УДК 519.11

Рябухо О.М., Турка Т.В.

[1] *канд. фізико-математичних наук, доцент, «КДМТУ»*

[2] *канд. фізико-математичних наук, доцент, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: tvturka@gmail.com

ЗАСТОСУВАННЯ ГРУП ПІДСТАНОВОК ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ПЕРЕЛІК

Представлені задачі на перелік, які розв'язані за допомогою груп підстановок. Обчислювалася кількість орбіт деякої індукованої групи підстановок. Число орбіт індукованої групи підстановок можна знаходити за цикловим індексом вихідної групи підстановок.

Ключові слова: *цикловий індекс, задачі на перелік, група підстановок, індукована група, орбіта, вагова функція.* .

Вступ

Задачі на перелік виникають у різних розділах математики в зв'язку з обчисленням кількості можливих варіантів виконання тієї чи іншої дії, знаходженням кількості об'єктів, що мають певні властивості. Застосування теорії груп для розв'язування задач на перелік зумовлене можливістю знаходження розв'язків без детального аналізу даної математичної моделі. Одержані результати можна автоматично поширювати на цілий клас моделей, об'єднаних за певною груповою ознакою. Раціоналізм, властивий математиці, в теорії груп значно підвищується, образно кажучи, підноситься до квадрату. Метод Пойя в теорії переліку — це метод переліку орбіт груп підстановок, який використовує їх циклові індекси. Цей метод ґрунтується на досить простому твердженні про число орбіт групи підстановок, яке в тій чи іншій формі зустрічається в роботах О.Коші, Г.Фробеніуса, В.Бернсайда.

Цикловий індекс групи підстановок.

Нехай A – група підстановок з множиною об'єктів $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Для кожного $k = 1, 2, \ldots, n$ через $j_k(\alpha)$ позначимо число циклів довжини k у розміщенні підстановок α у добуток неперетинних циклів. Тоді цикловий індекс групи A, який позначаємо $Z(A)$, представляє собою многочлен від змінних $s_1, s_2, ..., s_n$, визначених формулою

$$Z(A) = |A|^{-1} \sum_{\alpha \in A} \sum_{k=1}^{n} s_k^{j_{k(\alpha)}}.$$

Таким чином, цикловий індекс симетричної групи задається формулою

$$Z\left(S_n\right)=\left(\frac{1}{n!}\right)\sum_j h\left(j\right)\prod_{k=1}S_k^{j_k}.$$

Нехай A_n – знакозмінна група, яка складається з усіх парних підстановок групи S_n. Тоді

$$Z\left(A_n\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(S_1^3+2S_3\right)$$

Цикловий індекс симетричної групи задовольняє рекурсивному співвідношенню

$$Z\left(S_n\right)=n^{-1}\sum_{k=1}^{n}S_kZ\left(S_{n-k}\right).$$

Циклічна група степеня n, яку позначають C_n, породжена циклом $(1\,2\,3\,\ldots n)$, має цикловий індекс:

$$Z\left(C_n\right)=n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\phi\left(k\right)S_k^{\frac{n}{k}},$$

де ϕ – функція Ейлера.

Цикловий індекс діедральної групи $n-$ порядку D_n, породженої циклом $(1\,2\,3\,\ldots n)$ і відображенням $(1n)\left(2\left(n-1\right)\right)\left(3\left(n-2\right)\right)\ldots$ може бути виражений через $Z\left(C_n\right)$.

$$Z\left(D_n\right)=\frac{1}{2}Z\left(C_n\right)+\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{2}\cdot S_1S_2^{\frac{(n-1)}{2}}, & n-\text{не парне,}\\ \frac{1}{4}\cdot\left(S_2^{\frac{n}{2}}+S_1^2S_2^{\frac{(n-2)}{2}}\right), & n-\text{парне.}\end{array}\right\}$$

Цикловий індекс одиничної групи E_n, що діє на множині із n об'єктів:

$$Z\left(E_n\right)=S_1^n.$$

Цикловий індекс не визначає однозначно групу підстановок. А саме, дві групи підстановок A і B не обов'язково ідентичні, якщо їх циклові індекси однакові. У дійсності вони можуть бути навіть не ізоморфними і хоча мають однаковий цикловий індекс.

Означення 1. Дві групи підстановок комбінаторно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли вони мають однакові циклові індекси.

