистент каф. вищої математики, Київський національний університет технологій і дизайну*

[2] *канд. фізико-математичних наук, доцент каф. математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[3] *студентка 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[4] *студентка 2 курсу (магістратура) фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[5] *студент 3 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ПОВЕДІНКА ГОЛОВНОГО ЧЛЕНА АСИМПТОТИЧНОЇ РІВНОСТІ ВІДХИЛЕНЬ ОПЕРАТОРІВ ФЕЙЄРА

Розглянуті питання наближення класичними операторами Фейєра функцій, які можна подати у вигляді інтегралів Пуассона.

Ключові слова: *ряди Фур'є, оператори Фейєра, асимптотичні формули*

Стаття присвячена питанням наближення періодичних функцій тригонометричними поліномами, породжуваними лінійними операторами підсумовування рядів Фур'є. Досліджуються питання у рамках екстремальної задачі для метода Фейєра, на класах аналітичних періодичних функцій дійсної змінної, які можна подати у вигляді згорток.

Актуальність теми. Будемо позначати символом L множину $2\pi-$ періодичних функцій, що мають скінчений на періоді інтеграл Лебега. Нехай $f \in L$ і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$

— ряд Фур'є функції f, де $a_k(f)$, $b_k(f)$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Нехай

$$S_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

– часткова суми ряду Фур'є порядку n. Окрім сум Фур'є цікавими для наближення аналітичних функцій виявляються суми Валле Пуссена та суми Фейєра.

Суми Валле Пуссена функції $f \in L$ задаються для фіксованого $p \in \mathbb{N}$, $p \leqslant n$ наступним співвідношенням

$$V_{n,p}(f,x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f,x).$$

Суми Валле Пуссена у випадку $p = n$ мають назву сум Фейєра, які можна задати співвідношенням

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f,x). \tag{1}$$

Через $C^q_{\beta,\infty}$, $C^q_\beta H_\omega$, ($q \in (0;1)$, $\beta \in R$, $\omega(t)$ – певний модуль неперервності) позначимо класи неперервних 2π–періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P^q_\beta(t)\, dt,$$

з ядром Пуассона $P^q_\beta(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})$, де для функції $\varphi(x)$ виконана така умова $\operatorname{esssup}|\varphi(x)| \leqslant 1$ або така

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \leqslant \omega(|t' - t''|), \forall t', t'' \in R.$$

Функцію $f(x)$ називають інтегралом Пуассона функції $\varphi(x)$.

Добре відомо [1,с. 31], що множини $C^q_{\beta,\infty}$ і $C^q_\beta H_\omega$, складаються з функцій $f(x)$, які є звуженнями на дійсну ось функцій $F(z)$, аналітичних в області $|\mathrm{Im} z| \leqslant \ln \frac{1}{q}$.

Задачам про наближення класів $C^q_{\beta,\infty}$, $C^q_\beta H_\omega$ присвячено ряд відомих робіт. Відмітимо найбільш важливі роботи цього напряму.

С.М. Нікольський [2] показав, що для верхніх граней відхилень часткових сум Фур'є порядку n на класі інтегралів Пуассона майже всюди обмежених функцій має місце така асимптотична формула

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; S_n\right) \equiv \sup_{f \in C^q_{\beta,\infty}} ||f(x) - S_n(f,x)||_C = \frac{8q^n}{\pi^2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}} + O(1)\frac{q^n}{n},$$

де

$$K(q) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}} \tag{2}$$

— повний еліптичний інтеграл першого роду, величина $O(1)$ рівномірно обмежена відносно $n \in N$. С.Б. Стечкин [3] показав, що залишковий член цієї рівності можна подати у вигляді $O(1)\frac{q^n}{n(1-q)}$, де величина $O(1)$ рівномірно обмежена відносно $n \in N$ та $q \in (0;1)$.

В роботі [4] О.І. Степанець отримав аналогічну асимптотичну формулу для класів $C^q_\beta H_\omega$

$$\mathcal{E}\left(C^q_\beta H_\omega; S_n\right) = \frac{4q^n}{\pi^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}} e_n(\omega) + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)}\omega(1/n),$$

де

$$e_n(\omega) = \theta_\omega \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(2t/n)\sin t dt,$$

$\theta_\omega \in [1/2;1]$, і $\theta_\omega = 1$, якщо $\omega(t)$ – опуклий модуль неперервності.

