УДК 37.016:512.13

Беседін Б.Б., Кадубовський О.А., Фролов К.О.

[1] *канд. педагогічних наук, доцент каф. МНМ та МНІ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *канд. фізико-математичних наук, доцент каф. математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[3] *студент 1 курсу (магістратура) фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: besedin_boris@ukr.net, kadubovs@ukr.net, frolov.krl@gmail.com

ПРО АЛГОРИТМІЧНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ (З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ) З ПАРАМЕТРОМ

В статті висвітлюється авторський досвід застосування алгоритмічного підходу під час навчання методам розв'язання лінійних рівнянь та нерівностей з параметром. В термінах, що не виходять за межі програмного змістового модуля «Множини та операції над ними» для учнів 8 класу з поглибленим вивченням математики, в статті запропоновано п'ять алгоритмів до розв'язання лінійних рівнянь та нерівностей з параметром та наведено два ілюстративні приклади.

Ключові слова: *лінійне рівняння з параметром, лінійна нерівність з параметром, алгоритми розв'язання.*

Вступ

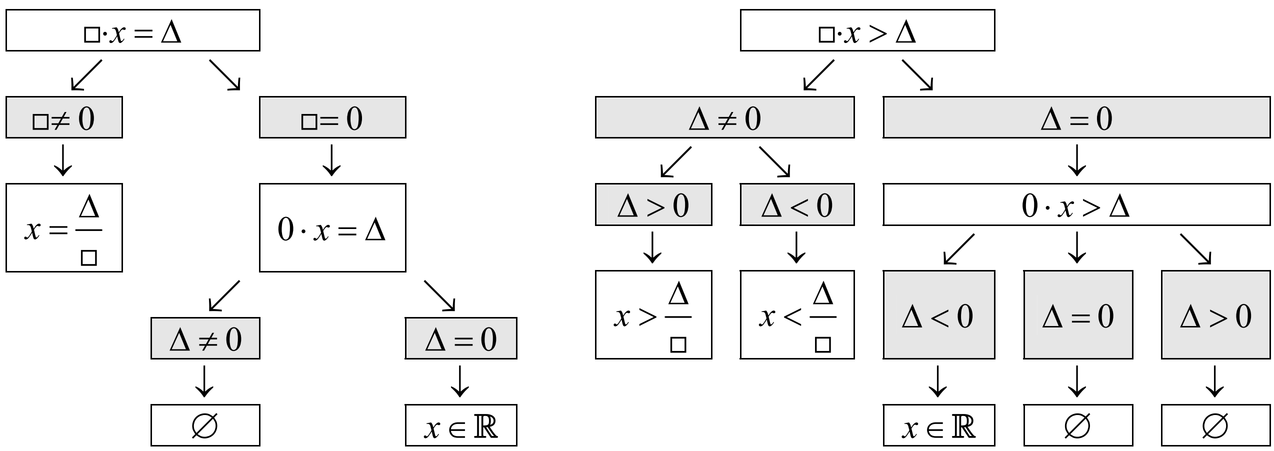
Оволодіння вміннями та навичками розв'язання задач з параметрами є важливою складовою математичної підготовки випускників шкіл. Помилково було б вважати, що важливість таких задач обумовлена лише підготовкою учнів до успішного проходження зовнішнього незалежного оцінювання і тому починати вчитись розв'язувати задачі з параметром слід безпосередньо на завершальному етапі підготовки до ЗНО, тобто у випускному класі. Таким задачам потрібно приділяти увагу з самого початку вивчення систематичного курсу алгебри (7 клас). В процесі їх розв'язування збагачується математична культура учня, удосконалюються технічні навички. Задачі з параметром є потужним засобом систематизації знань учнів, активізації їх пізнавальної активності. Процес розв'язування таких задач носить, як правило, творчий характер, сприяє формуванню навичок дослідницької діяльності.

В роботах математиків та методистів [3; 4; 5; 6], в шкільних підручниках [1; 2] методи розв'язування вправ з параметром розподіляються на графічні та аналітичні.

Серед графічних виділяють два основні методи:
1) побудова геометричного образу заданого рівняння (нерівності чи системи) на координатній площині Oxy;
2) побудова геометричного образу заданого рівняння (нерівності чи системи) на координатній площині Oxa.

