УДК 37.016:514.112.4

Лавренюк А.Ф., Кадубовська В.М., Кадубовський О.А.

[1] *студентка 2 курсу (магістратура) фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *вчитель математики вищої категорії, вчитель-методист, Олександрівська ЗОШ I-III ступенів*

[3] *канд. фізико-математичних наук, доцент каф. математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: lavrenuk313@ukr.net, kadubovs@ukr.net

ПРО ОДИН ВИД ПАРАЛЕЛОГРАМІВ ТА ДЕЯКІ СУМІЖНІ ПИТАННЯ

В статті розглядаються паралелограми, у яких кут між сторонами дорівнює куту між діагоналями. Запропоновано один з можливих підходів до ознайомлення учнів із зазначеним видом паралелограмів у шкільному курсі геометрії. Крім низки суміжних методичних аспектів, наведено класифікації паралелограмів за різними основами, зокрема авторський підхід до поетапної класифікації паралелограмів за п'ятьма основами.

Ключові слова: *паралелограми, навчання геометрії, класифікації паралелограмів*

Вступ

Однією з важливих складових фахової підготовки студентів педагогічних закладів вищої освіти (ПЗВО) є саме методична підготовка, результатом якої повинна стати сформованість комплексу компетентностей — «готовність до самостійної методичної діяльності».

Не можна не погодитися із Сарвановою Є.А., яка зазначає, що найбільш складним моментом напочатку методичної діяльності студентів є перехід від теоретичної підготовки до виконання методичних дій вчителя. Причому цей перехід відбувається успішно лише за умов, коли в навчальній діяльності студентів створюються умови для формування методичних вмінь безпосередньо на матеріалі шкільного курсу [13]. Одним з можливих підходів до вирішення зазначеного завдання є підвищення методичної спрямованості «практикумів з розв'язування математичних задач» шляхом наближення їх змісту до вимог майбутньої педагогічної діяльності.

У зв'язку з цим актуальним постає питання щодо розробки таких блоків задач (пов'язаних спільним змістом), аналіз методів розв'язування (з урахуванням хронології вивчення навчального матеріалу за діючими програмами з математики для закладів загальної середньої освіти) та результати яких, давали би можливість з'ясовувати істотні властивості понять, що розглядаються, та їх зв'язок з досліджуваним теоретичним матеріалом.

За діючими програмами змістова лінія «Паралелограми» передбачає вивчення основних властивостей і ознак паралелограма, основних властивостей і ознак окремих його видів (прямокутника, ромба, квадрата) та їх застосування до розв'язування задач, зокрема на доведення.

Співвідношення (зв'язок) між окремими видами паралелограмів зазвичай супроводжують наочними рисунками, в яких перетином множини прямокутників та множини ромбів є множина квадратів [4], [6].

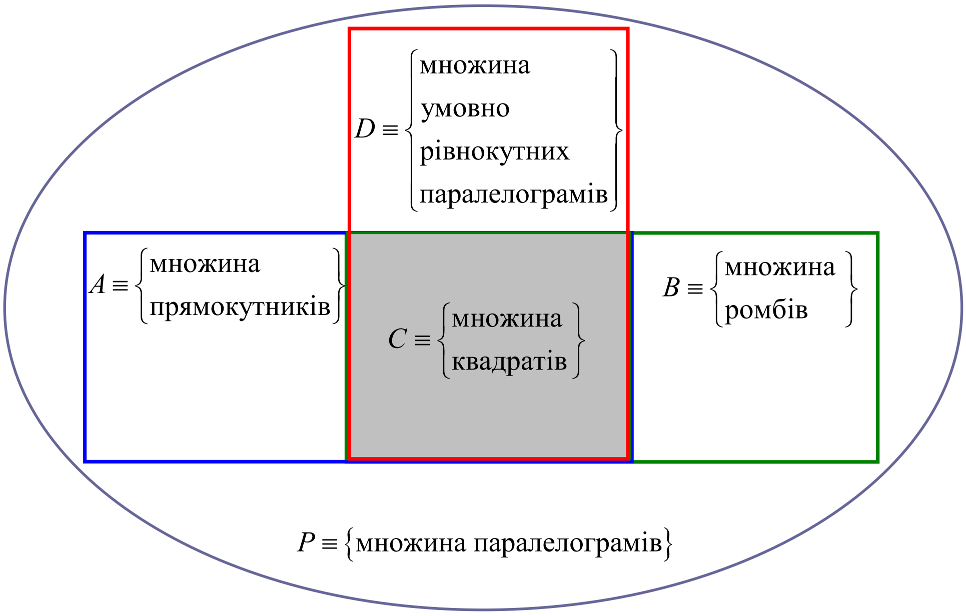
При класифікації ж паралелограмів зазвичай дотримуються одного з двох поширених підходів, суть яких не змінилися з часів їх викладу в [1], [15].

Проте, незважаючи на добре висвітлені в методичній літературі вимоги та рекомендації щодо класифікації математичних понять, зокрема геометричних об'єктів (напр., [2], [16]), навіть деякі студенти математичних спеціальностей педагогічних закладів вищої освіти, а інколи й молоді вчителі математики, «класифікуючі» паралелограми дозволяють собі наступну «класифікацію: *прямокутники, ромби, квадрати та інші*». Звісно ж, що такий стан справ не може не викликати занепокоєння. Зазначена плутанина між «класифікацією» та «співвідношення між окремими видами», відбувається можливо через те, що в навчально-методичній літературі класифікаціям об'єктів певної множини A за різними основами та зв'язку між окремими їх видами (підмножинами множини A) приділяється досить поверхнева увага.

