

<sup>1</sup> канд. фізико-математичних наук, доцент каф. математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»

<sup>2</sup> студент 2 курсу (магістратура) фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»

e-mail: kadubovs@ukr.net, kalinichenkoddpu@ukr.net

## ПЕРЕРАХУВАННЯ ДВОКОЛЬОРОВИХ ХОРДОВИХ $O$ -ДІАГРАМ РОДУ 1, ЯКІ МАЮТЬ ДВА ЧОРНИХ (АБО СІРИХ) ЦИКЛИ, ВІДНОСНО ДІЇ ГРУПИ ДІЕДРА

Для натуральних  $n \geq 4$  встановлено формули підрахунку числа нееквівалентних 2-кольорових хордових  $O$ -діаграм (з  $n$  хордами), які мають лише два сірих (чорних) та  $(n - 3)$  чорних (відповідно сірих) циклів відносно дії дієдральної групи (порядку  $2n$ ). Крім того, для початкових  $4 \leq n \leq 7$  в явному вигляді наведено всі неізоморфні та нееквівалентні діаграми із зазначених класів, а для  $4 \leq n \leq 24$  — точні значення числа неізоморфних та відповідно нееквівалентних таких діаграм.

**Ключові слова:** 2-кольорова хордова  $O$ -діаграма з  $n$  хордами, род діаграми, цикл діаграми, група дієдра.

### Вступ

Нагадаємо, що хордовою діаграмою або, коротко,  $n$ -діаграмою називають конфігурацію на площині, що складається з кола,  $2n$  точок на ньому (які є вершинами правильного  $2n$ -кутника) та  $n$  хорд, що сполучають вказані точки. Хордові діаграми називають *ізоморфними*, якщо одну можна одержати з іншої в результаті повороту. Діаграми називають *еквівалентними*, якщо їх можна сумістити за допомогою повороту, дзеркального відбиття, або ж їх композиції.

Питаннями переліку певних класів хордових  $n$ -діаграм (відносно дії циклічної групи порядку  $2n$  та дієдральної групи порядку  $4n$ ) займалась ціла низка відомих математиків: T.R.S. Walsh, A.V. Lehman, J. Riordan, J. Harer, D. Zagier. Серед сучасників слід виділити авторів робіт [7], [2], [8], [5], [1].

Задачі про підрахунок числа неізоморфних та нееквівалентних  $n$ -діаграм були повністю розв'язані у 1997–1998 рр. в роботах [7], [5], [2], [8]. Формули для підрахунку числа неізоморфних *планарних* (роду 0), *тороїдальних* (роду 1)  $n$ -діаграм та  $2t$ -діаграм *максимального роду*  $t$  було встановлено у 2000 р. в роботі [2]. Причому задача про підрахунок числа нееквівалентних діаграм *максимального роду* була повністю розв'язана лише у 2017 р. в роботі [6].

Крім того, слід констатувати, що одержання явних формул для підрахунку числа неізоморфних (а тому і нееквівалентних), зокрема двокольорових,  $n$ -діаграм фіксованого роду виявилось досить складною задачею і в загальному випадку до сьогодні нерозв'язаною проблемою.

Для двокольорових діаграм найбільш вагомими є наступні результати: задачі про підрахунок числа неізоморфних та нееквівалентних  $O$ - і  $N$ -діаграм (відповідно) повністю розв'язано в 2010 р. у роботі [11];

формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних  $O$ -діаграм ( $N$ -діаграм), які мають точно один цикл певного кольору (чорний або ж сірий) одержано в 2010 та 2012 рр. у роботах [12] і [13] відповідно;

формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних планарних  $O$ -діаграм (з  $n$  хордами) було встановлено у 2000 р. в роботі [1]; проте питання про узагальнення цієї задачі на випадок фіксованого числа чорних (або ж сірих) циклів було повністю розв'язано лише у 2014 р. в роботі [14];

задача про підрахунок числа неізоморфних  $O$ -діаграм максимального роду (з одним чорним та одним сірим циклом) була розв'язана у 2006 р. в роботі [10], а про число нееквівалентних таких діаграм — лише у 2015 р. в [15];

формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних  $O$ -діаграм (з  $n$  хордами) роду 1, які мають лише один чорний (або ж сірий) цикл, одержано в 2016 р. у роботі [16].

Проте навіть для випадку  $O$ -діаграм (з  $n$  хордами) роду 1, які мають точно  $k > 1$  чорних (або ж сірих) та  $l = n - 1 - k > 1$  сірих (відповідно чорних) циклів питання залишається відкритим.

Встановленню формул для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних  $O$ -діаграм (з  $n$  хордами) роду 1, які мають точно два сірих (або ж чорних) цикли й присвячена дана стаття. А її основною метою — виклад одержаних результатів, анонсованих авторами в роботах [17] і [18].

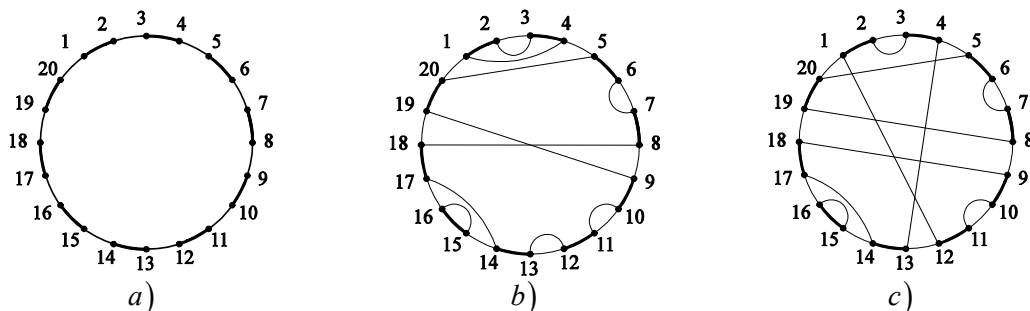
## 1. Основні поняття та попередні відомості

**Означення 1.** Коло з  $2n$  точками на ньому (що є вершинами правильного  $2n$ -кутника), дуги якого по чергово розфарбовані у два кольори (чорний і сірий) та фіксованою нумерацією вершин за годинниковою стрілкою, будемо називати двокольоровим  $2n$ -шаблоном — рис. 1 а).

2-кольоровою хордовою  $n$ -діаграмою будемо називати  $n$ -діаграму, побудовану на основі двокольорового  $2n$ -шаблону.

**Означення 2.** 2-кольорову  $n$ -діаграму, яка не містить (містить) хорди, що сполучає вершини з номерами однакової парності, називають  $O$ -діаграмою ( $N$ -діаграмою) — рис. 1 с) (рис. 1 б)).

**Означення 3.** «Чорним» («сірим») циклом 2-кольорової діаграми називатимемо послідовність хорд та чорних (сірих) дуг, які утворюють гомеоморфний образ (орієнтованого) кола – рис. 1 б) – с).



**Рис. 1:**

- a) двокольоровий 20-шаблон;
- b)  $N$ -діаграма (з 10 хордами), яка має 7 сірих та 3 чорних циклів;
- c)  $O$ -діаграма (з 10 хордами), яка має 6 сірих та 3 чорних циклів

Якщо не приймати до уваги кольори, то кожен чорний та сірий цикл 2-кольорової  $O$ -діаграми співпадає з відповідним циклом непофарбованої діаграми. Тоді наслідуючи [2], природним чином визначається рід  $O$ -діаграми

**Означення 4.** Родом 2-кольорової  $O$ -діаграми з  $n$  хордами будемо називати ціле число  $g$ , яке визначається рівністю

$$2g = n + 1 - (k + l), \tag{1}$$

де  $k$  і  $l$  – число чорних та (відповідно) сірих циклів діаграми.