Із числа аналітичних методів виділяють наступні:
1) штучні, вони залежать від конкретної вправи і є досить різноманітними;
2) методи заміни змінної;
3) методи, при яких необхідно робити перевірку.

Першими задачами з параметрами, з якими зустрічаються учні, є лінійні рівняння (7 кл.) та лінійні нерівності (8 кл.). Учням пропонуються до застосування наступні граф-схеми алгоритмів розв'язання:



a) *b*)

Рис. 1:
a) «граф-схема алгоритму розв'язання лінійного рівняння з параметром»;
b) «граф-схема алгоритму розв'язання лінійної нерівності з параметром»

Проте, не дивлячись на поради-застереження «щодо необхідності врахування області допустимих значень параметра», досить поширеними помилками при використанні зазначених алгоритмів є «сприймання» $\square$ і $\triangle$ як *двох незалежних одна від іншої величин-параметрів*, причому які *завжди існують* (тобто, *якщо* $\triangle \neq 0$, *то обов'язково* $\triangle > 0$ *або ж* $\triangle < 0$).

Автори даної статті вважають доцільним та можливим залучення задач з параметром до формування і розвинення алгоритмічної культури учнів. Тому **метою** статті є розробка алгоритмів розв'язання лінійних рівнянь та нерівностей із застосуванням понять та символів теорії множин.

1. Основна частина

1.1. Основні поняття та зауваження.

Означення 1. ([3], [4]) *Нехай* $f(a)$ *і* $g(a)$ *— аналітично задані функції параметра* a, x *— змінна. Тоді*

лінійним рівнянням із параметром будемо називати рівняння виду

$$f(a)\cdot x = g(a) \quad (\text{або ж} \quad f(a)\cdot x + g(a) = 0), \tag{1}$$

лінійною нерівністю із параметром — нерівності виду

$$f(a)\cdot x \asymp g(a), \tag{2}$$

де $\asymp$ *— один із чотирьох знаків порівняння:* $>$, $\geqslant$, $<$, $\leqslant$.

Очевидно, що як для рівняння (1), так і нерівності (2), областю допустимих значень (ОДЗ) змінної x є вся числова вісь, тобто $x \in (-\infty; +\infty)$.

Проте, оскільки (за визначенням) $f = f(a)$ і $g = g(a)$, тобто f і g є функціями від параметра (змінного) a, то в загальному випадку навіть для лінійних рівнянь та нерівностей, необхідно розглядати **область допустимих значень параметра** a.

Означення 2. *Областю* $D(a)$ *допустимих значень параметра* a *рівняння* (1) *(нерівності* (2)*) будемо називати перетин областей визначення* $D_f(a)$ *і* $D_g(a)$ *функцій* $f(a)$ *та* $g(a)$ *відповідно.*

Також очевидно, що якщо для функції $f = f(a)$ в загальному випадку розглядати «пряму параметра» ($a \in (-\infty; +\infty)$), то:
при певних значеннях параметра a функція $f(a)$ може взагалі не існувати;
при певних значеннях параметра a — може набувати додатних значень;
при певних значеннях параметра a — може набувати від'ємних значень;
при певних значеннях a — може виконуватися рівність $f(a) = 0$.

Зауваження 1. *Якщо ввести позначення для наступних множин*
$A = \{a|f(a) = 0\}$, $B = \{a|f(a) < 0\}$, $C = \{a|f(a) > 0\}$ *і* $D = \{a|f(a) - \nexists\}$,
то доповнення $\overline{A}$ *множини* A *до «прямої параметра» (як «універсальної множини») становить* $\overline{A} = B \cup C \cup D$.

З урахуванням зазначеного, автори вважають незайвим наголосити, що значення параметра a, які є розв'язками системи $\begin{cases} f(a) = 0 \\ g(a) \neq 0, \end{cases}$ більш ніж доцільно частіше інтерпретувати, як елементи множини

$$(D_g(a) \bigcap \{a|f(a) = 0\}) \setminus \{a|g(a) = 0\}.$$

1.2. Лінійні рівняння 1-го степеня з параметром.

Розв'язання рівняння виду

$$f\left(a\right)\cdot x=g\left(a\right) \tag{3}$$

Введемо наступні позначення:

$$D_{f,g}\left(a\right)=D_{f}\left(a\right)\bigcap D_{g}\left(a\right),\quad A_{1}=R\backslash D_{f,g}\left(a\right),$$

де: $D_f\left(a\right)$ — область визначення функції $f=f(a)$;

$D_g\left(a\right)$ — область визначення функції $g=g(a)$.