Друге питання (в контексті вивчення паралелограмів), яке автори не можуть залишити поза увагою, пов'язано з тим, що: серед метричних задач на паралелограми загального виду (що не є ромбами або ж прямокутниками), в діючих підручниках пропонують паралелограми, гострий кут між сторонами (або ж діагоналями) яких переважно становить $30^0, 45^0$ і 60^0, або ж паралелограми з додатковою формальною «умовою – метричним співвідношенням», яке, зазвичай, не носить геометричної цінності. І хоча розгляд паралелограмів саме з такими кутами є однозначно виправданим, *проте, нажаль, в діючих підручниках з геометрії для 8 і 9 класів (навіть з поглибленим вивченням математики) не пропонується до розгляду* ***паралелограм, (нетупий) кут між сторонами якого дорівнює куту між його діагоналями***.

З урахуванням задач №10.044 з [14], №83 з [3], №46 з [12], зазначений вид паралелограмів існує та коректно визначений.

Першим з аспектів, який привернув увагу авторів до зазначеного виду паралелограмів (надалі називатимемо їх умовно рівнокутними) є те, що множина таких паралелограмів не співпадає з множиною прямокутників, не співпадає з множиною ромбів, а її перетином з кожною із зазначених множин є множина квадратів.



Другий з аспектів пов'язано з ознаками окремих видів паралелограма. Відомо, що паралелограм є прямокутником (ромбом) тоді і лише тоді, коли його паралелограм Варіньона є ромбом (відповідно прямокутником); паралелограм є *квадратом* тоді і лише тоді, коли його паралелограм Варіньона є *квадратом*. Як з'ясувалося, паралелограм є *умовно рівнокутним* тоді і лише тоді, коли його паралелограм Варіньона є *умовно рівнокутним*.

Третій аспект пов'язано із «природою появи числа $\sqrt{2}$» для квадрату: добре відомо, що діагональ d квадрата зі стороною a становить $d = a\sqrt{2}$; також відомо, що ця залежність є безпосереднім наслідком з теореми Піфагора та, зазвичай, цю рівність відносять до властивостей саме квадрата. Проте, як з'ясувалося, поява зазначеної залежності повинна завдячувати відповідній властивості паралелограма, яка має місце лише у випадку, коли кут між сторонами паралелограма дорівнює куту між його діагоналями.

Четвертий аспект. Добре відомо, що характеристичною властивістю-ознакою, яка вирізняє паралелограми з решти чотирикутників, є, так звана, рівність паралелограма — «сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів всіх його сторін», яку можна переформулювати в еквівалентній формі — «сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює подвоєній сумі квадратів непаралельних його сторін». Як з'ясувалося, характеристичною властивістю-ознакою, яка вирізняє умовно рівнокутні паралелограми з решти паралелограмів, є рівність умовно рівнокутного паралелограма — «різниця квадратів діагоналей паралелограма дорівнює подвоєній різниці квадратів непаралельних його сторін».

Середини сторін довільного (в тому числі неопуклого та просторового) чотирикутника є вершинами паралелограма (який називають паралелограмом Варіньона)

Третє питання (до якого природно призводить друге), пов'язано з тим, що при вивченні геометричних об'єктів

> крім задач, які складають основу обов'язкового теоретичного матеріалу, результати яких використовуються в подальшому навчальному матеріалі та знаходять застосування при розв'язувані більш складних задач

досить важливі відомості про об'єкти (що вивчаються) містяться серед цілої низки задач, але їх розв'язання (а тому й ознайомлення з відповідними фактами) *не може проходити паралельно з вивченням певного об'єкту, оскільки для цього необхідними є нові факти і методи, які за програмою розглядаються значно пізніше*. Ось чому уроки «узагальнення та систематизації знань», особливо в кінці навчального року, є вкрай важливими для вивчення геометричних об'єктів (зокрема паралелограмів) в шкільному курсі геометрії.

В контексті зазначеного, вважаємо доцільним звернути увагу на роботи [11] і [8], які присвячено систематизації та узагальненню фактів про трапеції.

Серед статей, присвячених систематизації та узагальненню фактів про паралелограми, слід виділити [9] і [10]. Зокрема в [9] наведено низку джерел: присвячених дидактичному забезпеченню вивчення теми «паралелограми»; навчальних посібників з елементарної геометрії, в яких наведено яскраві геометричні факти, що не ввійшли до шкільних підручників; збірників задач, які містять доволі широке коло задач (на паралелограми) різного рівня складності, зокрема теоретичного характеру.

Представлену статтю можна вважати певним доповненням та логічним продовженням статті [9]. Однак основною **метою** статті є спроба вирішення завдання щодо розробки одного з блоків задач (про які зазначалося вище) на прикладі рівнокутного паралелограма та виклад можливого підходу до ознайомлення учнів в шкільному курсі геометрії з умовно рівнокутними паралелограмами.

Одним із **завдань** статті — привернути увагу вчителів математики до зазначеного виду паралелограмів, як сировини для нових цікавих задач, зокрема для проведення олімпіад.

Саму ж статтю умовно можна розбити на три частини: *в першій* — для зазначеного виду паралелограмів наведено відповідне визначення, приклад, найпростішу властивість та найпростішу ознаку; *в другій* — викладена авторська розробка щодо можливого впровадження зазначеного виду паралелограмів до шкільного курсу геометрії, зокрема найпростіші метричні співвідношення та 12 властивостей-ознак; *в третій* — можливі класифікації паралелограмів за різними основами, зокрема авторський підхід до поетапної класифікації паралелограмів за п'ятьма основами.

1. Основні поняття та попередні відомості

Означення 1. ([6]) ***Паралелограмом*** *називають чотирикутник, у якого кожні дві протилежні сторони паралельні.* ***Прямокутником*** *— паралелограм, у якого всі кути прямі.* ***Ромбом*** *— паралелограм, у якого всі сторони рівні.* ***Квадратом*** *— прямокутник, у якого всі сторони рівні.*

Як вже зазначалося у вступі, мають місце наступні твердження

Твердження 1. **(задача №10.044 з [14]; задача №83 з [3])**
«Длины диагоналей параллелограмма пропорциональны длинам его непараллельных сторон. Доказать, что углы между диагоналями такого параллелограмма равны его углам.»

Твердження 2. **(задача №46 з [12])**
«В параллелограмме $ABCD$ $AC = AB\sqrt{2}$. Докажите, что угол между диагоналями равен углу между его сторонами.»

