УДК 517.5

Стьопкін А.В., Шулик Т.В., Ровенська О.Г., Чала В.В., Шажко С.П.

[1] *канд. фізико-математичних наук, ст. викл. каф. МНМ та МНІ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *канд. педагогічних наук, ст. викл. каф. математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[3] *канд. фізико-математичних наук, доцент каф. вищої математики, ДДМА*

[4] *студентка 2 курсу (магістратура) фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[5] *студент 2 курсу (магістратура) фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ІНТЕГРАЛІВ ПУАССОНА НЕПОВНИМИ ОПЕРАТОРАМИ ФЕЙЄРА

Отримані асимптотичні формули для верхніх граней відхилень лінійних операторів на класах інтегралів Пуассона.

Ключові слова: *інтеграли Пуассона, оператори Фейєра*

Нехай L — множина сумовних 2π–періодичних функцій, $f \in L$ і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x)$$

— ряд Фур'є функції f. Позначимо через $S_n(f;x)$ часткові суми ряду Фур'є, тоді для фіксованого $p \in \mathbb{N}$, $p \leqslant n$ суми Валле Пуссена функції $f \in L$ задаються наступним співвідношенням

$$V_{n,p}(f,x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f,x).$$

Поліноми наближення Валле Пуссена у випадку $p = n$ мають назву сум Фейєра, які можна задати співвідношенням

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f,x). \tag{1}$$

Наслідуючи О.І. Степанця [1], позначимо $C^q_{\beta,\infty}$ – класи неперервних 2π–періодичних функцій $f(x)$, які задаються наступною згорткою

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t)P^q_\beta(t)\ dt,$$

де $P_\beta^q(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})$ – ядро Пуассона, а $\varphi \in S_M^0$, тобто функція $\varphi(x)$ має нульове середнє значення на періоді і $\operatorname{esssup}|\varphi(x)| \leqslant 1$.

Задача про наближення класів $C_{\beta,\infty}^q$ лінійними методами має історію. С.М. Нікольський [2] та С.Б. Стечкин [3] показали, що для верхніх граней відхилень часткових сум Фур'є на класі інтегралів Пуассона має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^q; S_n\right) = \frac{8q^n}{\pi^2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}} + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)},$$

де величина $O(1)$ рівномірно обмежена відносно $n \in \mathbb{N}$ та $q \in (0;1)$.

В роботі [1] О.І. Степанець отримав аналогічну асимптотичну формулу для класів $C_\beta^q H_\omega$. В.І. Рукасов та С.О. Чайченко [4] для верхніх граней відхилень сум Валле Пуссена на класах $C_{\beta,\infty}^q$ і $C_\beta^q H_\omega$ отримали аналогічні асимптотичні формули. Зокрема, у цій роботі показано, що

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^q; V_{n,p}\right) = \frac{4q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} + O(1)\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{p(1-q^2)}\right).$$

А.С. Сердюк [5] показав, що має місце більш загальна рівність

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^q; V_{n,p}\right) = \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{p,q} + O(1)\left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^s}\right)\right),$$

де для $p = 1, 2, ..., n$ поведінка константи $K_{q,p}$ визначається наступним співвідношенням, отриманим у роботі [6]

$$K_{q,p} = 2\frac{1-q^{2p}}{1-q^2}K(q^p), \quad s = s(p) = \begin{cases} 1, & p = 1, \\ 3, & p = 2, 3, ... \end{cases}$$

і величина $K(q)$ визначена вище співвідношенням (2).

В даній роботі отримані асимптотичні рівності для верхніх граней відхилень на класах $C_{\beta,\infty}^q$ тригонометричних поліномів

$$\widetilde{\sigma}_n(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-2} S_k(f;x), \tag{2}$$

які дещо відрізняються від класичних сум Фейєра $\sigma_n(f,x)$.