1) Нехай $f\left(a\right)\neq 0$. Тоді при всіх a, що задовольняють умови

$$\begin{cases} a\in D_{f,g}\left(a\right) \\ f\left(a\right)\neq 0 \end{cases}$$

рівняння (3) має єдиний корінь $x=\dfrac{g\left(a\right)}{f\left(a\right)}$.

Таким чином, якщо $a\in A_2\equiv D_{f,g}\left(a\right)\setminus\left\{a|f\left(a\right)=0\right\}$, то дане рівняння має один зазначений корінь.

2) Нехай тепер $f\left(a\right)=0$. Тоді можливими є два наступних випадки:

$$g\left(a\right)\neq 0 \quad \text{і} \quad g\left(a\right)=0.$$

2.1) Якщо $g\left(a\right)\neq 0$, то при всіх a, що задовольняють умови

$$\begin{cases} a\in D_{f,g}\left(a\right) \\ g\left(a\right)\neq 0 \end{cases}$$

рівняння (3) не має коренів. Таким чином, якщо $a\in A_3\equiv\left(D_g\left(a\right)\bigcap\left\{a|f\left(a\right)=0\right\}\right)\setminus\left\{a|g\left(a\right)=0\right\}$, то дане рівняння не має коренів.

2.2) Якщо ж $g\left(a\right)=0$, то при всіх a, що задовольняють умови

$$\begin{cases} f\left(a\right)=0 \\ g\left(a\right)=0 \end{cases}$$

рівняння (3) набуває вид $0\cdot x=0$, і тому має безліч коренів, а саме — $x\in R$.

Таким чином, якщо $a\in A_4\equiv\left\{a|f\left(a\right)=0=g(a)\right\}$, то будь-яке $x\in R$ є коренем даного рівняння.

Відповідь: якщо $a\in A_1$, то рівняння не має сенсу;
якщо $a\in A_2$, то рівняння має один корінь $x=\frac{g(a)}{f(a)}$;
якщо $a\in A_3$, то рівняння не має коренів;
якщо $a\in A_4$, то рівняння має безліч коренів – $x\in R$.

Зауваження 2. *Якщо одна із зазначених вище множин A_i є порожньою множиною ($\emptyset$), то відповідну складову у відповіді писати не потрібно.*

1.3. «Строгі» лінійні нерівності з параметром

Розв'язання нерівності виду

$$f(a) \cdot x > g(a). \tag{4}$$

Введемо наступні позначення:

$$D_{f,g}(a) = D_f(a) \bigcap D_g(a), \quad A_1 = R \backslash D_{f,g}(a),$$

де: $D_f(a)$ — область визначення функції $f = f(a)$;

$D_g(a)$ — область визначення функції $g = g(a)$.

1) Нехай $f(a) > 0$. Тоді (при відповідних значеннях параметра a) нерівність (4) є рівносильною до нерівності

$$x > \frac{g(a)}{f(a)} \tag{5}$$

Таким чином, якщо $a \in A_2 \equiv D_g(a) \bigcap \{a | f(a) > 0\}$, то розв'язками даної нерівності є $x \in \left(\frac{g(a)}{f(a)}; +\infty\right)$.

2) Нехай $f(a) < 0$. Тоді (при відповідних значеннях параметра a) нерівність (4) є рівносильною до нерівності

$$x < \frac{g(a)}{f(a)} \tag{6}$$

Таким чином, якщо $a \in A_3 \equiv D_g(a) \bigcap \{a | f(a) < 0\}$, то розв'язками даної нерівності є $x \in \left(-\infty; \frac{g(a)}{f(a)}\right)$.

3) Нехай $f(a) = 0$. Тоді (при відповідних значеннях параметра a) нерівність (4) набуває вид

$$0 \cdot x > g(a) \tag{7}$$

та можливими є два суттєво різні випадки: $g(a) \geqslant 0$ і $g(a) < 0$.

3.1) Якщо $g(a) \geqslant 0$, то нерівність (7) не має розв'язків.

3.2) Якщо ж $g(a) < 0$, то розв'язками нерівності (7) є множина всіх дійсних чисел.