Тому цілком коректно можна визначити наступний вид паралелограмів

Означення 2. *Паралелограм будемо називати* ***умовно рівнокутним****, якщо (нетупий) кут між сторонами дорівнює куту між його діагоналями.*

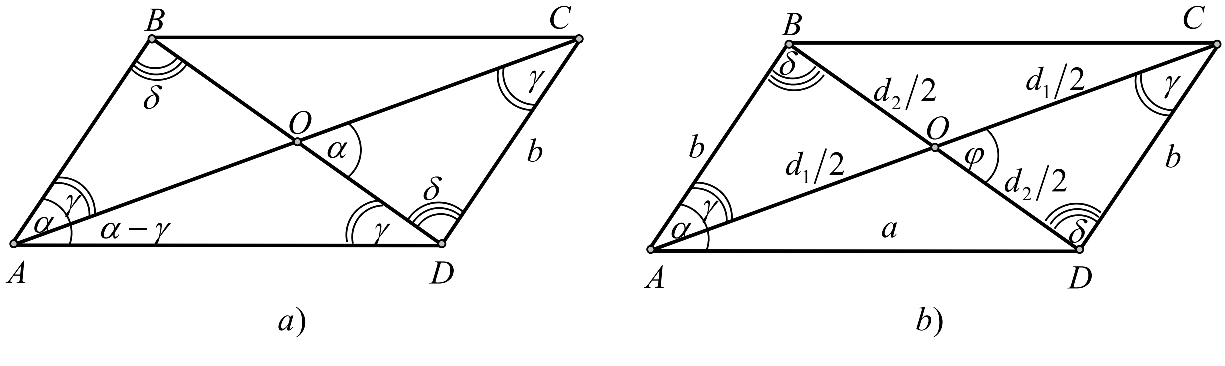


Рис. 1:

Приклад 1. *Оскільки у квадрата кут між (непаралельними) сторонами та кут між діагоналями становить 90^0, то квадрат є прикладом умовно рівнокутного паралелограма.*

Властивість 1. *В умовно рівнокутному паралелограмі кут між більшою діагоналлю та меншою стороною дорівнює куту між меншою діагоналлю та більшою стороною (рис. 1 a)).*

Вправа 1. (ознака) *Покажіть, що якщо в паралелограмі кут між більшою діагоналлю та меншою стороною дорівнює куту між меншою діагоналлю та більшою стороною, то такий паралелограм є умовно рівнокутним.*

2. Основна частина.

2.1. Допоміжні позначення та домовленості

Нехай в паралелограмі $ABCD$ (рис. 1 b)): $O = AC \cap BD$, $AD = a$, $AB = b$, $AC = d_1$, $BD = d_2$, $\angle ABD = \delta$, $\angle ACD = \gamma$, $\angle BAD = \alpha$, $\angle COD = \varphi$; h_a, h_b — довжини висот, опущених на сторони довжин a і b відповідно; h_1, h_2 — довжини перпендикулярів, опущених з вершин паралелограма на діагоналі довжин d_1 і d_2 відповідно.

В подальшому, заради визначеності (та без втрати загальності), будемо вважати, що: 1) φ — нетупий кут між діагоналями ($0^\circ < \varphi \leqslant 90^\circ$); 2) α — нетупий кут між сторонами ($0^\circ < \alpha \leqslant 90^\circ$); 3) $a \geqslant b$.

Зауважимо, що за наведених умов, справджуються нерівності: $d_1 \geqslant d_2$, $h_1 \leqslant h_2$, $h_a \leqslant h_b$ (їх легко встановити після вивчення відповідних питань).

2.2. Один з підходів до реалізації ідеї щодо ознайомлення учнів з «умовно рівнокутними» паралелограмами

2.2.1. У 8 класі під час (після) вивчення теми «Подібність трикутників» можна запропонувати довести наступні твердження

Властивість 2. («пропедевтична») *Нехай O — точка перетину діагоналей AC і BD умовно рівнокутного паралелограма $ABCD$ з нетупим кутом $\angle A$, Q — середина сторони AD. Тоді:*

1) *трикутники DAB і COD є подібними;*
2) *довжини діагоналей пропорційні довжинам непаралельних сторін (а саме справджується пропорція $AC : AD = BD : AB$);*
3) *трикутники COD і DQO є подібними;*
4) $BD^2 = 2CD^2$, $AC \cdot BD = 2AD \cdot CD$, $AC^2 = 2AD^2$;
5) $AC = AD\sqrt{2}$, $BD = CD\sqrt{2}$, $AC^2 - BD^2 = 2\left(AD^2 - CD^2\right)$.

Наслідок 1. *В умовно рівнокутному паралелограмі відношення довжини більшої (меншої) діагоналі до довжини більшої (відповідно меншої) сторони становить $\sqrt{2}$.*

Задача 1. (ознака «з надлишковою умовою») *В паралелограмі $ABCD$ $AC = AD\sqrt{2}$, $BD = AB\sqrt{2}$. Доведіть, що $ABCD$ є умовно рівнокутним.*

Розв'язання. Нехай $AD = a$, $AB = b$, тоді $AC = a\sqrt{2}$, $BD = b\sqrt{2}$.

1) В трикутнику DAB: $DA = a$, $AB = b$, $BD = b\sqrt{2}$.
2) В трикутнику COD: $CO = \frac{AC}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $OD = \frac{BD}{2} = \frac{b}{\sqrt{2}}$, $DC = b$.

Оскільки
$$\frac{DA}{CO} = \frac{AB}{OD} = \frac{BD}{DC} = \sqrt{2},$$

то за III ознакою подібності трикутники DAB і COD є подібними. Звідки $\alpha = \angle DAB = \angle COD = \varphi$. □

2.2.2. У 8 класі під час (після) вивчення теми «Розв'язування прямокутних трикутників» можна запропонувати (ключову) задачу

Задача 2. (ознака) *Якщо у паралелограма довжини діагоналей пропорційні довжинам його непаралельних висот, то він є умовно рівнокутним.*

Розв'язання. Нехай h_a, h_b – довжини непаралельних висот (причому $h_b \geqslant h_a$), а d_1, d_2 – довжини діагоналей ($d_1 \geqslant d_2$) паралелограма, нетупі кути між сторонами та діагоналями якого становлять α і β відповідно.