Теорема 1. *Цикловий індекс добутку дорівнює добутку циклових індексів груп — співмножників.*

$$Z\left(AB\right)=Z\left(A\right)\cdot Z\left(B\right).$$

Група повного графу K_n з n вершинами дорівнює S_n. Крім того, граф G, компонентами якого є графи K_n і K_m $(n \neq m)$, має групу $\Gamma(G) = S_n S_m$. Отже, за теоремою 1 отримуємо

$$Z(\Gamma(G)) = Z(S_n) \cdot Z(S_m).$$

Лема Бернсайда

Нехай A – група підстановок з множиною об'єктів $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Тоді елементи x і y із X називаються A – еквівалентними або подібними, якщо існує підстановка α із A така, що $\alpha x = y$. Класичним результатом є ствердження того, що введене відношення є еквівалентність. Класи еквівалентності називаються орбітами, або системами транзитивності групи A.

Для кожного x із X покладемо

$$A(x) = \{\alpha \in A \vee \alpha x = x\}.$$

Множина $A(x)$ називається стабілізатором елемента x. Помічаємо, якщо елементи x і y одній і тій самій орбіті, множини $A(x)$ і $A(y)$ є спряженими підгрупами групи A з чого виплиає, що

$$|A(x)| = |A(y)|.$$

Число елементів в орбіті, яка має елемент y, дорівнює індексу стабілізатора елемента y у групі А.

Лема 1. (Бернсайда) *Число $N(A)$ орбіт групи A задається формулою*

$$N(A) = |A|^{-1} \sum_{\alpha \in A} j_1(\alpha),$$

де $j_1(\alpha)$ – число циклів довжини 1 у розкладенні підстановки α в добуток непересічних циклів, з порожнім перетином.

Зауважимо, що число орбіт в точності співпадає з числом способів отримання із графа G різних не помічених кореневих графів. Щоб отримати усі такі графи, треба просто обирати в якості кореня по одній вершині (точці) із кожної орбіти.

Наслідок 1. (обмежена форма леми Бернсайда) *Нехай треба обмежити дію групи A на деяку підмножину Y множини X, де Y — об'єднання яких-небудь орбіт групи A. Позначимо через $\frac{A}{Y}$ множину підстановок визначених на Y і, які отримуються за допомогою обмеження на підмножину Y відповідних підстановок групи A. Для кожної підстановки α з* *групи A число елементів в Y, нерухомих відносно підстановки α, позначимо через $j_1\left(\frac{\alpha}{Y}\right)$ маємо*

$$N\left(\frac{A}{Y}\right)=|A|^{-1}\sum_{\alpha\in A} j_1\left(\frac{\alpha}{Y}\right).$$

Наслідок 2. (зважена форма леми Бернсайда) *Нехай R — довільне комутативне кільце, яке містить множину всіх раціональних чисел, і ω — деяка функція, яка називається ваговою функцією, відображає множину об'єктів X групи A в кільце R. Для кожної орбіти X_i позначимо її вагу через $\omega\left(X_i\right)$ і визначимо його відношенням $\omega\left(X_i\right)=\omega\left(x\right)$ для будь-якого елементу x із X_i.*

Сума ваги орбіт групи A задається формулою

$$\sum_{i=1}^{m}\omega\left(X_i\right)=|A|^{-1}\sum_{\alpha\in A}\sum_{x=\alpha x}\omega\left(x\right).$$

Застосування теорії груп в теорії переліку

Введемо поняття степеневої групи. Нехай A – група підстановок з множиною об'єктів $X=\{1,2,\ldots,n\}$, і нехай B - скінченна група підстановок з зліченною множиною об'єктів Y, яка має не менше двох елементів. Тоді степенева група, яку позначають B^A, яка має в якості множини об'єктів сукупність Y^X усіх функцій, які діють із X в Y. Підстановками групи B^A є всі впорядковані пари підстановок α із A і β із B, які записуються у вигляді $(\alpha;\beta)$. Образ довільної функції f з Y^X при дії на неї підстановки $(\alpha;\beta)$ задається формулою

$$\left(\left(\alpha;\beta\right)f\right)\left(x\right)=\beta f\left(\alpha x\right)$$

при усіх x із X.