Таким чином:

якщо $a \in A_4 \equiv \{a | f(a) = 0\} \bigcap \{a | g(a) \geqslant 0\}$, то нерівність не має розв'язків;

якщо $a \in A_5 \equiv \{a | f(a) = 0\} \bigcap \{a | g(a) < 0\}$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.

Відповідь:
- якщо $a \in A_1$, то нерівність не має сенсу;
- якщо $a \in A_2$, то розв'язками нерівності є $x \in \left(\frac{g(a)}{f(a)}; +\infty\right)$;
- якщо $a \in A_3$, то розв'язками нерівності є $x \in \left(-\infty; \frac{g(a)}{f(a)}\right)$;
- якщо $a \in A_4$, то нерівність не має розв'язків;
- якщо $a \in A_5$, то розв'язками нерівності є $x \in (-\infty; +\infty)$.

1.4. «Нестрогі» лінійні нерівності з параметром

Розв'язання нерівності виду

$$f\,(a)\cdot x \geqslant g\,(a)\,. \tag{8}$$

Нехай, як і в попередньому випадку, $D_{f,g}\,(a) = D_f\,(a) \bigcap D_g\,(a)\,,$ $A_1 = R\backslash D_{f,g}\,(a)\,,$ де $D_f\,(a)\,,$ $D_g\,(a)$ — області визначення функцій $f = f(a)$ та $g = g(a)$ відповідно. Тоді, з очевидними змінами, маємо наступний алгоритм розв'язання нерівності (8).

1) Нехай $f\,(a) > 0$. Тоді (при відповідних значеннях параметра a) нерівність (8) є рівносильною до нерівності

$$x \geqslant \frac{g\,(a)}{f\,(a)}. \tag{9}$$

Таким чином, якщо $a \in A_2 \equiv D_g\,(a) \bigcap \{a | f\,(a) > 0\}$, то розв'язками нерівності (8) є $x \in \left[\frac{g(a)}{f(a)}; +\infty\right)$.

2) Нехай $f\,(a) < 0$. Тоді (при відповідних значеннях параметра a) нерівність (8) є рівносильною до нерівності

$$x \leqslant \frac{g\,(a)}{f\,(a)}. \tag{10}$$

Таким чином, якщо $a \in A_3 \equiv D_g\,(a) \bigcap \{a | f\,(a) < 0\}$, то розв'язками нерівності (8) є $x \in \left(-\infty; \frac{g(a)}{f(a)}\right]$.

3) Нехай $f\,(a) = 0$. Тоді (при відповідних значеннях параметра a) нерівність (8) набуває вид

$$0 \cdot x \geqslant g\,(a) \tag{11}$$

та можливими є два суттєво різні випадки: $g\,(a) > 0$ і $g\,(a) \leqslant 0$.

3.1) Якщо $g\,(a) > 0$, то нерівність (11) не має розв'язків.

3.2) Якщо ж $g\,(a) \leqslant 0$, то розв'язками нерівності (11) є множина всіх дійсних чисел.

Таким чином:
якщо $a \in A_4 \equiv \{a | f\,(a) = 0\} \bigcap \{a | g\,(a) > 0\}$, то нерівність не має розв'язків;
якщо $a \in A_5 \equiv \{a | f\,(a) = 0\} \bigcap \{a | g\,(a) \leqslant 0\}$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.

Відповідь: якщо $a \in A_1$, то нерівність не має сенсу;
якщо $a \in A_2$, то розв'язками нерівності є $x \in \left[\frac{g(a)}{f(a)}; +\infty\right)$;
якщо $a \in A_3$, то розв'язками нерівності є $x \in \left(-\infty; \frac{g(a)}{f(a)}\right]$;
якщо $a \in A_4$, то нерівність не має розв'язків;
якщо $a \in A_5$, то розв'язками нерівності є $x \in (-\infty; +\infty)$.