В.І. Рукасов та С.О. Чайченко [5] для верхніх граней відхилень сум Валле Пуссена на класах $C^q_{\beta,\infty}$ і $C^q_\beta H_\omega$ отримали аналогічні формули:

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{4q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} + O(1)\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{p(1-q^2)}\right), \qquad (3)$$

$$\mathcal{E}\left(C^q_\beta H_\omega; V_{n,p}\right) = \frac{2\theta_\omega q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(\frac{2t}{n-p})\sin t dt +$$

$$+O(1)\omega(\frac{1}{n-p})\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{p(1-q^2)}\right).$$

А.С. Сердюк [6] показав, що має місце більш загальна рівність

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{p,q} + O(1)\left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^s}\right)\right),$$

де для $p = 1, 2, ..., n$ поведінка константи $K_{q,p}$ визначається наступним співвідношенням, отриманим у роботі [7]:

$$K_{q,p} = 2\frac{1-q^{2p}}{1-q^2}K(q^p), \quad s = s(p) = \begin{cases} 1, & p = 1, \\ 3, & p = 2, 3, ... \end{cases} \qquad (4)$$

і величина $K(q)$ визначена вище співвідношенням (2).

В роботі [8] показано, що має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $q \in (0; q_0]$, $q_0 = 2 - \sqrt{3} \approx 0,267949$. *Тоді при* $n \to \infty$ *виконується рівність*

$$\mathcal{E}(C^q_{0,\infty}, \sigma_n) \equiv \sup_{f \in C^q_{0,\infty}} ||f(x) - \sigma_n(f,x)||_C = \frac{4q}{\pi n(1+q^2)} + O(1)\frac{q^n}{n}, \qquad (5)$$

де величина $O(1)$ *рівномірно обмежена за* n, q.

Можна показати, що асимптотична рівність має місце і для більш довгого проміжку, а саме для $q \in (0; q_0]$, де $q_0 = \sqrt{2 + \sqrt{5} - 2\sqrt{2 + \sqrt{5}}} \approx 0,346$.

Дане повідомлення присвячене наближеним обчисленням величин головного члена асимптотичної рівності для величин

$$\mathcal{E}(C^q_{0,\infty}, \sigma_n) \equiv \sup_{f \in C^q_{0,\infty}} ||f(x) - \sigma_n(f,x)||_C$$

для окремих значень $q \in [q_0; 1)$. На підставі результатів можна зробити висновок, що ця величина не задовольняє рівності (5) і з ростом q зростає істотно швидше, коли q наближається до 1.

Наближені значення головного члена асимптотичної рівності для відхилення сум Фейєра від своїх інтегралів Пуассона

В роботі [8] показано, що для величини

$$\delta_n(f;x) = f(x) - \sigma_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t)\left(\sigma_1^{(1)}\cos\frac{\beta\pi}{2} - \sigma_2^{(1)}\sin\frac{\beta\pi}{2}\right)dt, \quad (6)$$

де для $r \in \mathbb{N}$ величини $\sigma_1^{(r)} = \sigma_1^{(r)}(t,q,n)$, $\sigma_2^{(r)} = \sigma_2^{(r)}(t,q,n)$ задані співвідношеннями

$$\sigma_1^{(r)} = \frac{Z_q^{2(r+1)}(t)}{\prod_{i=1}^r p_i}\sum_{\alpha \subset \overline{r}}(-1)^{(r-|\alpha|)}\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^{n-\Sigma_p^\alpha+r+\nu}\cos(n-\Sigma_p^\alpha+r-\nu)t,$$

$$\sigma_2^{(r)} = \frac{Z_q^{2(r+1)}(t)}{\prod_{i=1}^r p_i}\sum_{\alpha \subset \overline{r}}(-1)^{(r-|\alpha|)}\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^{n-\Sigma_p^\alpha+r+\nu}\sin(n-\Sigma_p^\alpha+r-\nu)t,$$

$|\alpha|$ – кількість елементів множини α, $\Sigma_p^\alpha = \sum_{i\in\alpha} p_i = n-1$, $\Sigma_0^\alpha = 0$.