**Означення 5.** Множину  $O$ -діаграм з  $n$  хордами (побудованих на 2-кольоровому  $2n$ -шаблоні), які мають точно  $k$  чорних (сірих) та  $l$  сірих (відповідно чорних) циклів будемо позначати  $\mathfrak{S}_{k,l}^{n,g}$ , де  $g$  – рід діаграми.

## 2. Основна частина

### 2.1. Число діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$ та його характеристичні підкласи

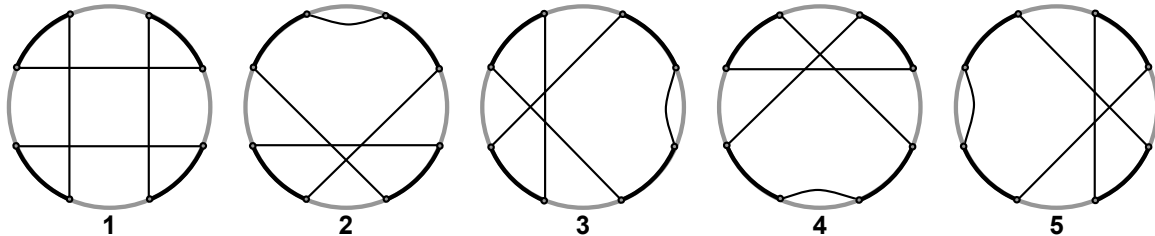
З урахуванням результатів роботи [17], у 1997 р. в роботі [9, С. 4] вперше встановлено рекурентні формули, за допомогою яких є принципово можливим підрахунок числа діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{k,l}^{n,g}$  ( $2g = n + 1 - k - l$ ). Крім того, для початкових  $g = 0; 1; 2; 3$  в [9, С. 8-9] встановлено явні формули, які пізніше також були одержані та уточнені й в [4, С. 833], а в роботі [3, С. 888] – для цілих  $g \geq 0$  запропоновано іншу рекурентну формулу. Так, наприклад, для випадку  $g = 1$  в роботі [4] наведено наступну формулу

$$t(n; k, l) = \left| \mathfrak{S}_{k,l}^{n,1} \right| = \frac{1}{3!} \cdot C_{n+1}^2 \cdot C_{n-1}^{k-1} \cdot C_{n-1}^{l-1}, \tag{2}$$

звідки маємо, що число  $t(n) = t(n; n - 3, 2)$  діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$  можна знайти за формулою

$$t(n) = \frac{(n + 1) \cdot n \cdot (n - 1)^2 \cdot (n - 2) \cdot (n - 3)}{72} = \frac{5}{3}(n - 1)C_{n+1}^5. \quad (3)$$

**Приклад 1.** При  $n = 4$  існує лише *п'ять* діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{2;2}^{5,1}$  – рис. 2.



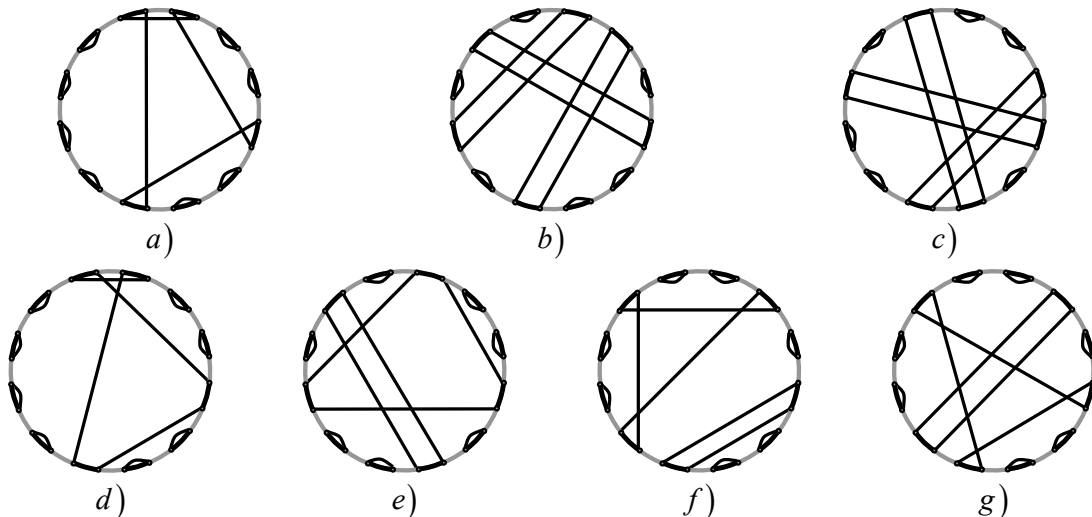
**Рис. 2:** всі діаграми з класу  $\mathfrak{S}_{2;2}^{5,1}$

**Зауваження 1.** Оскільки діаграми з класу  $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$  (крім 2 сірих циклів) мають точно  $k = n - 3$  чорних циклів (які містять всі  $n$  чорних дуг двокольорового  $2n$ -шаблону), а  $3 = (3 + 0) = (2 + 1) = (1 + 1 + 1)$ , то кожна з таких діаграм може мати лише один з наступних наборів чорних циклів:

або один 4-цикл (довжини 4) та  $(n - 4)$  1-циклів (довжини 1) – рис. 3 а), d);

або один 3-цикл, один 2-цикл та  $(n - 5)$  1-циклів – рис. 3 e), f), g);

або три 2-цикли та  $(n - 6)$  1-циклів – рис. 3 b), c).



**Рис. 3:** типові представники характеристичних підкласів  $A, B, C, D, E, F, G$  класу  $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$

Таким чином, всі діаграми з класу  $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$  умовно можна поділити на сім характеристичних підкласів –  $A, B, C, D, E, F$  і  $G$ , типові представники яких зображено на рис. 3 а), b), c), d), e), f) і g) відповідно.

**2.2. Ілюстративні приклади до числа нееквівалентних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$  для початкових  $n$**

Нижче для натуральних  $n = 4; 5; 6$  в явному вигляді наведено всі неізоморфні діаграми з відповідних класів  $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$ .