Оскільки $d_1 \geqslant d_2 \Leftrightarrow \frac{d_1}{d_2} \geqslant 1$ і $h_b \geqslant h_a \Leftrightarrow \frac{h_b}{h_a} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{h_a}{h_b} \leqslant 1$, то, з урахуванням умови, має місце одна з можливих пропорцій:

$$1)\ \frac{d_1}{d_2} = \frac{h_b}{h_a} \quad \text{або ж} \quad 2)\ \frac{d_1}{d_2} = \frac{h_a}{h_b}.$$

1) Друга пропорція має місце лише за умов, коли $\dfrac{d_1}{d_2} = 1 = \dfrac{h_a}{h_b}$. Звідки $h_a = h_b$ і $d_1 = d_2$, тобто, паралелограм одночасно є і ромбом, і прямокутником, а тому — квадратом (умовно рівнокутним паралелограмом).

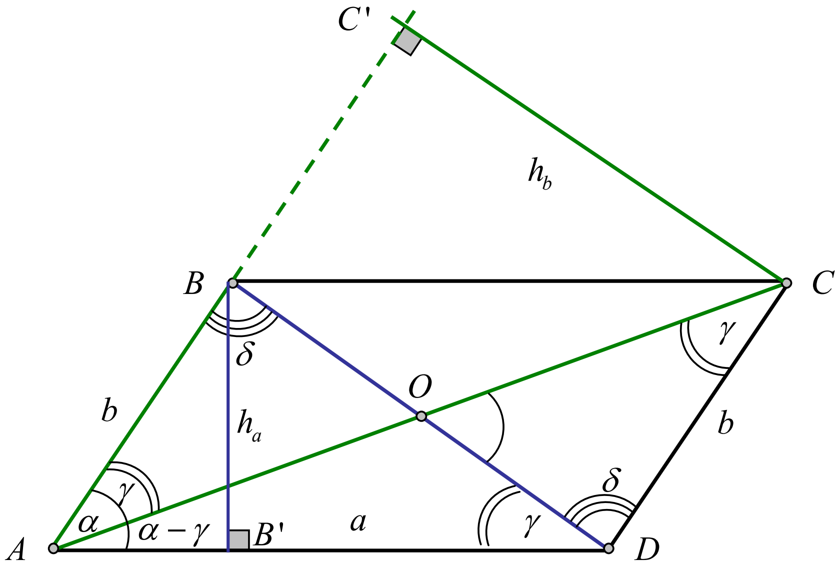


Рис. 2: до задачі 2.

2) З вершин B і C опустимо висоти BB' та CC' на сторони $AD = a$ і $AB = b$ відповідно. Тоді першу пропорцію можна подати у вигляді

$$\frac{BB'}{BD} = \frac{CC'}{AC}.$$

І тому прямокутні трикутники $DB'B$ і $AC'C$ є подібними. Звідки $\angle BDA = \angle BAC$. Але ж тоді за **вправою 1** паралелограм є умовно рівнокутним. □

2.2.3. У 8 класі під час (після) вивчення теми «Многокутники та їх площі» можна запропонувати довести наступні твердження

Задача 3. (ознака) *Якщо у паралелограма добуток діагоналей вдвічі більший за добуток двох непаралельних сторін, то він є умовно рівнокутним.*
Розв'язання. Оскільки $\frac{1}{2}d_1d_2 = ab$ (за умовою), а площу пралалелограма можна обчислити за формулами $S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi = ab\sin\alpha$, то маємо рівність $\sin\varphi = \sin\alpha$. З урахуванням зроблених раніше домовленостей ($0^0 < \alpha \leqslant 90^0$, $0^0 < \varphi \leqslant 90^0$), остання рівність можлива лише коли $\varphi = \alpha$. Звідки й випливає, що (нетупий) кут між сторонами дорівнює (нетупому) куту між діагоналями такого паралелограма. □

Задача 4. (ознака) *Якщо у паралелограма довжини діагоналей пропорційні довжинам непаралельних сторін, то він є умовно рівнокутним.*
Розв'язання. Нехай a, b — довжини непаралельних сторін ($a \geqslant b$), а d_1, d_2 — довжини діагоналей (причому $d_1 \geqslant d_2$) паралелограма, нетупі кути між сторонами та діагоналями якого становлять α і φ відповідно.

Оскільки $d_1 \geqslant d_2 \Leftrightarrow \frac{d_1}{d_2} \geqslant 1$ і $a \geqslant b \Leftrightarrow \frac{a}{b} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{b}{a} \leqslant 1$, то, з урахуванням умови, має місце одна з можливих пропорцій:

$$1)\ \frac{d_1}{d_2} = \frac{a}{b} \quad \text{або ж} \quad 2)\ \frac{d_1}{d_2} = \frac{b}{a}.$$

1) Друга пропорція має місце лише за умов, коли $\dfrac{d_1}{d_2} = 1 = \dfrac{b}{a}$. Звідки $a = b$ і $d_1 = d_2$, тобто, паралелограм одночасно є і ромбом, і прямокутником, а тому — квадратом (умовно рівнокутним паралелограмом).

2) Оскільки $S = ah_a = bh_b$, то першу пропорцію $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{a}{b}$ можна подати у вигляді $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{a/S}{b/S} = \dfrac{h_b}{h_a}$ або ж $\dfrac{h_a}{d_2} = \dfrac{h_b}{d_1}$. І тому, з урахуванням **задачі 2**, такий паралелограм є також умовно рівнокутним. □

Вправа 2. (ознака) *Покажіть, що якщо у паралелограма довжини сторін пропорційні довжинам непаралельних перпендикулярів, опущених з вершин на діагоналі, то він є умовно рівнокутним.*

Зауваження 1. *Нехай α — нетупий кут між (непаралельними) сторонами (довжин a і b), φ — нетупий кут між діагоналями (довжин d_1 і d_2) паралелограма. Тоді справджуються умови:*

1) $\alpha < \varphi \Leftrightarrow 2ab > d_1d_2$;
2) $\alpha = \varphi \Leftrightarrow 2ab = d_1d_2$;
3) $\alpha > \varphi \Leftrightarrow 2ab < d_1d_2$.