Для $r=1; p=n; \beta=0$ маємо

$$\sigma_1^{(1)}(t;q)=\frac{qZ_q^4(t)}{n}\left[(1+q^2)\cos t-2q-q^{n+1}[\cos(n+1)t-2q\cos nt+q^2\cos(n-1)t]\right];$$

$$\delta_n(f;x)=f(x)-\sigma_1^{(1)}(x;q)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^q(x+t)\frac{qZ_q^4(t)}{n}\Bigg[(1+q^2)\cos t-2q-$$

$$-q^{n+1}[\cos(n+1)t-2q\cos nt+q^2\cos(n-1)t]\Bigg]dt,$$

Виконуючи обчислення, отримуємо

$$\delta_n(f;x)=\frac{q}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f_0^q(x+t)[(1+q^2)\cos t-2q]}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt+O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}.$$

Тоді

$$\mathcal{E}(C_{0,\infty}^q,\sigma_n)=\sup_{f\in C_{0,\infty}^q}||\delta_n(f;x)||=$$

$$=\sup_{f\in S_M^0}\left|\frac{q}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{(1+q^2)\cos t-2q}{(1-2q\cos t+q^2)^2}-B(q)\right)dt+O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}\right|,$$

де $B(q)$ таке, що на проміжку $t\in[-\pi;\pi]$ для величин

$$\Gamma(t;q)=\frac{(1+q^2)\cos t-2q}{(1-2q\cos t+q^2)^2}$$

виконується $\mathrm{mes}(\Gamma(t;q)-B(q)\leqslant 0)=\mathrm{mes}(\Gamma(t;q)-B(q)\geqslant 0)$.

Для окремих значень $q\in(\sqrt{2+\sqrt{5}-2\sqrt{2+\sqrt{5}}};1)$ спробуємо відшукати такі значення $t_q\leqslant\pi/2$, для яких виконується

$$\Gamma(t_q;q)=\frac{(1+q^2)\cos t_q-2q}{(1-2q\cos t_q+q^2)^2}=\frac{(1+q^2)\cos(t_q+\pi/2)-2q}{(1-2q\cos(t_q+\pi/2)+q^2)^2}=\Gamma(t_q+\frac{\pi}{2};q). \tag{7}$$

У такому випадку

$$\mathcal{E}(C_{0,\infty}^q,\sigma_n)=\frac{2q}{\pi n}\left[\int\limits_0^{t_q}\left(\frac{(1+q^2)\cos t-2q}{(1-2q\cos t+q^2)^2}-\Gamma(t_q;q)\right)dt-\right.$$

$$-\int\limits_{t_q}^{t_q+\pi/2}\left(\frac{(1+q^2)\cos t-2q}{(1-2q\cos t+q^2)^2}-\Gamma(t_q;q)\right)dt+$$

$$\left.+\int\limits_{t_q+\pi/2}^{\pi}\left(\frac{(1+q^2)\cos t-2q}{(1-2q\cos t+q^2)^2}-\Gamma(t_q;q)\right)dt\right]+O(1)\frac{q^n}{n}=$$

$$=\frac{2q}{\pi n}\left(2J(t_q)-2J(t_q-\pi/2)-J(0)-J(\pi)\right)+O(1)\frac{q^n}{n}=$$

$$=\frac{4q}{\pi n}\left(J(t_q)-J(t_q-\pi/2)\right)+O(1)\frac{q^n}{n}.$$

Задача полягає в обчисленні для заданого q наближених значень величин t_q, для яких виконується (7), і обчисленні для таких t_q величин $J(t_q)-J(t_q-\pi/2)$, де

$$J(t)=\int\frac{(1+q^2)\cos t-2q}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt=\frac{\sin t}{(1-2q\cos t+q^2)}.$$

Розпочнемо з випадку

$$q=\sqrt{2+\sqrt{5}-2\sqrt{2+\sqrt{5}}}=0,346014339235825...$$

Підставимо значення q в (10) та виконаємо перетворення. Після округлення отримуємо:

$$\frac{\sin t_q+0,618}{(\sin t_q+1,618)^2}=\frac{0,618-\cos t_q}{(1,618-\cos t_q)^2}.$$

Виконуючи перетворення та обчислення, отримуємо співвідношення, в якому можна скоротити на $(\sin t_q+\cos t_q)$

$$0,618076(\sin t_q+\cos t_q)+\cos t_q\sin t_q(\sin t_q+\cos t_q)=$$

$$=0,618(\sin t_q-\cos t_q)(\sin t_q+\cos t_q).$$

Виконуючи далі перетворення, отримуємо

$$(\cos t_q\sin t_q)^2+1,999848\sin t_q\cos t_q=0.$$

Єдиним розв'язком останньої рівності є розв'язок рівняння

$$\sin t_q\cos t_q=0, t\in(0;\pi).$$

Отримуємо, що для $q = 0,346014339235825...$ єдиним розв'язком рівняння

$$\frac{(1+q^2)(-\sin t_q) - 2q}{(1+2q\sin t_q + q^2)^2} = \frac{(1+q^2)\cos t_q - 2q}{(1-2q\cos t_q + q^2)^2}$$

є $t_q = \pi/2$.