Рис. 4: всі неізоморфні діаграми з класу  $\mathfrak{S}_{1;2}^{4,1}$

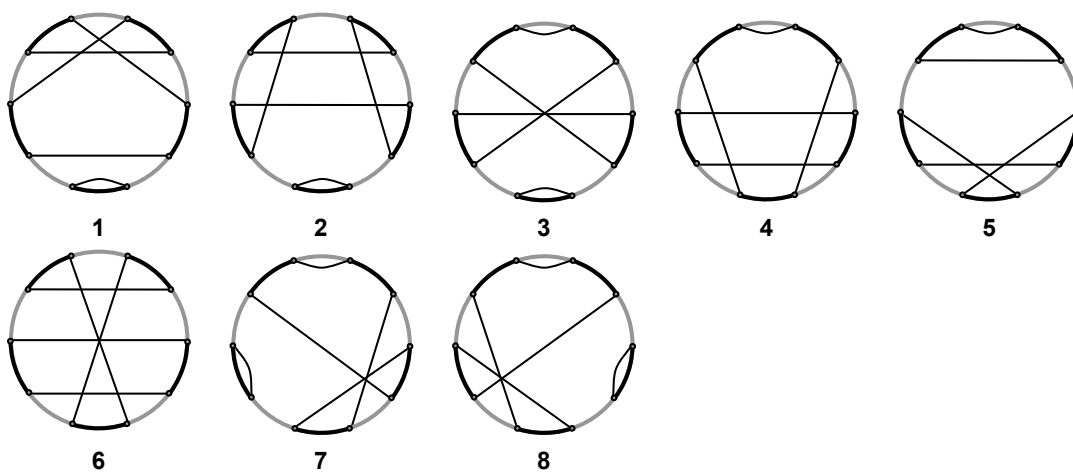


Рис. 5: всі неізоморфні діаграми з класу  $\mathfrak{S}_{2;2}^{5,1}$

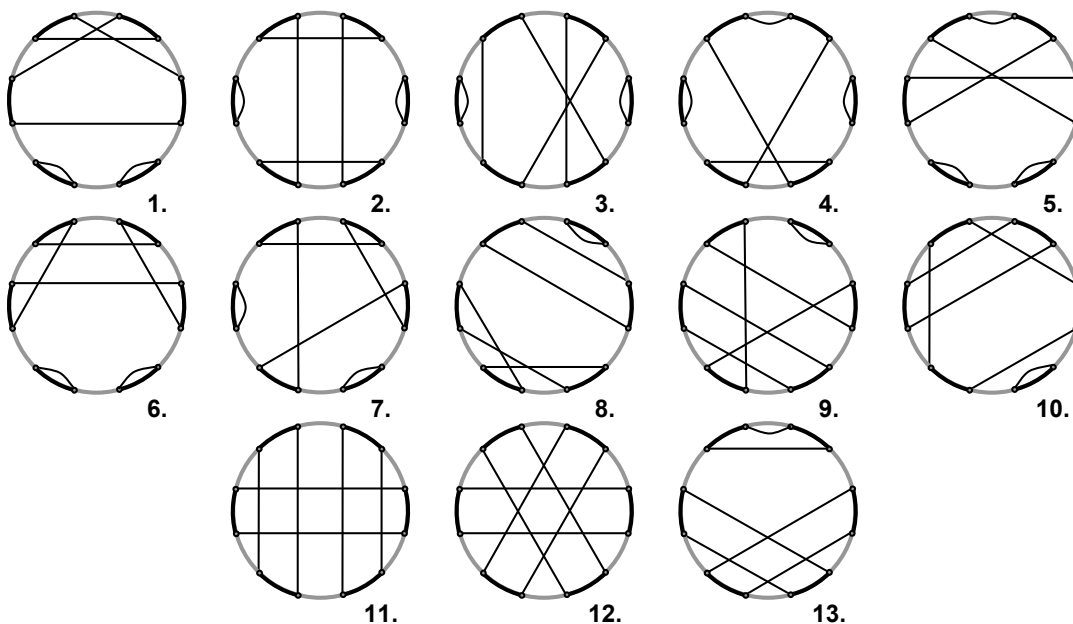


Рис. 6: всі неізоморфні «симетричні» діаграми з класу  $\mathfrak{S}_{3;2}^{6,1}$

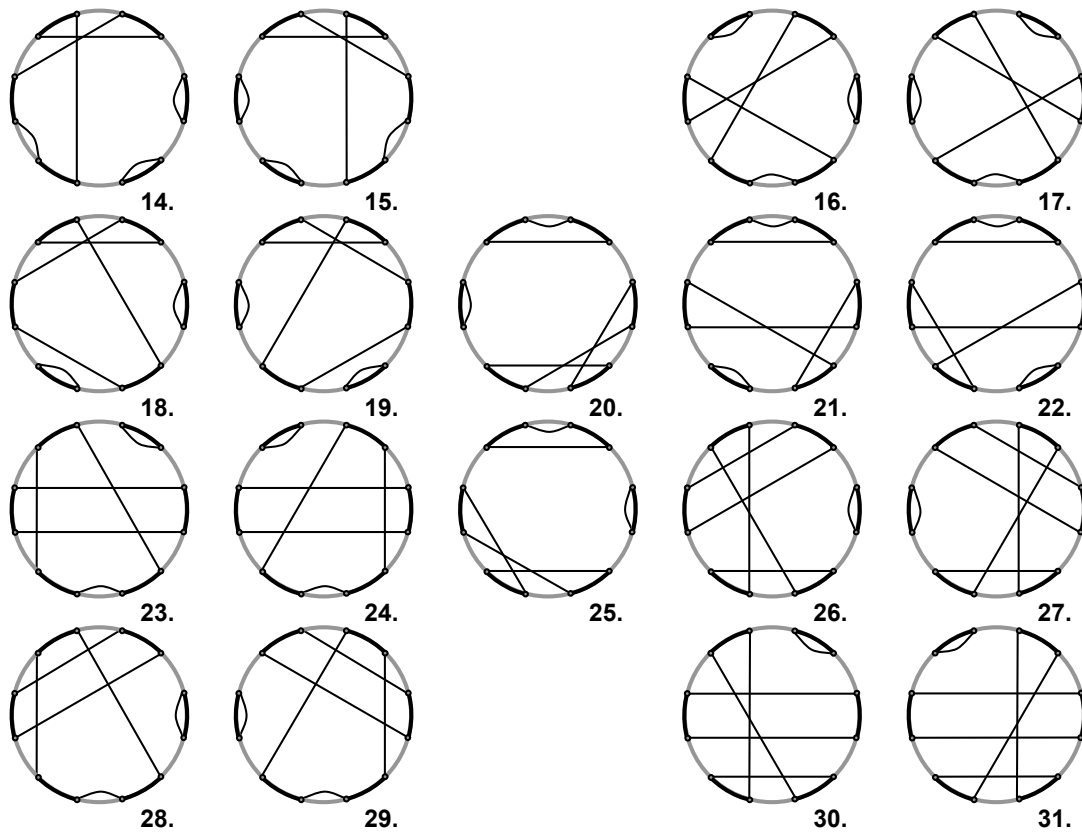


Рис. 7: всі неізоморфні «не симетричні» діаграми з класу  $\mathfrak{S}_{3;2}^{6,1}$

Не важко бачити, що:

у випадку  $n = 4$  (рис. 4 вище) всі неізоморфні (відносно повороту) діаграми є також і нееквівалентними (відносно дії дієдральної групи), тобто існує лише 2 нееквівалентні діаграми з класу  $\mathfrak{S}_{1;2}^{4,1}$ ;

у випадку  $n = 5$  (рис. 5) серед 8 неізоморфних діаграми 7 і 8 є еквівалентними, а тому існує лише 7 нееквівалентних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{2;2}^{5,1}$ ;

у випадку  $n = 6$ : всі неізоморфні «симетричні» (відносно повороту) діаграми є також і нееквівалентними (відносно дії дієдральної групи) — рис. 6; серед 18 неізоморфних «не симетричних» діаграм, зображених на рис. 7, діаграми 14 і 15, 16 і 17, 18 і 18, 21 і 22, 23 і 24, 26 і 27, 28 і 29, 30 і 31 та 20 і 25 є еквівалентними. І тому існує лише  $31 - 18 + 9 = 22$  нееквівалентних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{3;2}^{6,1}$ .