Розглянемо тепер степеневу групу E^A, яка діє на множині Y^X. Нехай $\omega{:}Y\rightarrow\{0,1,2,\ldots\}$ – функція, область значень якої є множина невід'ємних цілих чисел і для якої $\left|\omega^{-1}\left(k\right)\right|<\infty$ при всіх k. Зокрема, для кожного $k=0,1,2,\ldots$ нехай

$$C_k=\left|\omega^{-1}\left(k\right)\right|$$

буде числом «фігур» ваги k.

Тоді про елемент y із Y, для якого $\omega\left(y\right)=k$, говорять що він має вагу k, а функція ω називають ваговою функцією.

Ряд $C\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k x^k$ відносно змінної x, який перелічує елементи множини Y у відповідності з їх вагами, називають «перелічувальним рядом для фігур».

Вага функції f з Y^X визначається формулою

$$\omega\left(f\right)=\sum_{x\in X}\omega\left(f\left(x\right)\right).$$

Не важко показати, що функції, які належать одній орбіті степеневої групи E^A, мають однакову вагу. З цього випливає, що вагою $\omega\left(F\right)$ орбіти F групи E^A є вага будь-якої функції f з орбіти F. Так як $\left|\omega^{-1}\left(k\right)\right|<\infty$ для будь-якого $k=0,1,2,\ldots$ то існує скінченне число орбіт кожної ваги. Позначимо через C_k число орбіт ваги k. Маємо ряд

$$C\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^k.$$

Тепер можемо сформулювати основну теорему, яка виражає ряд $C\left(x\right)$ у термінах циклового індексу $Z\left(A\right)$ і ряд $c\left(x\right)$.

Позначимо $Z\left(A,c\left(x\right)\right)=Z\left(A;c\left(x\right),c\left(x^2\right),c\left(x^3\right),\ldots\right)$.

Теорема 2. (теорема переліку Пойа) *Ряд $C\left(x\right)$, який перелічує функції, отримують за допомогою підстановки в цикловий індекс $Z\left(A\right)$ групи A на місце кожної змінної S_k ряду $c\left(x^k\right)$, який перелічує фігури:*

$$C\left(x\right)=Z\left(A,c\left(x\right)\right).$$

Наслідок 3. *Число орбіт, які визначаються степеневою групою E_m^A, виходить в наслідок підстановки числа m замість кожної змінної в $Z\left(A\right)$:*

$$N\left(E_m^A\right)=Z\left(A,m\right).$$

Нехай N – множина цілих невід'ємних чисел і $N^n=N*N*\ldots*N$ – декартового добутку n копій множини N. Множина об'єктів степеневої групи E^A є множина Y^x і вагова функція $\omega{:}Y\to N^n$ має ту властивість, що для кожного $z\in N^n$ виконується нерівність $\left|\omega^{-1}\left(z\right)\right|<\infty$. Покомпонентна адитивність в N^n, ваги функцій з Y^X і орбіти, індуцировані групою E^A. Коефіцієнт при $x_1^{r_1}x_2^{r_2}\ldots x_n^{r_n}$ у ряду $c\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$, який перелічує фігури, дорівнює за означенням $\left|\omega^{-1}\left(r_1,r_2,\ldots,r_n\right)\right|$. Коефіцієнт при $x_1^{t_1}x_2^{t_2}\ldots x_n^{t_n}$ у ряді $C\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$, який перелічує функції, дорівнює числу орбіт ваги $\left(t_1,t_2,\ldots,t_n\right)$. Через $Z\left(A,c\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\right)$ позначаємо ряд, який виходить за допомогою підстановки замість кожної змінної S_k в $Z\left(A\right)$ ряду $c\left(x_1^k,x_2^k,\ldots,x_n^k\right)$.

Теорема 3. *Якщо* $c(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *— перелічувальний ряд для фігур множини* Y*, то орбіти функцій в* Y^X*, які визначаються степеневою групою* E^A*, перелічуються у відповідності зі своїми вагами рядом* $C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$C(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Z(A, c(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Приклад 1