Приклад 1. *Розв'язати рівняння*

$$x\sqrt{a+1} - \frac{a^2-1}{a-2} = 0. \tag{12}$$

Подамо рівняння (12) у вигляді

$$\sqrt{a+1}\cdot x = \frac{a^2-1}{a-2}. \tag{13}$$

Тоді:

$f = f(a) = \sqrt{a+1}\,,\quad D_f\,(a) = [-1;+\infty)\,;$
$g = g(a) = \frac{a^2-1}{a-2}\,,\quad D_g\,(a) = R\backslash\{2\}\,;$
$D_{f,g}\,(a) = D_f\,(a)\bigcap D_g\,(a) = [-1;2)\bigcup(2;+\infty)\,;$
$A_1 = R\backslash D_{f,g}\,(a) = (-\infty;-1)\bigcup\{2\}\,.$

1) *Нехай* $f\,(a) \neq 0$. *Оскільки* $f(a) = 0 \Leftrightarrow a = -1$, *то* $A_2 \equiv D_{f,g}\,(a) \setminus \{a|f\,(a) = 0\} \equiv (-1;2)\bigcup(2;+\infty)\,.$

Таким чином, якщо $a \in (-1;2)\bigcup(2;+\infty)$, *то дане рівняння має єдиний корінь* $x = \dfrac{a^2-1}{(a-2)\sqrt{a+1}}$.

2) *Нехай тепер* $f\,(a) = 0 \Leftrightarrow a = -1$. *Тоді можливими є два наступних випадки:*

$$g\,(a) = \frac{a^2-1}{a-2} \neq 0 \quad i \quad g\,(a) = \frac{a^2-1}{a-2} = 0\,.$$

Оскільки $g\,(a) = \dfrac{a^2-1}{a-2} = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$, *то*

2.1) $A_3 \equiv (D_g\,(a)\bigcap\{a|f\,(a) = 0\}) \setminus \{a|g\,(a) = 0\} \equiv \emptyset\,;$

2.2) $A_4 \equiv \{a|f\,(a) = 0 = g(a)\} = \{-1\}$, *звідки маємо: якщо* $a \in \{-1\}$ ($a = -1$), *то будь-яке* $x \in R$ *є коренем даного рівняння.*

Відповідь: *якщо* $a \in (-\infty;-1)\bigcup\{2\}$, *то рівняння не має сенсу;*
якщо $a \in (-1;2)\bigcup(2;+\infty)$, *то рівняння має*
один корінь $x = \dfrac{a^2-1}{(a-2)\sqrt{a+1}}$;
якщо $a = -1$, *то рівняння має*
безліч коренів – $x \in (-\infty;+\infty)$.

Задача 1. *Розв'яжіть рівняння*

$$x\cdot\frac{a^2-1}{a-2} - \sqrt{a+1} = 0. \tag{14}$$

Приклад 2. *Розв'язати нерівність*

$$x \cdot \frac{a^2-1}{a-2} \geqslant \sqrt{a+1}. \tag{15}$$

В нашому випадку:
$f = f(a) = \frac{a^2-1}{a-2}$, $D_f(a) = R\backslash\{2\}$; $g = g(a) = \sqrt{a+1}$, $D_g(a) = [-1; +\infty)$; $D_{f,g}(a) = D_f(a) \bigcap D_g(a) = [-1; 2) \cup (2; +\infty)$; $A_1 = (-\infty; -1) \cup \{2\}$.
1) *Нехай* $f(a) > 0$. *Тоді при відповідних значеннях параметра* a *(розв'язках нерівності* $\frac{a^2-1}{a-2} > 0$, *що належать* $D_g(a) = [-1; +\infty)$*) нерівність (15) є рівносильною до нерівності* $x \geqslant \frac{(a-2)\sqrt{a+1}}{a^2-1}$.

Оскільки $\frac{a^2-1}{a-2} > 0 \Leftrightarrow a \in (-1; 1) \cup (2; +\infty)$, *то*
$A_2 \equiv D_g(a) \cap \{a|f(a) > 0\} \equiv (-1; 1) \cup (2; +\infty)$. *І тому при значеннях* $a \in (-1; 1) \cup (2; +\infty)$ *розв'язками нерівності (15) є* $x \in \left[\frac{(a-2)\sqrt{a+1}}{a^2-1}; +\infty\right)$.
2) *Нехай* $f(a) < 0$. *Тоді при відповідних значеннях параметра* a *(розв'язках нерівності* $\frac{a^2-1}{a-2} < 0$, *що належать* $D_g(a) = [-1; +\infty)$*) нерівність (15) є рівносильною до нерівності* $x \leqslant \frac{(a-2)\sqrt{a+1}}{a^2-1}$.