### 2.3. Число неізоморфних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$

За лемою Бернсайда (див. напр. [2], [11], [12]) число  $t^*(n)$  неізоморфних (нееквівалентних відносно дії циклічної групи порядку  $n$ ) діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$  можна знайти за допомогою співвідношення

$$t^*(n) = \frac{1}{n} \left( t(n) + \sum_{i|n, i \neq n} \phi \left( \frac{n}{i} \right) \cdot \rho(n, i) \right), \quad (4)$$

де  $t(n) = \left| \mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1} \right|$ ;  $\phi(q)$  — функція Ейлера (кількість натуральних менших за  $q$  чисел, взаємнопростих із ним), а  $\rho(n, i)$  — число тих діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$ , які самосуміщуються при повороті (за годинниковою стрілкою) на кут  $\omega(n, i) = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i = 2\pi \cdot \frac{i}{n}$ .

Очевидно, що для дільників  $i \neq n$  числа  $n$  кут  $\omega(n, i) \leq \pi$ . Більше того, поклавши  $j = \frac{n}{i}$ , співвідношення (4) можна подати у вигляді

$$t^*(n) = \frac{1}{n} \left( t(n) + \sum_{j|n, j \neq 1} \phi(j) \cdot \rho\left(n, \frac{n}{j}\right) \right), \quad (5)$$

де  $\rho\left(n, \frac{n}{j}\right)$  — число тих діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$ , які самосуміщуються при повороті (за годинниковою стрілкою) на кут  $\omega\left(n, \frac{n}{j}\right) = \frac{2\pi}{j}$ .

**Теорема 1.** Для натуральних  $n \geq 4$  число  $t^*(n)$  неізоморфних (нееквівалентних відносно дії циклічної групи порядку  $n$ ) діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$  можна обчислити за формулою

$$t^*(n) = \frac{1}{n} \left( \frac{5}{3}(n-1)C_{n+1}^5 + \sum_{j|n, j \in \{2;3;4;6\}} \phi(j) \cdot \rho\left(n, \frac{n}{j}\right) \right), \quad (6)$$

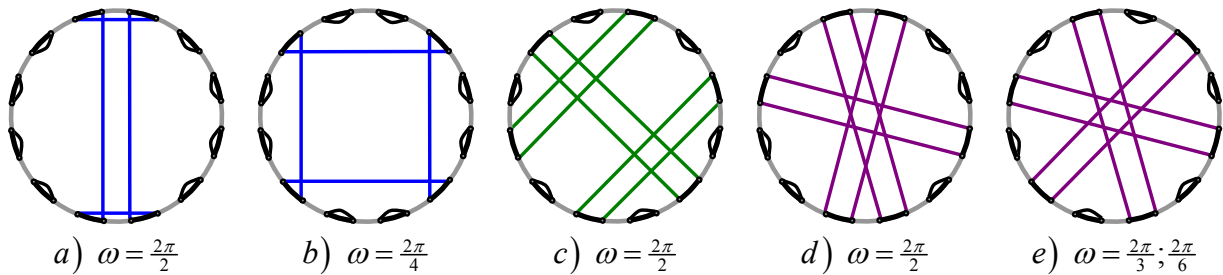
де:  $\phi(q)$  — функція Ейлера;  $\forall j \in N : \frac{n}{j} \notin N$  величини  $\rho\left(n, \frac{n}{j}\right) \equiv 0$ , а  $\forall j \in \{2;3;4;6\} : \frac{n}{j} \in N$  величини  $\rho\left(n, \frac{n}{j}\right)$  визначаються за допомогою співвідношень

$$\rho\left(n, \frac{n}{2}\right) = \frac{n(n-2)(2n-5)}{24}, \quad \rho\left(n, \frac{n}{3}\right) = \frac{n(n-3)}{18}, \quad (7)$$

$$\rho\left(n, \frac{n}{4}\right) = \frac{n}{4}, \quad \rho\left(n, \frac{n}{6}\right) = \frac{n}{6}.$$

**Доведення.** Як було зазначено вище, всі діаграми з класу  $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$  можна поділити на сім характеристичних підкласів —  $A, B, C, D, E, F$  і  $G$ , типові представники яких зображено на рис. 3 а), b), c), d), e), f) і g) відповідно.

1) Не важко переконатися, що серед діаграм кожного з характеристичних підкласів  $D, E, F$  і  $G$  немає таких, які самосуміщуються при повороті на певний кут  $\omega\left(n, \frac{n}{j}\right) = \frac{2\pi}{j} < 2\pi$ .



**Рис. 8:** всі типи діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$ , які самосуміщуються при повороті на кут  $\omega \leq \pi$

2) Діаграми з підкласу  $A$  самосуміщуються при повороті на певний кут

$$\omega \left( n, \frac{n}{j} \right) = \frac{2\pi}{j}, \quad j \in \{2, \dots, n\} \tag{8}$$

лише за умов, коли  $n$  ділиться на 2 або ж на 4. Причому: в першому випадку поворот здійснюється на кут кратний куту  $\omega = \frac{2\pi}{2}$  (при  $j = 2$ ) — рис. 8 a); в другому випадку — на кут кратний куту  $\omega = \frac{2\pi}{4}$  (при  $j = 4$ ) — рис. 8 b). Крім того, не важко перевірити, що:

в першому випадку для  $n = 2k$  число відповідних діаграм становить  $C_k^2$ ; звідки для цілих  $\frac{n}{2}$  число зазначених діаграм становить  $\rho_A \left( n, \frac{n}{2} \right) = C_{n/2}^2$ ;

в другому випадку для  $n = 4k$  число відповідних діаграм становить  $C_k^1$ ; звідки для цілих  $\frac{n}{4}$  число зазначених діаграм становить  $\rho_A \left( n, \frac{n}{4} \right) = \frac{n}{4}$ .

3) Діаграми з підкласу  $B$  самосуміщуються при повороті на певний кут (8) лише за умов, коли  $n$  ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут кратний куту  $\omega = \frac{2\pi}{2}$  (при  $j = 2$ ) — рис. 8 c).

Для  $n = 2k \geq 6$  число таких діаграм становить  $3 \times C_k^3$ , або, що теж саме, для цілих  $\frac{n}{2} \geq 3$  число зазначених діаграм становить  $\rho_B \left( n, \frac{n}{2} \right) = 3 \times C_{n/2}^3$ .

4) Діаграми з підкласу  $C$  самосуміщуються при повороті на певний кут (8) лише за умов, коли  $n$  ділиться на 2, 3 або ж на 6. Причому: в 1-му випадку поворот здійснюється на кут кратний куту  $\omega = \frac{2\pi}{2}$  (при  $j = 2$ ) — рис. 8 d); в 2-му випадку — на кут кратний куту  $\omega = \frac{2\pi}{3}$  (при  $j = 3$ ) — рис. 8 e); в 3-му випадку — на кут кратний куту  $\omega = \frac{2\pi}{6}$  (при  $j = 6$ ) — рис. 8 e).