Теорема 1. *Нехай $q \in (0;1)$. Тоді для $n \to \infty$ має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(C_{1,\infty}^q, \widetilde{\sigma}_n) = \frac{2}{\pi n}\left(\frac{2q}{1-q^2} + \ln\frac{1+q}{1-q}\right) + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}. \tag{3}$$

Якщо $q \in (0;1/2)$, *то для* $n \to \infty$ *має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(C^q_{0,\infty}, \widetilde{\sigma}_n) = \frac{2}{\pi n}\left(\frac{2q}{1+q^2} - \mathrm{arctg} q\right) + O(1)\frac{q^n}{n}. \tag{4}$$

Доведення. На підставі співвідношення (2) маємо

$$\delta_n(f;x) \equiv f(x) - \widetilde{\sigma}_n(f;x) =$$

$$= \frac{1}{n}\left[nf(x) - \sum_{k=0}^{n-2} S_k(f;x)\right] = \frac{1}{n}\left[f(x) + \sum_{k=0}^{n-2}(f(x) - S_k(f;x))\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_0(x+t)\sum_{k=0}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})dt + \sum_{k=0}^{n-2}\rho_k(f;x)\right], \tag{5}$$

де

$$\rho_m(f;x) \equiv f(x) - S_m(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t) \sum_{k=m+1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t)\sum_{k=0}^{\infty} q^{k+m+1}\cos((k+m+1)t + \frac{\beta\pi}{2})dt =$$

$$= \frac{q^{m+1}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t)\left(\cos((m+1)t + \frac{\beta\pi}{2})\sum_{k=0}^{\infty} q^k \cos kt - \right.$$

$$\left. - \sin((m+1)t + \frac{\beta\pi}{2})\sum_{k=0}^{\infty} q^k \sin kt\right) dt.$$

Застосовуючи формули роботи [6, с.123],

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \cos kt = \frac{1 - q\cos t}{1 - 2q\cos t + q^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k \sin kt = \frac{q \sin t}{1 - 2q\cos t + q^2},$$

отримуємо

$$\rho_m(f;x) = \frac{q^{m+1}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t)\left\{\frac{1 - q\cos t}{1 - 2q\cos t + q^2}\cos((m+1)t + \frac{\beta\pi}{2}) - \right.$$

$$\left. - \frac{q\sin t}{1 - 2q\cos t + q^2}\sin((m+1)t + \frac{\beta\pi}{2})\right\}dt. \tag{6}$$

Тоді на підставі (5), (6), маємо

$$f(x)-\widetilde{\sigma}_n(f;x)=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^q(x+t)\sum_{k=0}^{\infty}q^k\cos(kt+\frac{\beta\pi}{2})dt+\sum_{k=0}^{n-2}\rho_k(f;x)\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^q(x+t)\left\{\frac{1-q\cos t}{1-2q\cos t+q^2}\cos\frac{\beta\pi}{2}-\frac{q\sin t}{1-2q\cos t+q^2}\sin\frac{\beta\pi}{2})\right\}dt+\right.$$

$$+\sum_{m=0}^{n-2}\frac{q^{m+1}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^q(x+t)\left\{\frac{1-q\cos t}{1-2q\cos t+q^2}\cos((m+1)t+\frac{\beta\pi}{2})-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{q\sin t}{1-2q\cos t+q^2}\cos((m+1)t+\frac{\beta\pi}{2})\right\}dt\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^q(x+t)\left\{\frac{1-q\cos t}{1-2q\cos t+q^2}\cos\frac{\beta\pi}{2}-\frac{q\sin t}{1-2q\cos t+q^2}\sin\frac{\beta\pi}{2})\right\}dt+\right.$$

$$+\sum_{m=1}^{n-1}\frac{q^{m}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^q(x+t)\times$$

$$\left.\times\left\{\frac{1-q\cos t}{1-2q\cos t+q^2}\cos(mt+\frac{\beta\pi}{2})-\frac{q\sin t}{1-2q\cos t+q^2}\cos(mt+\frac{\beta\pi}{2})\right\}dt\right]=$$

$$=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{q^{m}}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^q(x+t)\times$$

$$\left\{\frac{1-q\cos t}{1-2q\cos t+q^2}\cos(mt+\frac{\beta\pi}{2})-\frac{q\sin t}{1-2q\cos t+q^2}\cos(mt+\frac{\beta\pi}{2})\right\}dt.$$

Застосовуючи прийоми роботи [6, с.123], отримуємо

$$\delta_n(f;x)=\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f_\beta^q(x+t)}{1-2q\cos t+q^2}\left[\Sigma_1\cos\frac{\beta\pi}{2}+\Sigma_2\sin\frac{\beta\pi}{2}\right]dt, \qquad (7)$$

де

$$\Sigma_1=\sum_{k=0}^{n-1}q^k[\cos kt-q\cos(k-1)t]=\frac{1}{1-2q\cos t+q^2}[1-2q\cos t+$$

$$+q^2\cos 2t+q^n(-\cos nt+2q\cos(n-1)t-q^2\cos(n-2)t)],$$

$$\Sigma_2=\sum_{k=0}^{n-1}q^k[q\sin(k-1)t-\sin kt]=\frac{1}{1-2q\cos t+q^2}[-2q\sin t+$$
$$+q^2\sin 2t+q^n(\sin nt+2q\sin(n-1)t-q^2\sin(n-2)t)].$$