2.2.4. У 9 класі після вивчення теореми косинусів ...

Як добре відомо, одним з наслідків теореми косинусів є «**рівність паралелограма**», яка полягає у тому, що «сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів всіх його сторін». Тобто, згідно введених позначень, має місце рівність

$$d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right). \tag{1}$$

В якості наслідків з (1), можна запропонувати наступні завдання

Вправа 3. *Перевірити, що* $d_1 = a\sqrt{2}$ *тоді і лише тоді, коли* $d_2 = b\sqrt{2}$.

Задача 5. (ознака «без надлишкової умови») *Якщо у паралелограма відношення довжини діагоналі до довжини сторони становить* $\sqrt{2}$*, то такий паралелограм є умовно рівнокутним.*

Вказівка. Справедливість твердження є наслідком **вправи 3 та задачі 4**.

Задача 6. *Якщо у паралелограма довжини діагоналей пропорційні довжинам непаралельних сторін, то коефіцієнт пропорційності становить* $\sqrt{2}$.

Розв'язання. Нехай a, b — довжини непаралельних сторін, а d_1, d_2 — довжини діагоналей паралелограма, причому $a \geqslant b$, $d_1 \geqslant d_2$.

Оскільки $d_1 \geqslant d_2 \Leftrightarrow \frac{d_1}{d_2} \geqslant 1$ і $a \geqslant b \Leftrightarrow \frac{a}{b} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{b}{a} \leqslant 1$, то, з урахуванням умови, має місце одна з можливих пропорцій:

$$1)\ \frac{d_1}{d_2} = \frac{a}{b} \quad \text{або ж} \quad 2)\ \frac{d_1}{d_2} = \frac{b}{a}.$$

1) Друга пропорція має місце лише за умов, коли $d_1 : d_2 = 1 = b : a$. Звідки $a = b$ і $d_1 = d_2 = d$, тобто, паралелограм одночасно є і ромбом, і прямокутником, а тому — квадратом. Звідки й маємо, що $d = a\sqrt{2}$.

2) Першу пропорцію можна подати у вигляді $\frac{d_1}{a} = \frac{d_2}{b} = k$, звідки $d_1 = ka$, $d_2 = kb$. І тому, з урахуванням (1), маємо рівність

$$d_1^2 + d_2^2 = k^2a^2 + k^2b^2 = k^2\left(a^2 + b^2\right) = 2\left(a^2 + b^2\right) \Leftrightarrow k^2 = 2,$$

звідки й випливає, що $k = \sqrt{2}$. □

Наслідком із формули (1) та **задачі 1** (або ж **задачі 5**) є ознака

Задача 7. *Якщо різниця квадратів довжин діагоналей паралелограма дорівнює подвоєній різниці квадратів довжин двох його непаралельних сторін, то такий паралелограм є умовно рівнокутним.*

Таким чином характеристичною властивістю-ознакою умовно рівнокутного паралелограма є «**рівність умовно рівнокутного паралелограма**», яку (з урахуванням введених позначень) можна подати у вигляді

$$d_1^2 - d_2^2 = 2\left(a^2 - b^2\right). \tag{2}$$

2.3. Деякі метричні співвідношення для «умовно рівнокутних» паралелограмів

З урахуванням *рівності паралелограма* та *рівності умовно рівнокутного паралелограма*, мають місце наступні «формули-близнюки»:

1. $d_1 = a\sqrt{2}$;
2. $d_2 = b\sqrt{2}$;
3. $d_1 d_2 = 2ab$;
4. $d_1^2 - d_2^2 = 2(a^2 - b^2)$;
5. $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} = 2\left(\frac{1}{d_2^2} - \frac{1}{d_1^2}\right)$;
6. $d_1^4 - d_2^4 = 4(a^4 - b^4)$;
7. $\cos\alpha = \dfrac{a^2 - b^2}{2ab}$;
8. $\sin\alpha = \frac{1}{2ab}\sqrt{4a^2b^2 - \left(a^2 - b^2\right)^2}$;
9. $h_a = h_1\sqrt{2}$;
10. $h_b = h_2\sqrt{2}$;
11. $h_a h_b = 2h_1 h_2$;
12. $h_b^2 - h_a^2 = 2(h_2^2 - h_1^2)$;
13. $\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2} = 2\left(\frac{1}{h_a^2} - \frac{1}{h_b^2}\right)$;
14. $h_b^4 - h_a^4 = 4(h_2^4 - h_1^4)$;
15. $\cos\alpha = \dfrac{d_1^2 - d_2^2}{2d_1 d_2}$;
16. $\sin\alpha = \frac{1}{2d_1d_2}\sqrt{4d_1^2d_2^2 - \left(d_1^2 - d_2^2\right)^2}$,

з яких не важко одержати наступні формули

1. $S = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2b^2 - \left(a^2 - b^2\right)^2}$;
2. $h_a = \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2b^2 - \left(a^2 - b^2\right)^2}$;
3. $h_b = \frac{1}{2b}\sqrt{4a^2b^2 - \left(a^2 - b^2\right)^2}$;
4. $S = \frac{1}{4}\sqrt{4d_1^2d_2^2 - \left(d_1^2 - d_2^2\right)^2}$;
5. $h_1 = \frac{1}{4d_1}\sqrt{4d_1^2d_2^2 - \left(d_1^2 - d_2^2\right)^2}$;
6. $h_2 = \frac{1}{4d_2}\sqrt{4d_1^2d_2^2 - \left(d_1^2 - d_2^2\right)^2}$;