Крім того, не важко перевірити, що:

в 1-му випадку для  $n = 2k$  число відповідних діаграм становить  $C_k^3$ ; звідки для цілих  $\frac{n}{2} \geq 3$  число зазначених діаграм становить  $\rho_C \left( n, \frac{n}{2} \right) = C_{n/2}^3$ ;

в 2-му випадку для  $n = 3k$  число відповідних діаграм становить  $C_k^2$ ; звідки для цілих  $\frac{n}{3} \geq 2$  число зазначених діаграм становить  $\rho_C \left( n, \frac{n}{3} \right) = C_{n/3}^2$ ;

в 3-му випадку для  $n = 6k$  число відповідних діаграм становить  $C_k^1$ ; звідки для цілих  $\frac{n}{6}$  число зазначених діаграм становить  $\rho_C \left( n, \frac{n}{6} \right) = \frac{n}{6}$ ;

5) Таким чином маємо, що:  $\rho \left( n, \frac{n}{6} \right) = \rho_C \left( n, \frac{n}{6} \right) = \frac{n}{6}$ ;  
 $\rho \left( n, \frac{n}{4} \right) = \rho_A \left( n, \frac{n}{4} \right) = \frac{n}{4}$ ;  $\rho \left( n, \frac{n}{3} \right) = \rho_C \left( n, \frac{n}{3} \right) = C_{n/3}^2$ ;



$$\rho\left(n, \frac{n}{2}\right) = \rho_A\left(n, \frac{n}{2}\right) + \rho_B\left(n, \frac{n}{2}\right) + \rho_C\left(n, \frac{n}{2}\right) = C_{n/2}^2 + 4 \times C_{n/2}^3 = \frac{n(n-2)(2n-5)}{24}. \quad \square$$

**2.4. Число нееквівалентних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$**

Застосовуючи лему Бернсайда (див. напр. [2], [11], [12]), не важко встановити, що число  $t^{**}(n)$  нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи) діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$  можна визначити за допомогою співвідношення

$$t_n^{**} = \frac{1}{2} (t^*(n) + S(n)), \tag{9}$$

де  $t^*(n)$  – число неізоморфних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$ ,

$$S(n) = \begin{cases} s_0(n), & n = 2m + 1 \\ \frac{1}{2}(s_1(n) + s_2(n)), & n = 2m, \end{cases} \tag{10}$$

$s_0(n)$  – число тих діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$ , що є симетричними відносно **фіксованої осі симетрії**, яка проходить через середини протилежних чорної та сірої дуг 2-кольорового  $2n$ -шаблону;

$s_1(n)$  ( $s_2(n)$ ) — число тих діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$ , що є симетричними відносно **фіксованої осі симетрії**, яка проходить через середини протилежних сірих (відповідно чорних) дуг 2-кольорового  $2n$ -шаблону.

**Лема 1.** *Нехай  $n = 2m + 1$ . Тоді число  $s_0(n)$  діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$ , що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через середини протилежних чорної та сірої дуг 2-кольорового  $2n$ -шаблону, можна обчислити за формулою.*

$$s_0(n) = \frac{1}{12}(n - 1)(n - 3)(n + 4). \tag{11}$$

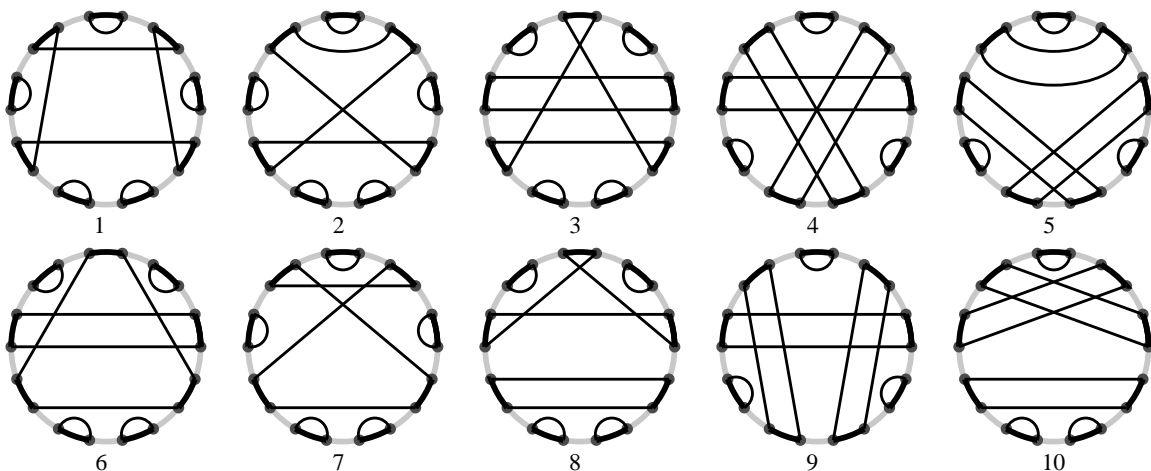


Рис. 9: до лема 1

**Доведення.** Всі діаграми з класу  $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$ , що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через середини протилежних чорної та сірої дуг 2-кольорового  $2n$ -шаблону ( $n = 2m + 1$ ), вичерпуються діаграмами десяти типів, зображених та занумерованих числами від 1 до 10 на рис. 9.

Оскільки  $n = 2m + 1$ , то сумарне число  $s_0(n)$  діаграм зазначених типів становить

$$6 \times C_{\frac{n-1}{2}}^2 + 4 \times C_{\frac{n-1}{2}}^3 = 6 \times C_m^2 + 4 \times C_m^3 = \frac{1}{3}m(m-1)(2m+5),$$

звідки, з урахуванням рівності  $m = \frac{n-1}{2}$ , одержуємо, що

$$s_0(2m+1) = s_0(n) = \frac{1}{12}(n-1)(n-3)(n+4). \quad \square$$

**Лема 2.** Нехай  $n = 2m$ . Тоді мають місце рівності

$$s_1(n) = \frac{1}{24}n(n-2)(2n+1), \quad s_2(n) = \frac{1}{24}(n-2)(2n^2+13n-72); \quad (12)$$

$$\frac{1}{2}(s_1(n) + s_2(n)) = \frac{1}{24}(n-2)(2n^2+7n-36). \quad (13)$$

**Доведення.** Всі діаграми з класу  $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$ , що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через середини протилежних сірих дуг 2-кольорового  $2n$ -шаблону ( $n = 2m$ ), вичерпуються діаграмами семи типів, зображених та занумерованих числами від 1 до 7 на рис. 10.

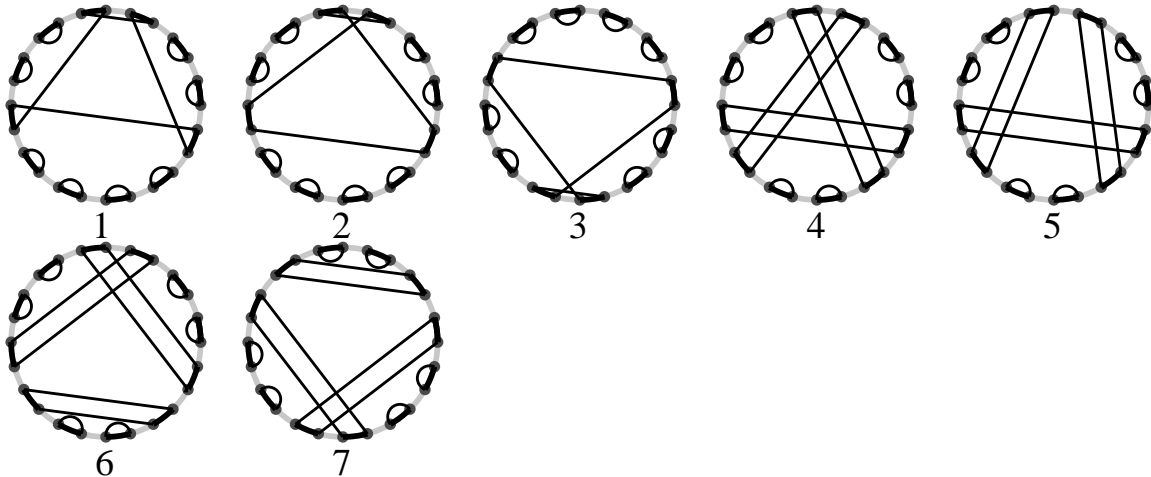


Рис. 10: до леми 2

Оскільки  $n = 2m$ , то сумарне число  $s_1(n)$  діаграм зазначених типів становить

$$3 \times C_{\frac{n}{2}}^2 + 4 \times C_{\frac{n}{2}}^3 = 3 \times C_m^2 + 4 \times C_m^3 = \frac{1}{6}m(m-1)(4m+1),$$

звідки, з урахуванням рівності  $m = \frac{n}{2}$ , одержуємо, що

$$s_1(2m) = s_1(n) = \frac{1}{24}n(n-2)(2n+1).$$

Діаграми з класу  $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$ , що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через середини протилежних чорних дуг 2-кольорового  $2n$ -шаблону, вичерпуються діаграмами шістнадцяти типів, зображених та занумерованих числами від 1 до 16 на рис. 11.