Тоді, враховуючи, що

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{(1-2q\cos t+q^2)^2}=O(1)(1-q)^{-3},$$

на підставі (7) маємо

$$\delta_n(f;x)=\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_\beta^q(x+t)}{(1-2q\cos t+q^2)^2}\left[[1-2q\cos t+q^2\cos 2t]\cos\frac{\beta\pi}{2}-\right.$$
$$\left.-[-2q\sin t+q^2\sin 2t]\sin\frac{\beta\pi}{2}\right]dt+O(1)\frac{q^n}{(1-q)^3n}.$$

Нехай $\beta=1$. Тоді

$$\delta_n(f;x)=\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_1^q(x+t)[-2q\sin t+q^2\sin 2t]}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt+O(1)\frac{q^n}{(1-q)^3n}.$$

Отже, в силу інваріантості класу $C_{1,\infty}^q$ відносно зсуву за аргументом

$$\sup_{f\in C_{1,\infty}^q}||\delta_n(f;x)||=\sup_{f\in S_M^0}\left|\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)[-2q\sin t+q^2\sin 2t]}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt+\frac{O(1)q^n}{(1-q)^3n}\right|=$$
$$=\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(t)(-2q\sin t+q^2\sin 2t)}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt+O(1)\frac{q^n}{(1-q)^3n}.$$

де

$$\varphi(t)=\mathrm{sign}(-2q\sin t+q^2\sin 2t)=\begin{cases}-1, & t\in(0;\pi),\\ 1, & t\in(-\pi;0).\end{cases}$$

Оскільки $\varphi\in S_M^0$, то отримуємо

$$\mathcal{E}(C_{1,\infty}^q,\widetilde{\sigma}_n)=\frac{2}{\pi n}\int_{0}^{\pi}\frac{2q\sin t-q^2\sin 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt+O(1)\frac{q^n}{(1-q)^3n}. \qquad (8)$$

Обчислимо інтеграл. Застосовуючи заміну $z = \cos t$, маємо

$$\int \frac{2q\sin t - q^2 \sin 2t}{(1-2q\cos t + q^2)^2} dt = -\int \frac{2q - 2q^2 z}{(1-2qz+q^2)^2} dz =$$

$$= -\frac{(1-q^2)}{2}(1-2q\cos t+q^2)^{-1} + \frac{1}{2}\ln(1-2q\cos t+q^2).$$

Таким чином,

$$\int\limits_0^\pi \frac{2q\sin t - q^2 \sin 2t}{(1-2q\cos t + q^2)^2} dt = \frac{2q}{(1-q^2)} + \ln\frac{(1+q)}{(1-q)}.$$

Отже, на підставі (8) отримуємо (3).

Нехай тепер $\beta = 0$. Тоді для $f_0^q \in S_M^0$

$$\delta_n(f;x) = \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_0^q(x+t)\left(I + \frac{1-2q\cos t + q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}\right) dt + O(1)\frac{q^n}{(1-q)^3 n},$$

де I таке, що $\mathrm{mes}T(I + \frac{1-2q\cos t+q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2} \geqslant 0) = \mathrm{mes}T(I + \frac{1-2q\cos t+q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2} \leqslant 0)$. Відшукаємо проміжки монотонності функції

$$\Gamma(t;q) = \frac{1-2q\cos t + q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2},$$

Оскільки

$$\left(\frac{1-2q\cos t + q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}\right)' = \frac{2q\sin t(-1+3q^2-2q^3\cos t)}{(1-2q\cos t+q^2)^3},$$

то на проміжку $(0;\pi)$ екстремуми функції $\Gamma(t;q)$ задовольняють умову

$$\cos t = \frac{-1+3q^2}{2q^3}.$$

Оскільки для $q \in (0;1/2)$ виконується

$$\frac{-1+3q^2}{2q^3} < -1,$$

то для $q \in (0;1/2)$ на проміжку $[-\pi;0]$ функція $\Gamma(t;q)$ зростає, а на проміжку $[0;\pi]$ спадає. Так, що для $q \in (0;1/2)$, функція

$$\Gamma(t;q) - \Gamma(\frac{\pi}{2};q) = \frac{1-2q\cos t + q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2} - \frac{1-q^2}{(1+q^2)^2}$$