Виконуючи обчислення, отримуємо

$$J(\pi/2) - J(\pi) = 0,893... = \frac{1}{(1+q^2)}.$$

Нехай тепер $q = 0,35$. Виконуючи перетворення, отримуємо рівність

$$314,307015625 + 550,025\sin t_q \cos t_q = 343(\sin t_q - \cos t_q).$$

Застосовуючи заміну $\sin t_q \cos t_q = a$, і рівність

$$(\sin t_q - \cos t_q) = \sqrt{1 - 2\sin t_q \cos t_q},$$

отримуємо рівняння

$$302527,500625a^2 + 581051,43253828125a - 18860,099928906 = 0,$$

яке має розв'язок $a = \sin t_q \cos t_q = 0,03192782362...$. Отже, отримуємо $t_q = 1,53884676679...$. Тоді, $\sin t_q = 0,999489656...; \cos t_q = 0,0319441247...$. Таким чином, для $q = 0,35$, для величин

$$\frac{(1+q^2)\cos(t_q + \pi/2) - 2q}{(1-2q\cos(t_q+\pi/2) + q^2)^2} = 0,548739478025...$$

$$\frac{(1+q^2)\cos t_q - 2q}{(1-2q\cos t_q + q^2)^2} = 0,548739478...$$

має місце співпадіння до 7-го знаку, а виконуючи обчислення отримуємо наступне:

$$J(t_q) - J(t_q + \pi/2) = 0,8909809874...$$

З іншого боку, для $q = 0,35$, маємо

$$\frac{1}{1+q^2} = \frac{1}{1,1225} = \mathbf{0,890}86859688....$$

Отже, робимо висновок, що для $q = 0,35$ компонента головного члена збільшилася приблизно на $0,000112$ по відношенню до того, якою вона мала бути, якщо рівність (5) мала б місце для $q = 0,35$.

За аналогією для $q = 0,36$ знаходимо

$$t_q = 1,46572899...; \sin t = 0,9944855...; \cos t = 0,1048741...$$

Виконуючи обчислення, маємо:

$$J(1,46572899...) - J(1,46572899... + \pi/2) = 0,8866305547...,$$

а величина

$$\frac{1}{1+q^2} = \frac{1}{1,1296} = 0,885269...$$

менша за отриману величину на $0,0014$. Різниця у порівнянні з попереднім випадком зросла.

Продовжимо обчислення. Для $q = 0,37$, отримуємо $t_q = 1,356732....$, $\sin t_q = 0,977175599926823...; \cos t_q = 0,212433158682....$ Виконуючи обчислення, маємо

$$J(t_q) - J(t_q + \pi/2) = 0,883157785...,$$

що не менше, ніж на $0,00357$ перевищує $\frac{1}{1+q^2} = 0,8795848...$

Виконаємо аналогічні обчислення для $q = 0,38$. Отримуємо

$$t_q = 1,3373484567948966...$$

Таким чином, $\sin t_q = 0,972874572325...; \cos t_q = 0,231333236962....$ Виконуючи обчислення, маємо

$$J(t_q) - J(t_q + \pi/2) = 0,8816245...,$$

що не менше ніж на $0,0078$ перевищує $\frac{1}{1+q^2} = 0,87382...$

Продовжуючи обчислення, для $q = 0,39$, отримуємо

$$t_q = 1,2811154217948966....$$

Виконуючи обчислення, маємо

$$J(t_q) - J(t_q + \pi/2) = 0,88087693...,$$

що не менше ніж на $0,012$ перевищує $\frac{1}{1+q^2} = 0,86798021...$

Далі для $q = 0,40$, отримуємо

$$t_q = 1,22881198679...$$

Виконуючи обчислення, маємо

$$J(t_q) - J(t_q + \pi/2) = 0,88125164...,$$

що не менше ніж на $0,019$ перевищує $\frac{1}{1+q^2}=0,8620689655....$

Для $q=0,45$, отримуємо $t_q=1,09701731....$ Виконуючи обчислення, маємо

$$J(t_q)-J(t_q+\pi/2)=0,871798256...,$$

що не менше ніж на $0,04$ перевищує величину $\frac{1}{1+q^2}=0,8316008316....$

Для $q=0,475$, отримуємо $t_q=0,9195....$ Виконуючи обчислення, маємо для такого q