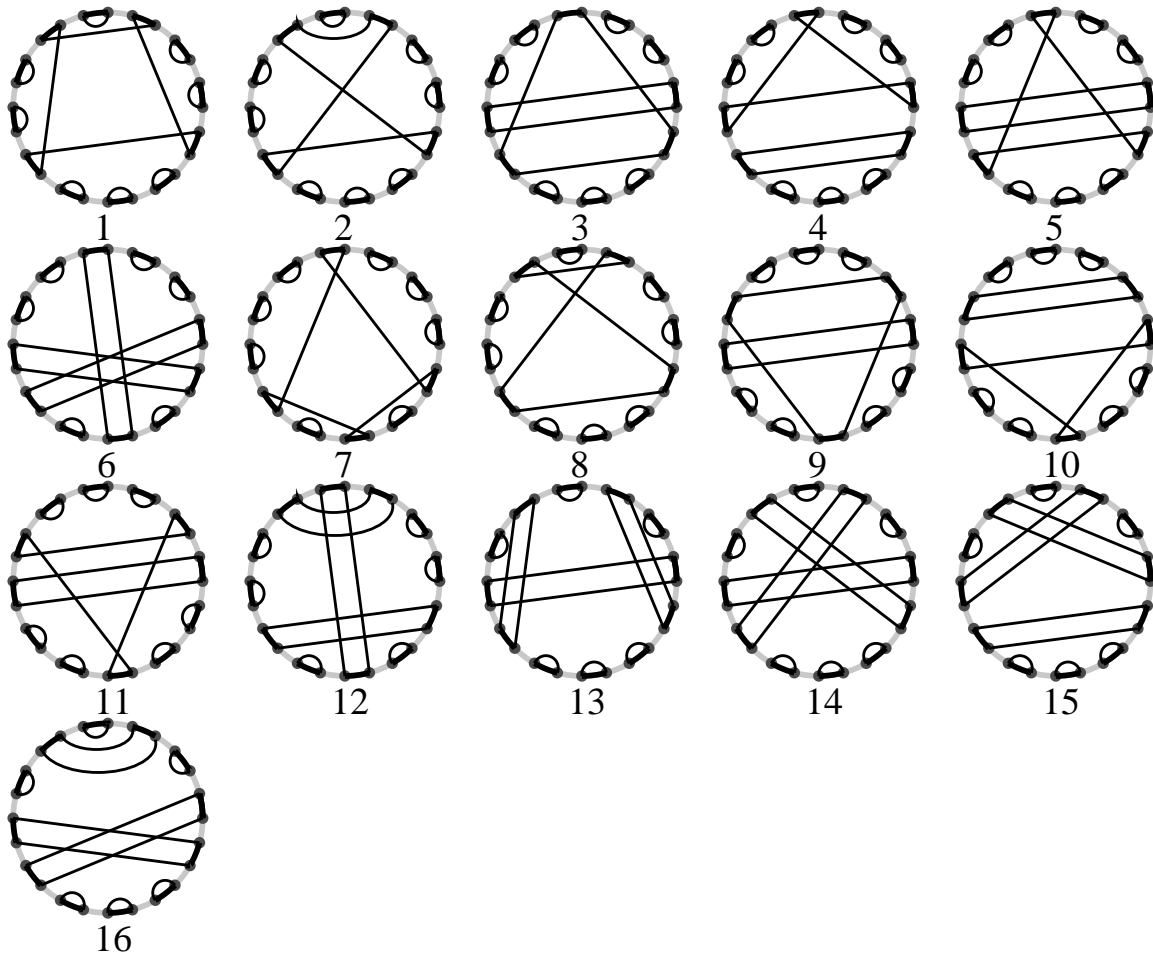


Рис. 11: до леми 2

Оскільки  $n = 2m$ , то сумарне число  $s_2(n)$  діаграм зазначених типів становить

$$1 \times C_{\frac{n-2}{2}}^1 + 11 \times C_{\frac{n-2}{2}}^2 + 4 \times C_{\frac{n-2}{2}}^3 = 1 \times C_{m-1}^1 + 11 \times C_{m-1}^2 + 4 \times C_{m-1}^3 = \\ = \frac{1}{6}(m-1)(4m^2 + 13m - 36),$$

звідки, з урахуванням рівності  $m = \frac{n}{2}$ , одержуємо, що

$$s_2(2m) = s_2(n) = \frac{1}{24}(n-2)(2n^2 + 13n - 72).$$

Крім того, безпосередньою перевіркою не важко переконатися, що  $\frac{1}{2}(s_1(n) + s_2(n)) = \frac{1}{24}(n-2)(2n^2 + 7n - 36)$ . □

З урахуванням співвідношень (9), (10) та лем 1 і 2, має місце

**Теорема 2.** Для натуральних  $n \geq 4$  число  $t^{**}(n)$  нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи) діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$  можна обчислити за формулою

$$t^{**}(n) = \frac{1}{2} (t^*(n) + S(n)), \tag{14}$$

де  $t^*(n)$  визначається за формулами (6), (7), а

$$S(n) = \begin{cases} \frac{1}{12}(n-1)(n-3)(n+4), & n = 2m + 1 \\ \frac{1}{24}(n-2)(2n^2 + 7n - 36), & n = 2m. \end{cases} \tag{15}$$

### 3. Додатки та прикінцеві зауваження

Повторюючи міркування, аналогічні наведеним в роботі [5], не важко встановити справедливість наступного твердження

**Твердження 1.** При  $n \rightarrow \infty$  величини  $t^{**}(n)$  та  $\frac{t(n)}{2n} = \frac{(n+1) \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{144}$  є еквівалентними нескінченно великими величинами.