Знайдемо перелічувальний ряд для намист з чотирма бусинками і трьома допустимими кольорами. Покладемо $Y = \{a, b, c\}$ і будемо розглядати довільну функцію f з X в Y, як представлення намиста з $\left|f^{-1}(a)\right|$ червоними, $\left|f^{-1}(b)\right|$ білими і $\left|f^{-1}(c)\right|$ блакитними бусинками. Покладемо, $\omega(a) = (0, 0)$, $\omega(b) = (1, 0)$ і $\omega(c) = (0, 1)$, то

$$\omega(f) = \sum_{x \in X} \omega(f(x))$$

і $\omega(f)$ є упорядкованою парою в якій перша координата дорівнює числу білих бусинок, а друга координата – числу блакитних. Число червоних бусинок, звісно, дорівнює в точності різниці між і числом білих і блакитних бусинок. Тепер у відповідності з означенням перелічувальний ряд для фігур є $C(x) = 1 + x_1 + x_2$. Виходить, на основі теореми перелічувальний ряд для намист має вигляд:

$$C(x_1, x_2) = Z(D_4, 1 + x_1 + x_2).$$

Підставивши перелічувальний ряд для фігур в цикловий індекс $Z(D_4)$, отримуємо

$$C(x_1, x_2) = 1 + x_1 + 2x_1^2 + x_1^3 + x_1^4 + x_2 + 2x_2^2 + x_2^3 + x_2^4 + 2x_1x_2 +$$

$$+2x_1^2x_2 + x_1^3x_2 + 2x_1x_2^2 + x_1x_2^3 + 2x_1^2x_2^2.$$

Обчислимо суму коефіцієнтів многочлена $C(x_1, x_2)$. Знайдемо значення $Z(D_4, 3)$.

$$Z(D_4) = \frac{1}{8}\left(S_1^4 + 2S_1^2S_2 + 3S_2^2 + 2S_4\right);$$

$$Z(D_4) = \frac{1}{8}\left(3^4 + 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3\right) = \frac{84}{4} = 21.$$

Значення $Z(D_4, 3)$ співпадає з сумою коефіцієнтів многочлена $C(x_1, x_2)$.

Приклад 2

Знайдемо число різних конфігурацій, які можна отримати, розміщуючи «заповнений» вузол в кожну з яких-небудь чотирьох вершин куба і «порожній» вузол в кожну із чотирьох інших вершин, якщо конфігурації, які відрізняються тільки розташуванням, тобто одна виходить з іншої за допомогою обертань куба у просторі, не вважаються різними.

Цикловий індекс групи обертів куба, діє на множині S вершин куба, має вигляд:

$$Z(S) = \frac{1}{24}\left(s_1^8 + 9s_2^4 + 8s_3^2 s_1^2 + 6s_4^2\right).$$

Якщо в $Z(S)$ замість кожної змінної S_r підставити x^2+y^2, то отримаємо многочлен:

$$x^8 + x^7y + 3x^6y^2 + 3x^5y^3 + 7x^4y^4 + 3x^3y^5 + 3x^2y^6 + xy^7 + y^8,$$

в якому коефіцієнт при $x^t y^{8-t}$ перелічує різні можливі конфігурації з t вузлами і $8-t$ вузлами. В нашому прикладі число конфігурацій дорівнює коефіцієнту при x^4y^4 і дорівнює 7.

Сума коефіцієнтів в даному висловлюванні дорівнює 23, що представляє загальне число конфігурацій, коли число вершин обох кольорів не фіксовано. Це перелічування досягається також підстановкою 2 замість кожної змінної S_r в $Z(S)$.

$$Z(S) = \frac{1}{24}\left(2^8 + 9\cdot 2^4 + 8\cdot 2^4 + 6\cdot 2^2\right) = \frac{69}{3} = 23.$$

Аналогічно, якщо маємо k кольорів, то підставляємо число k замість кожної змінної S_r в $Z(S)$. Так, при 3 кольорах маємо

$$\frac{1}{24}\left(3^8 + 9\cdot 3^4 + 8\cdot 3^4 + 6\cdot 3^2\right) = 333$$

можливих конфігурацій.

Якщо замість $Z(S)$ кожної змінної S_r підставити $\frac{1}{1-x^2}$, то отримаємо нескінчений ряд

$$1 + x + 4x^2 + 7x^3 + 21x^4 + 37x^5 + \ldots,$$

в якому коефіцієнт при x^t перелічує різні конфігурації, які виникають при розміщенні у вершинах куба цілих невід'ємних чисел з виконанням умови: сума всіх 8 чисел завжди дорівнює t.

Маємо наступні чотири конфігурації.