$$J(t_q)-J(t_q+\pi/2)=0,918...,$$

що не менше ніж на $0,1$ перевищує $\frac{1}{1+q^2}=0,81591....$

Для $q=0,5$, отримуємо $t_q=0,8382....$ Виконуючи обчислення, маємо

$$J(t_q)-J(t_q+\pi/2)=0,94365...,$$

що не менше ніж на $0,14$ перевищує $\frac{1}{1+q^2}=0,8.$

Для $q=0,55$, отримуємо $t_q=0,69672....$ Таким чином,

$$J(t_q)-J(t_q+\pi/2)=1,01662...,$$

що не менше ніж на $0,248$ перевищує $\frac{1}{1+q^2}=0,7677543...$

Далі, для $q=0,6$, отримуємо

$$t_q=0,57676489....$$

Виконуючи обчислення, маємо

$$J(t_q)-J(t_q+\pi/2)=1,12378...,$$

що не менше ніж на $0,388$ перевищує $\frac{1}{1+q^2}=0,735294...$

Для $q=0,9$, отримуємо $t_q=0,1062248533974483....$ Виконуючи обчислення, маємо

$$J(t_q)-J(t_q+\pi/2)=4,76592121...,$$

що не менше ніж на $4,2$ перевищує $\frac{1}{1+q^2}=0,552...$

Для $q=0,95$, отримуємо $t_q=0,102391....$ Виконуючи обчислення, маємо

$$J(t_q)-J(t_q+\pi/2)=7,7346972...,$$

що не менше ніж на $7,2$ перевищує $\frac{1}{1+q^2}=0,5256...$

Для $q=0,975$, отримуємо $t_q=0,04976....$ Виконуючи обчислення, маємо

$$J(t_q)-J(t_q+\pi/2)=15,881...,$$

що не менше ніж на $15,3$ перевищує $\frac{1}{1+q^2}=0,512656...$

Поєднуючи отримані обчислення, природно зробити висновок, що при $n \to \infty$ виконується рівність

$$\mathcal{E}(C^q_{0,\infty}, \sigma_n) \equiv \sup_{f \in C^q_{0,\infty}} ||f(x) - \sigma_n(f, x)||_C = \frac{4q}{\pi n(1+q^2)} + O(1)\frac{q^n}{n}$$

лише для $q \in \left(0; \sqrt{2+\sqrt{5} - 2\sqrt{2+\sqrt{5}}}\right]$.

Література

1. *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. — К. : Наук. думка, 1981. — 340 с.
2. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем / С.М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — Т. 10, № 3. — С. 207—256.
3. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1980. — Т. 45. — С. 126—151.
4. *Степанец А.И.* Приближение суммами Фурье интегралов Пуассона непрерывных функций / А.И. Степанец // Докл. РАН. — 2000. — Т. 373, № 2. — С. 171—173.
5. *Рукасов В.І.* Про наближення неперервних періодичних функцій сумами Валле–Пуссена / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко // Доп. НАН України. — 2002. — № 3. — С. 35—39.
6. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена / А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 1. — С. 97-107.
7. *В.В. Савчук* Наближення аналітичних функцій сумами Валле Пуссена / М.В. Савчук, С.О. Чайченко // Мат. студії. – 2010. – 34, (2). – С. 207–219.
8. *Novikov O.O.* Approximation of periodic analytic functions by Fejer sums / O.O. Novikov, Rovenska O.G. // Mat. Stud. — 2017. — 47. — P. 196–201.

Bodra V., Novikov O., Kozachenko Yu., Semenova Yu., Sypchuk Ye.
Kyiv National University of Technologies and Design, Kyiv, Ukraine,
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine

The behavior of the main member of asymptotic equality of deviations of operators of Fejer

The questions of an approximation of functions, which can be presented in the form of Poisson integrals, have been considered.

Keywords: *Fourier series, operators of Fejer, asymptotic formulas.*