| $n$ | $t(n)$    | $t^*(n)$ | $S(n)$ | $t^{**}(n)$ | $\overline{t^{**}(n)} = \left\lfloor \frac{t(n)}{2n} \right\rfloor$ |
|-----|-----------|----------|--------|-------------|---|
| 4   | 5         | 2        | 2      | 2           | 0   |
| 5   | 40        | 8        | 6      | 7           | 4   |
| 6   | 175       | 31       | 13     | 22          | 14  |
| 7   | 560       | 80       | 22     | 51          | 40  |
| 8   | 1 470     | 187      | 37     | 112         | 91  |
| 9   | 3 360     | 374      | 52     | 213         | 186   |
| 10  | 6 930     | 698      | 78     | 388         | 346   |
| 11  | 13 200    | 1 200    | 100    | 650         | 600   |
| 12  | 23 595    | 1 976    | 140    | 1 058       | 983   |
| 13  | 40 040    | 3 080    | 170    | 1 625       | 1 540   |
| 14  | 65 065    | 4 659    | 227    | 2 443       | 2 323   |
| 15  | 101 920   | 6 796    | 266    | 3 531       | 3 397   |
| 16  | 154 700   | 9 685    | 343    | 5 014       | 4 834   |
| 17  | 228 480   | 13 440   | 392    | 6 916       | 6 720   |
| 18  | 329 460   | 18 326   | 492    | 9 409       | 9 151   |
| 19  | 465 120   | 24 480   | 552    | 12 516      | 12 240  |
| 20  | 644 385   | 32 246   | 678    | 16 462      | 16 109  |
| 21  | 877 800   | 41 802   | 750    | 21 276      | 20 900  |
| 22  | 1 177 715 | 53 565   | 905    | 27 235      | 26 766  |
| 23  | 1 558 480 | 67 760   | 990    | 34 375      | 33 880  |
| 24  | 2 036 650 | 84 903   | 1 177  | 43 040      | 42 430  |

**Табл. 1:** початкові значення величин  $t(n)$ ,  $t^*(n)$  та  $t^{**}(n)$

Нижче (на рис. 12 та 13) в явному вигляді наведено всі неізоморфні діаграми з класу  $\mathfrak{S}_{4;2}^{7,1}$ .

Не важко перевірити, що серед 80 неізоморфних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{4;2}^{7,1}$  є 29 пар еквівалентних діаграм. І тому  $t^{**}(7) = 80 - 2 \cdot 29 + 29 = 51$ .

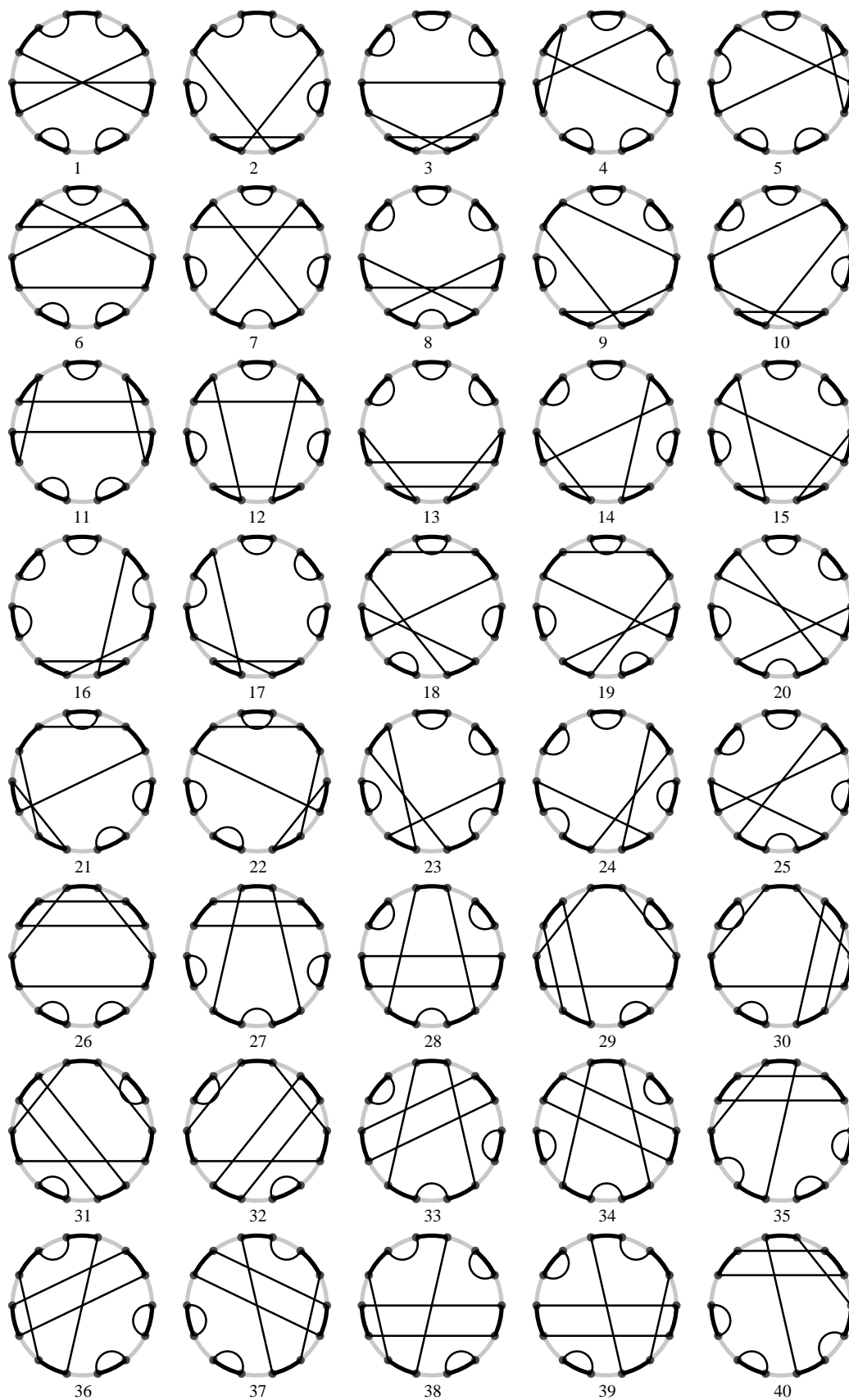


Рис. 12: «перші» 40 із 80 неізоморфних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{4;2}^{7;1}$