Твердження 3. (властивості-ознаки) *Паралелограм є* **умовно рівнокутним** *тоді і лише тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

1) *кут між більшою діагоналлю та меншою стороною дорівнює куту між меншою діагоналлю та більшою стороною;*

2) *кут між висотами, опущеними з вершини негострого кута, дорівнює куту між діагоналями;*

3) *паралелограм Варіньона є умовно рівнокутним;*

4) *довжини діагоналей пропорційні довжинам непаралельних сторін;*

5) *довжини діагоналей пропорційні довжинам непаралельних висот;*

6) *довжини непаралельних сторін пропорційні довжинам непаралельних перпендикулярів, опущених з вершин на діагоналі;*

7) *довжини непаралельних висот пропорційні довжинам непаралельних перпендикулярів, опущених з вершин на діагоналі;*

8) $d_1 = a\sqrt{2}$ *(*$\Leftrightarrow h_a = h_1\sqrt{2}$*);* $d_2 = b\sqrt{2}$ *(*$\Leftrightarrow h_b = h_2\sqrt{2}$*);*

9) $2ab = d_1 d_2$ *(*$\Leftrightarrow 2h_1h_2 = h_a h_b$*);*

10) $d_1^2 - d_2^2 = 2\left(a^2 - b^2\right)$ *(*$\Leftrightarrow h_b^2 - h_a^2 = 2\left(h_2^2 - h_1^2\right)$*);*

11) $d_1^4 - d_2^4 = 4\left(a^4 - b^4\right)$ *(*$\Leftrightarrow h_b^4 - h_a^4 = 4\left(h_2^4 - h_1^4\right)$*);*

12) $P = \sqrt{2}\,(d_1 + d_2)$.

Заради порівняння з умовно рівнокутним паралелограмом автори вважають доцільним навести й деякі **властивості-ознаки** прямокутника та ромба.

Твердження 4. *Паралелограм є* ***ромбом*** *тоді і лише тоді, коли виконується одна з наступних (еквівалентних) умов:*

1) *дві непаралельні сторони є рівні;*
2) *діагоналі є бісектрисами його кутів;*
3) *діагоналі є взаємно перпендикулярними;*
4) *можна вписати коло;*
5) *(непаралельні) висоти є рівними;*
6) *площа дорівнює півдобутку діагоналей;*
7) *перпендикуляри, опущені з точки перетину діагоналей на непаралельні сторони, є рівними;*
8) *квадрат сторони дорівнює сумі квадратів половин діагоналей;*
9) *пряма, що проходить через основи висот, опущених з однієї вершини, паралельна до відповідної діагоналі;*
10) *паралелограм Варіньона є прямокутником;*
11) *пряма, що містить діагональ, є віссю його симетрії;*
12) *сума квадратів діагоналей у чотири рази більша за добуток двох його непаралельних сторін.*

Твердження 5. *Паралелограм є* ***прямокутником*** *тоді і лише тоді, коли виконується одна з наступних (еквівалентних) умов:*

1) *один з кутів є прямим;*
2) *діагоналі є рівними;*
3) *(не тупий) кут між діагоналями вдвічі більший за (не тупий) кут між діагоналлю та стороною;*
4) *можна описати коло;*
5) *перпендикуляри, опущені з вершин на діагоналі є рівними;*
6) *площа дорівнює добутку (непаралельних) сторін (висот);*
7) *(непаралельні) бісектриси є рівними;*
8) *квадрат діагоналі дорівнює сумі квадратів непаралельних сторін;*
9) *пряма, що проходить через основи непаралельних перпендикулярів, опущених з вершин на діагоналі, паралельна до відповідної сторони;*
10) *паралелограм Варіньона є ромбом;*
11) *середня лінія (пряма, що сполучає середини двох протилежних сторін) є віссю його симетрії;*
12) *сума квадратів двох непаралельних сторін дорівнює добутку його діагоналей.*

3. Класифікації паралелограмів

За Л.М. Фрідманом ділення об'єму деякого поняття на частини і є класифікацією цього поняття. Якщо ж більш точно, то під класифікацією слід розуміти розподіл об'єктів деякого поняття на взаємозв'язані класи (види, типи) за найбільш суттєвими властивостями (ознаками). Ознаку (властивість), за якою відбувається класифікація (ділення) поняття на класи (види), і називають основою класифікації. Класифікація поняття відбувається за однією або декількома найбільш суттєвими основами. [16]

3.1. Найбільш поширені підходи до класифікації паралелограмів

Крім двох основних підходів до класифікації паралелограмів, про які вже було зазначено у вступі (проілюстровано нижче на рис. 3 і 4), досить поширеними у навчальній літературі також є підходи, проілюстровані за допомогою блок-схем на рис. 5 і 6 відповідно.

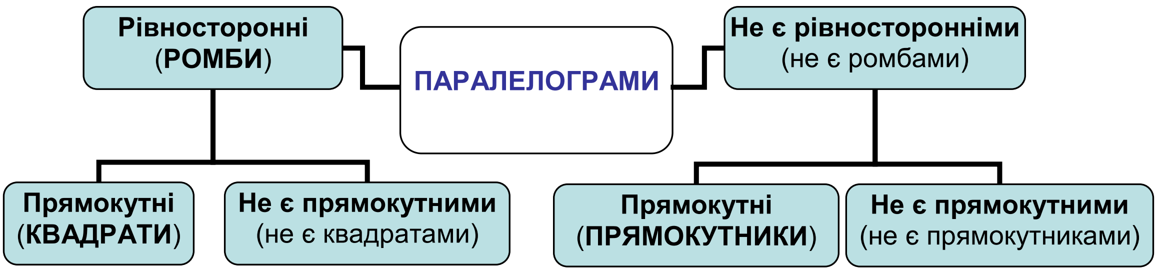


Рис. 3: Класифікація паралелограмів «за мірами сторін та кутів»