Оскільки $\frac{a^2-1}{a-2} < 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -1) \cup (1; 2)$, *то*
$A_3 \equiv D_g(a) \cap \{a|f(a) < 0\} \equiv (1; 2)$. *І тому при значеннях параметра* $a \in (1; 2)$ *розв'язками нерівності (15) є* $x \in \left(-\infty; \frac{(a-2)\sqrt{a+1}}{a^2-1}\right]$.
3) *Нехай* $f(a) = 0$. *Тоді при відповідних значеннях* a *(коренях рівняння* $\frac{a^2-1}{a-2} = 0$, *що належать* $D_g(a) = [-1; +\infty)$*) нерівність (15) набуває вид*

$$0 \cdot x \geqslant \sqrt{a+1} \tag{16}$$

та можливими є два суттєво різні випадки: $\sqrt{a+1} > 0$ *і* $\sqrt{a+1} \leqslant 0$.

3.1) *Якщо* $\sqrt{a+1} > 0 \Leftrightarrow a \in (-1; +\infty)$, *то (16) не має розв'язків.*

3.2) *Якщо ж* $\sqrt{a+1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{a+1} = 0 \Leftrightarrow a = -1$, *то розв'язками нерівності (16) є множина всіх дійсних чисел.*

Оскільки $f(a) = \frac{a^2-1}{a-2} = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$, *то:*
якщо $a \in A_4 \equiv \{a|f(a) = 0\} \cap \{a|g(a) > 0\} \equiv \{1\}$, *то нерівність (15) не має розв'язків;*
якщо ж $a \in A_5 \equiv \{a|f(a) = 0\} \cap \{a|g(a) \leqslant 0\} \equiv \{-1\}$, *то* $x \in (-\infty; +\infty)$.

Відповідь: *якщо* $a \in (-\infty; -1) \cup \{2\}$, *то нерівність не має сенсу;*
якщо $a \in (-1; 1) \cup (2; +\infty)$, *то* $x \in \left[\frac{(a-2)\sqrt{a+1}}{a^2-1}; +\infty\right)$;
якщо $a \in (1; 2)$, *то* $x \in \left(-\infty; \frac{(a-2)\sqrt{a+1}}{a^2-1}\right]$;
якщо $a = 1$, *то нерівність не має розв'язків;*
якщо $a = -1$, *то* $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. Алгоритми до розв'язування лінійних рівнянь та нерівностей з параметром

Кожен з пунктів (1), 2), 3), ...) в наведених нижче алгоритмах слід розглядати як **вимогу-завдання** до знаходження відповідних значень параметра a. Щоб не переобтяжувати алгоритми супровідною текстовою складовою, зазначені вимоги-завдання доцільно подавати у вигляді відповідних множин.

Алгоритми 1, 2 і 3 є безпосередніми наслідками пунктів 1.2, 1.3 та 1.4 відповідно. Алгоритми 4 і 5 доцільно запропонувати учням в якості завдання для самостійного «переодержання».

Крім того, якщо одна з множин A_i є порожньою множиною ($\emptyset$), то, як було зазначено раніше, відповідну складову у відповіді писати не потрібно.

Також хочемо наголосити, що запропоновані нижче алгоритми не є самоціллю та не повинні стати «зазубреним керівництвом» до розв'язання лінійних рівнянь та нерівностей з параметром. Навпаки, вони повинні бути результатом переосмислення класичних граф-схем та покликані наштовхнути на розуміння необхідності виконання відповідних кроків, пов'язаних зі знаходженням необхідних значень параметра.

З іншого боку, маємо надію, що запропонований підхід дозволить забезпечити належний рівень математичної строгості та посилить розуміння зв'язків між змістовими модулями у шкільному курсі математики.

Алгоритм 1 до розв'язання рівняння $f(a)\cdot x = g(a)$

1) $D_f(a)$ – область визначення $f = f(a)$;
2) $D_g(a)$ – область визначення $g = g(a)$;
3) $D_{f,g}(a) \equiv D_f(a) \bigcap D_g(a) \Leftrightarrow D_{f,g}(a) \equiv \left\{ a \,\middle|\, \begin{cases} a \in D_f(a) \\ a \in D_g(a) \end{cases} \right\}$;
4) $A_1 \equiv R \backslash D_{f,g}(a)$;
5) $F_0 \equiv \{a | f(a) = 0\}$;
6) $G_0 \equiv \{a | g(a) = 0\}$;
7) $A_2 \equiv D_{f,g}(a) \backslash F_0$;
8) $A_3 \equiv (D_g(a) \bigcap F_0) \backslash G_0$;
9) $A_4 \equiv F_0 \bigcap G_0$.