додатна на $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ і від'ємна на $(-\pi;\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2};\pi)$. Тому для $q\in(0;1/2)$ виконується $f_0^q(x)=\varphi(t)=\mathrm{sign}(\Gamma(t;q)-\Gamma(\frac{\pi}{2};q))\in S_M^0$ і

$$\mathcal{E}(C_{0,\infty}^q,\widetilde{\sigma}_n)=\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)(\Gamma(t;q)-\Gamma(\frac{\pi}{2};q))dt+O(1)\frac{q^n}{n}=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\Gamma(t;q)-\Gamma(\frac{\pi}{2};q)|dt+O(1)\frac{q^n}{n}=\frac{2}{\pi n}\int\limits_{0}^{\pi}|\Gamma(t;q)-\Gamma(\frac{\pi}{2};q)|dt+O(1)\frac{q^n}{n}=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\Gamma(t;q)dt-\frac{2}{\pi n}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\Gamma(t;q)dt+O(1)\frac{q^n}{n}=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\Bigg[\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{(1-2q\cos t+q^2)}dt-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{(1+2q\sin t+q^2)}-$$

$$-2q^2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 tdt}{(1-2q\cos t+q^2)^2}+2q^2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 tdt}{(1+2q\sin t+q^2)^2}\Bigg]+O(1)\frac{q^n}{n}. \qquad (7)$$

Виконуючи обчислення, отримуємо

$$\int\frac{dt}{(1-2q\cos x+q^2)}=\frac{2}{(1-q^2)}\mathrm{arctg}\frac{1+q}{1-q}t,$$

$$\int\frac{dt}{(1+2q\sin x+q^2)}=\frac{2}{(1-q^2)}\mathrm{arctg}\left(\frac{1+q^2}{1-q^2}t+\frac{2q}{1-q^2}\right),$$

$$\int\frac{\sin^2 tdt}{(1-2q\cos t+q^2)^2}=$$

$$=\frac{-\mathrm{tg}\frac{t}{2}}{q[(1+q)^2\mathrm{tg}^2\frac{t}{2}+(1-q)^2]}-\frac{1}{2q^2}\frac{t}{2}+\frac{1+q^2}{2q^2(1-q^2)}\mathrm{arctg}\frac{1+q}{1-q}\mathrm{tg}\frac{t}{2},$$

$$\int\frac{\cos^2 tdt}{(1+2q\sin t+q^2)^2}=$$

$$=\frac{-(1+q^2+2q\mathrm{tg}\frac{t}{2})}{q(1+q^2)^2(\mathrm{tg}^2\frac{t}{2}+\frac{4q}{1+q^2}\mathrm{tg}\frac{t}{2}+1)}+\frac{1+q^2}{2q^2(1-q^2)}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\frac{t}{2}(1+q^2)+2q}{1-q^2}+\frac{-t}{4q^2}.$$

Застосовуючи отримане і знову виконуючи обчислення, маємо

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(1-2q\cos t+q^2)} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(1+2q\sin t+q^2)} = \frac{4}{1-q^2}\operatorname{arctg} q,$$

$$2q^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t dt}{(1-2q\cos t+q^2)^2} - 2q^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t dt}{(1+2q\sin t+q^2)^2} = \frac{2q}{1+q^2} - \frac{2(1+q^2)}{1-q^2}\operatorname{arctg} q.$$

Отже на підставі (7) отримуємо (4). Терема доведена.

Література

1. *Степанец А.И.* Решение задачи Колмогорова-Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сборник. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113—138.
2. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — Т. 10, № 3. — С. 207—256.
3. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1980. — Т. 145. — С. 126—151.
4. *Рукасов В.І.* Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле-Пуссена / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 12. — С. 1653—1668.
5. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 1. — С. 97—107.
6. *Савчук В.В.* Наближення аналітичних функцій сумами Валле Пуссена / М.В. Савчук, С.О. Чайченко // Мат. студії. – 2010. – 34, (2). – С. 207–219.
7. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.

Stepkin A., Shulyk T., Rovenska O., Chala V., Shazhko S.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine
Donbas State Engineering Academy, Kramatorsk, Ukraine

The approximation of classes of Poisson integrals with the Fejer operators

The asymptotic formulas for upper bounds of deviations of linear operators on the classes of Poisson integrals have been received.

Keywords: *Poisson integrals, Fejer operators*