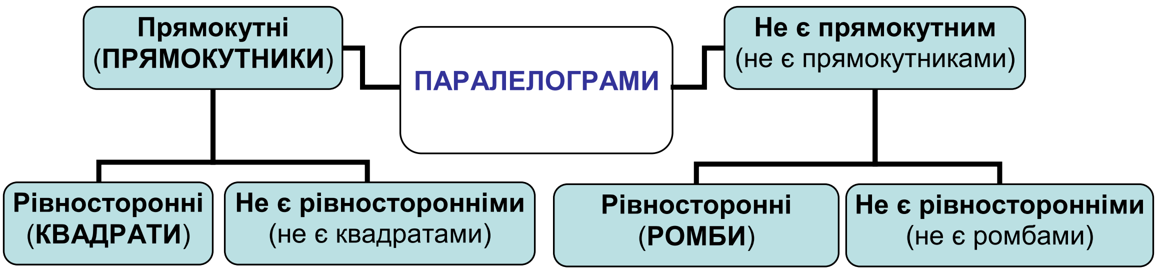


Рис. 4: Класифікація паралелограмів «за мірами кутів та сторін»

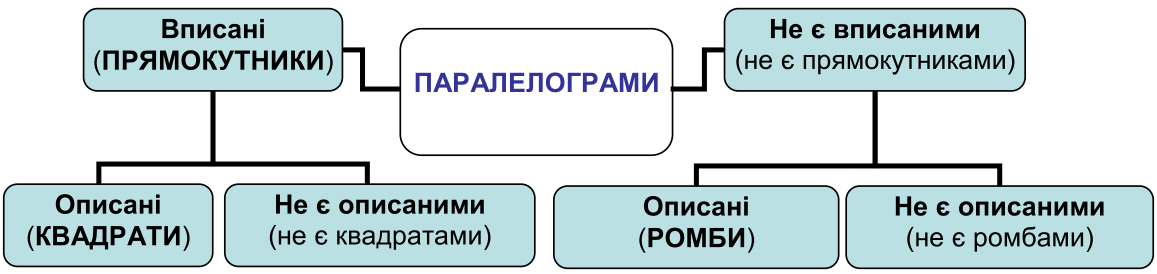


Рис. 5: Класифікація паралелограмів за ознаками «вписаності та описаності»

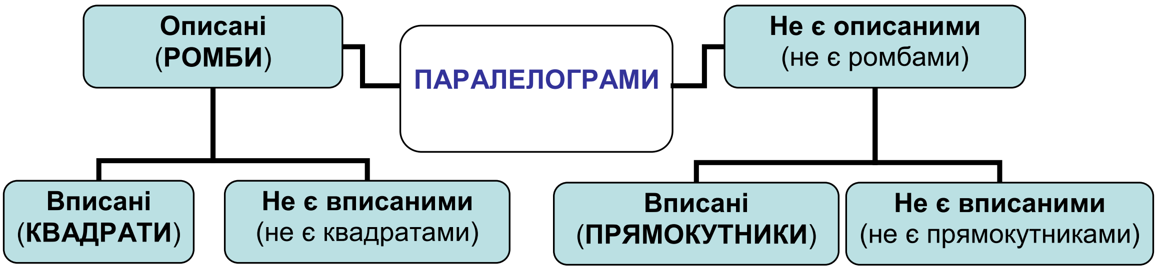


Рис. 6: Класифікація паралелограмів за ознаками «описаності та вписаності»

Слід також відзначити, що в літературі зустрічаються й інші підходи, пов'язані з вибором альтернативних (або ж еквівалентних) основ-ознак для проведення класифікації паралелограмів. Наприклад: «діагоналі перпендикулярні» («діагоналі не є перпендикулярними»); «діагоналі ріні» («діагоналі не є рівними») і т.п.. Спільним для всіх них є те, що класифікацію проводять у два етапи: спочатку за однією основою-ознакою, потім кожен з одержаних (двох) класів (видів) ділять на підкласи (підвиди) за іншою основою.

З огляду на обставини, про які зазначалося у вступі, автори вважають за доцільне та своїм приємним обов'язком навести загальні рекомендації та вимоги до класифікації математичних понять, які більш повно висвітлено Львом Моїсейовичем Фрідманом в [16].

Правильно побудована класифікація поняття повинна відображати найбільш суттєві ознаки і зв'язки між об'єктами поняття, допомагати краще орієнтуватися в множині цих об'єктів, давати можливість встановлювати такі ознаки цих об'єктів, які є найбільш важливими для застосування цього поняття в інших науках та практичній діяльності. Частіше доводиться класифікувати поняття за декількома основами. Тоді класифікацію поняття слід проводити поетапно: спочатку за однією основою, потім деякі види ділити на підвиди за іншою основою і т. д.

При класифікації необхідно дотримуватися наступних правил:

1. В якості основи класифікації можна обирати лише спільну ознаку усіх об'єктів даного поняття.
2. Основою для класифікації слід обирати найбільш суттєві властивості (ознаки) понять.
3. На кожному етапі класифікації можна застосовувати **лише одну певну основу** (в результаті класифікації на кожному етапі одержувані класи (види) не повинні перетинатися!).
4. Класифікація за певною основою повинна бути вичерпною, а кожен об'єкт поняття повинен потрапити в результаті класифікації в один і тільки один клас.

Не можна не погодитися із тим, що в кожній з наведених у підпункті 3.1. класифікацій поза увагою залишаються паралелограми «загального виду» (що не є прямокутниками або ромбами). Більше того, з урахуванням, принаймні 2 частини представленої статті (існуванням доволі широкого класу умовно рівнокутних паралелограмів), жодну з наведених у підпункті 3.1. класифікацій за Л.М. Фрідманом аж ніяк не можна вважати **повною**.