Якщо $Z(S)$ замість кожної змінної S_{2k} підставити 2, а замість кожної змінної підставити S_{2k+1} підставити 0, то будуть перелічені конфігурації, в яких можна міняти колір будь-якої вершини на протилежний, шляхом підходящого обертання куба. Знаходимо, що це число є

$$\frac{1}{24}\left(0+9\cdot 2^4+0+6\cdot 2^2\right)=7,$$

і, насправді, як легко побачити всі Z показаних вище конфігурацій мають описані властивості. В інших аналогічних випадках відмічений випадок не завжди має місце. Так, для 12 вершин ікосаедра існують 24 різні конфігурації з 6 вершинами кожного кольору і тільки 16 з них переставляють кольори за допомогою обертів.

Приклад 3.

Нехай X – множина, яка складається з усіх шести граней куба, Y - множина двох кольорів: червоного і блакитного. Цикловий індекс групи підстановок куба діє на множині граней:

$$Z(S)=\frac{1}{24}\left(S_1^6+3S_1^2S_2^2+6S_1^2S_4+6S_2^3+8S_3^2\right).$$

Число засобів фарбування може бути отримано шляхом підстановки числа 2замість кожної змінної S_r в $Z(S)$. Отримаємо:

$$Z(S)=\frac{1}{24}\left(2^6+3\cdot 2^4+6\cdot 2^3+6\cdot 2^3+8\cdot 2^2\right)=\frac{1}{24}\left(2^6+2^7+3\cdot 2^4\right)=10.$$

Скільки класів еквівалентності фарбувань дає 4 червоні грані і дві блакитні?

Для цього дамо вагу x червоному і y блакитному. Підставимо в $Z(S)$ замість кожної змінної S_r x^2+y^2. Отримаємо:

$$\frac{1}{24}[(x+y)^6+3(x+y)^2(x^2+y^2)^2+6(x+y)^2(x^4+y^4)^4+6\left(x^2+y^2\right)^3+8\left(x^3+y^3\right)^2].$$

Коефіцієнт при x^4y^2 дорівнює

$$\frac{1}{24}\left(15+9+6+18+0\right)=2.$$

Насправді, існують рівно два класи еквівалентності функції при яких чотири грані пофарбовані у червоний колір і дві – у блакитний. Для повного переліку класів еквівалентності ми легко отримуємо

$$x^6+x^5y+2x^4y^2+2x^3y^3+2x^2y^4+xy^5+y^6.$$

Представлені задачі на перелік розв'язані за одним і тим самим методом: кожного разу ми знаходили за умовами задачі кількість орбіт деякої індукованої групи підстановок. Зауважимо, що в усіх розглянутих прикладах потрібна нам інформація про групу підстановок містилася в цикловому індексі. При цьому можна помітити, що в багатьох випадках шукане число орбіт індукованої групи підстановок можна було знайти формально за цикловим індексом вихідної групи підстановок, підставляючи відповідні числа або вирази замість змінних, що входять до циклового індексу. Розглянутий метод для кожної з розв'язаних задач формулюється й обґрунтовується за допомогою теорії, початок якої було покладено в 1937 р. у роботі видатного математика Д. Пойа. В основі цієї теорії лежать розглянуті нами лема Бернсайда і поняття індукованої групи підстановок.

Література

1. *Redfield J. H.* The Theory of Group-Reduced Distributions // American Journal of Mathematics. — Vol. 49, No. 3 (Jul., 1927). — pp. 433–455.
2. *Polya G.* Kombinatorische Anzahlbestimmungen fur Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen. Acta Mathematica, 1937, 68 (1): pp. 145–254.
3. *Сачков В.Н.* Комбинаторные методы дискретной математики / В.Н. Сачков. — М.: Наука, 1977. — 320 с.
4. *Харари Ф.* Перечисление графов: Пер. с англ. — / Ф. Харари, Э. Палмер. — М.: Мир, 1977. — 324 с.

Ryabukho O.M., Turka T.V.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

Application of the groups of substances for solving the tasks of enumeration

The tasks of enumeration are presented, which are solved using substitution group. Calculated the number of orbits of some induced group of substitutions. The number of orbits of the induced group of substitutions can be found by the cyclic index of the initial group of substitutions.

Keywords: *cyclic index, task of enumeration, substitution group, induced group, orbit, weight function.*