Відповідь:

якщо $a \in A_1$, то рівняння не має сенсу;
якщо $a \in A_2$, то рівняння має один корінь $x = \frac{g(a)}{f(a)}$;
якщо $a \in A_3$, то рівняння не має коренів;
якщо $a \in A_4$, то рівняння має безліч коренів – $x \in (-\infty; +\infty)$.

Алгоритм 2 до розв'язання нерівності $f(a) \cdot x > g(a)$

1) $D_f(a)$ – область визначення $f = f(a)$;
2) $D_g(a)$ – область визначення $g = g(a)$;
3) $D_{f,g}(a) \equiv D_f(a) \bigcap D_g(a)$;
4) $A_1 \equiv R \backslash D_{f,g}(a)$;
5) $F_0 \equiv \{a | f(a) = 0\}$, $F_+ \equiv \{a | f(a) > 0\}$, $F_- \equiv \{a | f(a) < 0\}$;
6) $A_2 \equiv D_g(a) \bigcap F_+$;
7) $A_3 \equiv D_g(a) \bigcap F_-$;
8) $G_{0+} \equiv \{a | g(a) \geqslant 0\}$, $G_- \equiv \{a | g(a) < 0\}$;
9) $A_4 \equiv F_0 \bigcap G_{0+}$;
10) $A_5 \equiv F_0 \bigcap G_-$.

Відповідь:

якщо $a \in A_1$, то нерівність не має сенсу;
якщо $a \in A_2$, то розв'язками нерівності є $x \in \left(\frac{g(a)}{f(a)}; +\infty\right)$;
якщо $a \in A_3$, то розв'язками нерівності є $x \in \left(-\infty; \frac{g(a)}{f(a)}\right)$;
якщо $a \in A_4$, то нерівність не має розв'язків;
якщо $a \in A_5$, то розв'язками нерівності є $x \in (-\infty; +\infty)$.

Алгоритм 3 до розв'язання нерівності $f(a) \cdot x \geqslant g(a)$

1) $D_f(a)$ – область визначення $f = f(a)$;
2) $D_g(a)$ – область визначення $g = g(a)$;
3) $D_{f,g}(a) \equiv D_f(a) \bigcap D_g(a)$;
4) $A_1 \equiv R \backslash D_{f,g}(a)$;
5) $F_0 \equiv \{a | f(a) = 0\}$, $F_+ \equiv \{a | f(a) > 0\}$, $F_- \equiv \{a | f(a) < 0\}$;
6) $A_2 \equiv D_g(a) \bigcap F_+$;
7) $A_3 \equiv D_g(a) \bigcap F_-$;
8) $G_+ \equiv \{a | g(a) > 0\}$, $G_{-0} \equiv \{a | g(a) \leqslant 0\}$;
9) $A_4 \equiv F_0 \bigcap G_+$;
10) $A_5 \equiv F_0 \bigcap G_{-0}$.

Відповідь:

якщо $a \in A_1$, то нерівність не має сенсу;
якщо $a \in A_2$, то розв'язками нерівності є $x \in \left[\frac{g(a)}{f(a)}; +\infty\right)$;
якщо $a \in A_3$, то розв'язками нерівності є $x \in \left(-\infty; \frac{g(a)}{f(a)}\right]$;
якщо $a \in A_4$, то нерівність не має розв'язків;
якщо $a \in A_5$, то розв'язками нерівності є $x \in (-\infty; +\infty)$.

Алгоритм 4 до розв'язання нерівності $f(a)\cdot x < g(a)$

1) $D_f(a)$ – область визначення $f = f(a)$;
2) $D_g(a)$ – область визначення $g = g(a)$;
3) $D_{f,g}(a) \equiv D_f(a) \bigcap D_g(a)$;
4) $A_1 \equiv R \backslash D_{f,g}(a)$;
5) $F_0 \equiv \{a | f(a) = 0\}, F_+ \equiv \{a | f(a) > 0\}, F_- \equiv \{a | f(a) < 0\}$;
6) $A_2 \equiv D_g(a) \bigcap F_+$;
7) $A_3 \equiv D_g(a) \bigcap F_-$;
8) $G_+ \equiv \{a | g(a) > 0\}, G_{-0} \equiv \{a | g(a) \leqslant 0\}$;
9) $A_4 \equiv F_0 \bigcap G_+$;
10) $A_5 \equiv F_0 \bigcap G_{-0}$.