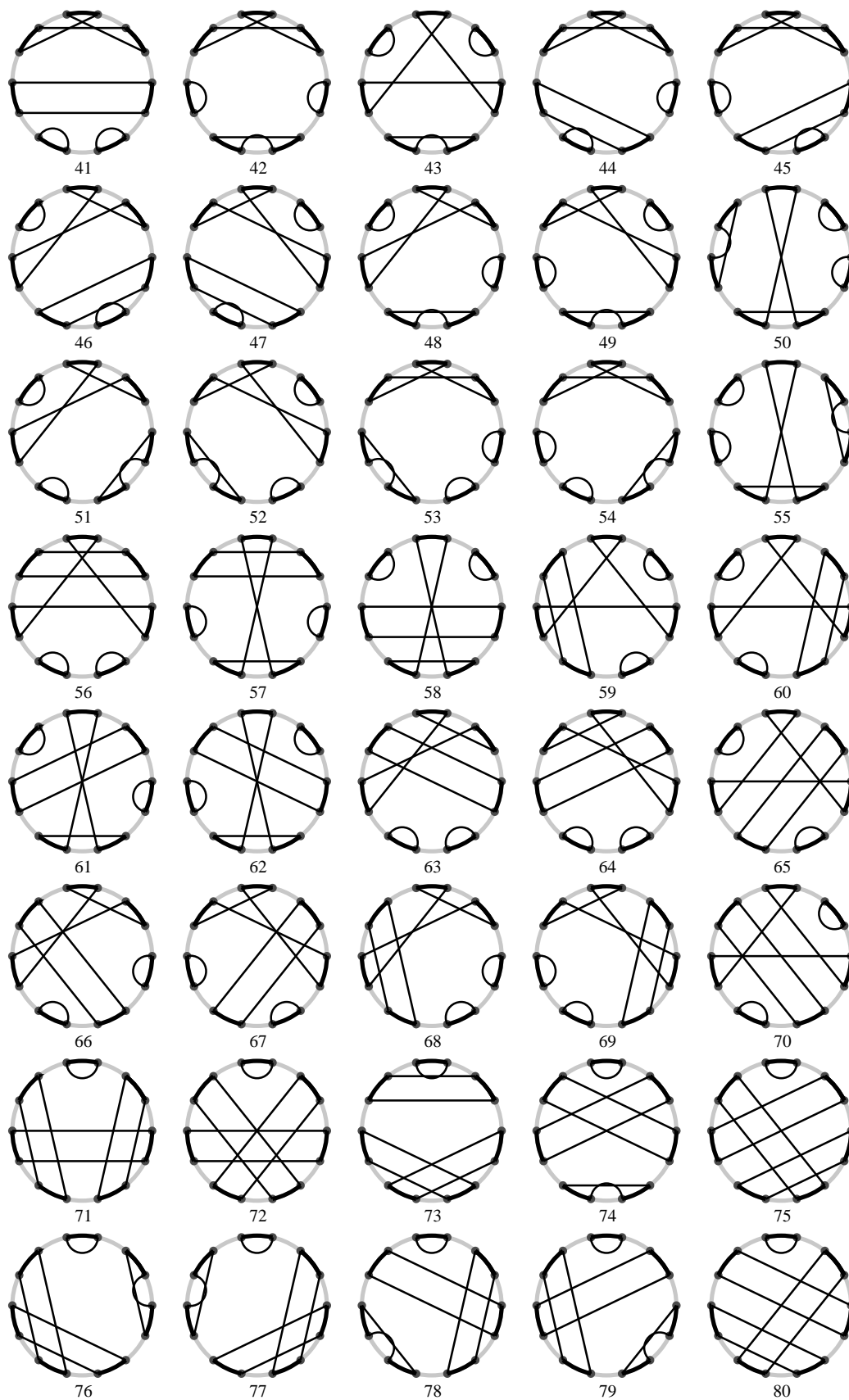


Рис. 13: «останні» 40 із 80 неізоморфних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{4;2}^{7;1}$

## Література

1. *Callan D., Smiley L.* Noncrossing partitions under reflection and rotation; preprint, arXiv:math/0510447 [math.CO], 2000.
2. *Cori R.* Counting non-isomorphic chord diagrams / R. Cori, M. Marcus // Theoretical Computer Science. — 1998. — Vol. 204. — P. 55–73.
3. *Chapuy G.* A new combinatorial identity for unicellular maps, via a direct bijective approach / G. Chapuy // Advances in Applied Mathematics. — 2011. — Vol. 47, No. 4. — P. 874–893.
4. *Goupil A.* Factoring  $n$ -cycles and counting maps of given genus / A. Goupil, G. Schaeffer // European Journal of Combinatorics. — 1998. — Vol. 19, No. 7. — P. 819–834.
5. *Khruzin A.* Enumeration of chord diagrams; preprint, arXiv:math/0008209 [math.CO], 1998.
6. *Krasko E.* Counting Unlabelled Chord Diagrams of Maximal Genus; preprint, arXiv:1709.00796 [math.CO], 2017.
7. *Li B.* Exact number of chord diagrams and an estimation of the number of spine diagrams of order  $n$  / B. Li, H. Sun // Chinese Science Bulletin. — 1997. — Vol. 42, No. 9. — P. 705–720.
8. *Stoimenov A.* Enumeration of chord diagrams and an upper bound for Vassiliev invariants / A. Stoimenov // Journal of Knot and its Ramifications. — 1998. — Vol. 7, No. 1. — P. 93–114.
9. *Адрианов Н.М.* Аналог формулы Харера-Цагира для одноклеточных двукрашенных карт / Н.М. Адрианов // Функциональный анализ и его приложения. — 1997. — Том 31, № 3. — С. 1–9.
10. *Кадубовський О.* Про один клас хордових діаграм максимального роду / О. Кадубовський // Вісник Київського університету Серія: фізико-математичні науки. — 2006. — Вип. 1. — С. 17–27.
11. *Кадубовський О.А.* Двокольорові  $O$ - і  $N$ -діаграми / О.А. Кадубовський, О.В. Сторожилова, Н.В. Сторожилова // Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки. — 2010. — Том I, Вип. 10. — С. 41–50.
12. *Кадубовський О.А.* Двокольорові  $O$ -діаграми з одним чорним циклом / О.А. Кадубовський, Ю.С. Саприкіна, С.Ю. Мазур // Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки. — 2010. — Том I, Вип. 10. — С. 51–60.
13. *Кадубовський А.А.* Двухцветные хордовые  $N$ -диаграммы с одним черным циклом // Труды института прикладной математики и механики НАН Украины. — 2012. — Том 24. — С. 134–146.
14. *Кадубовський А.А.* О числе топологически неэквивалентных функций с одной вырожденной критической точкой типа седло на двумерной сфе-

- ре, II / А.А. Кадубовский / Труды международного геометрического центра. — 2015. — Том 8, № 1. — С. 46–61.
15. *Кадубовський О.А.* Перерахування топологічно нееквівалентних гладких мінімальних функцій на замкнених поверхнях // Топологія відображень маловимірних многовидів : Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2015. — Том 12, № 6. — С. 105–145.
  16. *Кадубовський О.А.* Перерахування двокольорових хордових  $O$ -діаграм роду 1, які мають один чорний (або сірий) цикл, відносно дії циклічної та дієдральної груп / О.А. Кадубовський, Н.П. Баляса // Зб. наук. праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2016. — Вип. 6. — С. 31–46.
  17. *Калініченко Я.В., Кадубовський О.А.* Про число неізоморфних двокольорових хордових діаграм роду один з двома циклами певного кольору // Зб. наукових праць міжнародної науково-методичної конференції «Сучасна освіта та інтеграційні процеси», 22–23 листопада 2017 р., Краматорськ, Україна. — Краматорськ : ДДМА, 2017. — С. 80–82. — 246 с.
  18. *Калініченко Я.В., Кадубовський О.А.* Про число нееквівалентних двокольорових хордових діаграм роду один з двома циклами певного кольору // XIII Всеукраїнська студентська наукова конференція «Перспективи розвитку точних наук, економіки та методики їх викладання», 26 – 27 квітня 2018 р., Ніжин, Україна: Тези доповідей. — Ніжин : Навчально-науковий інститут точних наук і економіки Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя, 2018. — С. 26–30. — 219 с.

---

**Kadubovs'kyi Oleksandr A., Kalinichenko Yaroslav V.**

Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

**Enumeration of 2-color chord  $O$ -diagrams of the genus one that have two grey (or black) faces under rotation and reflection**

In this paper we consider 2-color chord  $O$ -diagrams (of order  $n$ ) with two grey and  $(n - 3)$  black faces under the action of (i) the rotation group (cyclic of the order  $n$ ) and of (ii) the rotation/reflection group (dihedral of the order  $2n$ ).

For natural  $4 \leq n \leq 7$  we have illustrated all non-isomorphic and non-equivalent of such diagrams. We have established explicit formulas for counting the number of non-isomorphic and non-equivalent diagrams from the specified class. In addition, for natural  $4 \leq n \leq 24$  we have also listed the exact value of the number of non-isomorphic and non-equivalent such diagrams accordingly.

**Keywords:** 2-color chord  $O$ -diagrams, genus of a diagram, faces of a diagram, cyclic and dihedral groups.