Відповідь: якщо $a \in A_1$, то нерівність не має сенсу;
якщо $a \in A_2$, то розв'язками нерівності є $x \in \left(-\infty; \frac{g(a)}{f(a)}\right)$;
якщо $a \in A_3$, то розв'язками нерівності є $x \in \left(\frac{g(a)}{f(a)}; +\infty\right)$;
якщо $a \in A_4$, то розв'язками нерівності є $x \in (-\infty; +\infty)$;
якщо $a \in A_5$, то нерівність не має розв'язків.

Алгоритм 5 до розв'язання нерівності $f(a)\cdot x \leqslant g(a)$

1) $D_f(a)$ – область визначення $f = f(a)$;
2) $D_g(a)$ – область визначення $g = g(a)$;
3) $D_{f,g}(a) \equiv D_f(a) \bigcap D_g(a)$;
4) $A_1 \equiv R \backslash D_{f,g}(a)$;
5) $F_0 \equiv \{a | f(a) = 0\}, F_+ \equiv \{a | f(a) > 0\}, F_- \equiv \{a | f(a) < 0\}$;
6) $A_2 \equiv D_g(a) \bigcap F_+$;
7) $A_3 \equiv D_g(a) \bigcap F_-$;
8) $G_{0+} \equiv \{a | g(a) \geqslant 0\}, G_- \equiv \{a | g(a) < 0\}$;
9) $A_4 \equiv F_0 \bigcap G_{0+}$;
10) $A_5 \equiv F_0 \bigcap G_-$.

Відповідь: якщо $a \in A_1$, то нерівність не має сенсу;
якщо $a \in A_2$, то розв'язками нерівності є $x \in \left(-\infty; \frac{g(a)}{f(a)}\right]$;
якщо $a \in A_3$, то розв'язками нерівності є $x \in \left[\frac{g(a)}{f(a)}; +\infty\right)$;
якщо $a \in A_4$, то розв'язками нерівності є $x \in (-\infty; +\infty)$;
якщо $a \in A_5$, то нерівність не має розв'язків.

Висновки

Маємо щиру надію, що наведені алгоритми не призведуть до, так званого, «формалізму» під час розв'язування лінійних рівнянь та нерівностей з параметром, а, навпаки — доповнять граф-схеми добре відомих відповідних алгоритмів супровідним типом задач та забезпечуватимуть дотримання належного рівня математичної строгості.

Автори переконані, що запропонований підхід доцільно перенести на рівняння та нерівності (з однією змінною) другого степеня з параметром.

Література

1. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. — Х. : Гімназія, 2016. — 384 с.
2. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. — Х. : Гімназія, 2017. — 416 с.
3. *Прус А.В., Швець В.О.* Задачі з параметрами в шкільному курсі математики основної школи. Частина 1. — Х. : Вид. група «Основа», 2016. — 107, [5] с. (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 10 (166)).
4. *Прус А.В., Швець В.О.* Задачі з параметрами в шкільному курсі математики основної школи. Частина 2. — Х. : Вид. група «Основа», 2016. — 137, [7] с. (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 11 (167)).
5. *Прус А.В., Швець В.О.* Задачі з параметрами в шкільному курсі математики. Навчально-методичний посібник. — Житомир: Вид-во «Рута», 2016. — 468 с.
6. *Крамор С.В.* Задачі з параметрами і методи їх розв'язання. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. — 416 с.

Besedin Boris B., Kadubovs'kyi Oleksandr A., Frolov Kyrylo O.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

On the algorithmic approach to solving linear equations and inequalities (with one variable) with a parameter

The article covers the author's experience in applying of the algorithmic approach during learning of methods for solving linear equations and inequalities with the parameter. In terms which are beyond the scope of the program content module "Sets and operations on them" for schoolchildren of the 8th form with advanced study of mathematics, five solution algorithms are of linear equations and inequalities with the parameter are proposed and two illustrative examples are given.

Keywords: *linear equations with a parameter, linear inequalities with a parameter, solution algorithm.*