3.2. Класифікація паралелограмів за мірами кутів між сторонами і діагоналями та довжинами сторін і діагоналей

Якісний аналіз задач на паралелограми (що не прямокутниками або ж ромбами), які пропонуються в діючих підручниках, надихнув авторів додатково виділити наступні види паралелограмів

Означення 3. *Паралелограм будемо називати*

умовно гострокутним (умовно прямокутним, умовно тупокутним)*, якщо менша діагональ утворює з меншою стороною гострий кут (прямий і тупий кут відповідно);*

умовно рівнобедреним*, якщо менша діагональ дорівнює одній з його сторін;*

умовно правильним*, якщо менша діагональ утворює з його сторонами два правильні трикутники.*

Зауваження 2. *Умовно* гострокутні, прямокутні *та* тупокутні *паралелограми характеризуються тим, що основа однієї з висот, опущених з вершини тупого кута, належить одній зі сторін, а основа другої з висот —* іншій стороні, співпадає з вершиною паралелограма *(в цьому випадку висота співпадає з діагоналлю), належить продовженню іншої сторони відповідно.*

Очевидно також, що зазначену властивість впевнено можна обрати в якості основи для класифікації паралелограмів, зокрема й на певному етапі будь-якої з можливих класифікацій.

На рисунку 7 нижче проілюстровано авторський підхід до поетапної класифікації паралелограмів за п'ятьма основами. Її особливістю, на наш погляд, є те, що на відміну від існуючих класифікацій, паралелограмам, які не є прямокутниками або ромбами, приділено значно більшої уваги.

Також мусимо відзначити, що запропонована класифікація паралелограмів в жодному разі не претендує на загальну визнаність або ж впровадження. Пропонована або схожі класифікації не повинні стати самоціллю. Навпаки, вони повинні бути результатом проведення досліджень щодо виокремлення певних видів паралелограмів (зокрема доцільності їх виокремлення) та встановлення зв'язків між ними.

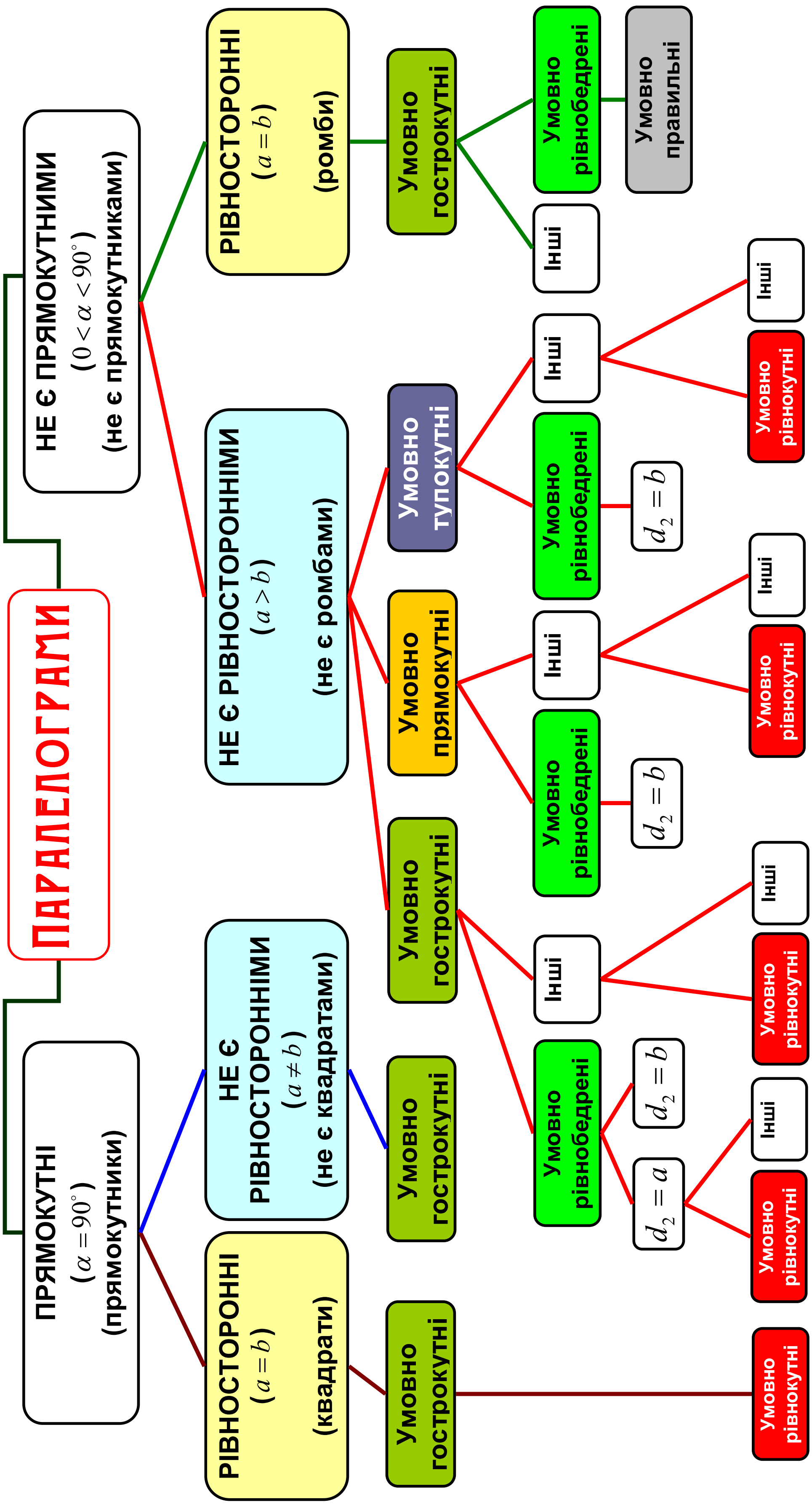


Рис. 7: Блок-схема до **класифікації паралелограмів**

Висновки

Автори мають надію, що для шанувальників елементарної геометрії ознайомлення з фактами для умовно рівнокутного паралелограма буде дійсно цікавим. Бо навіть поверхневе ознайомлення з ними, на нашу думку, є яскравим прикладом задач, як джерела естетичної привабливості. Крім того вважаємо, що наведений теоретичний матеріал може стати поштовхом для подальшого вивчення властивостей умовно рівнокутного паралелограма та «гарною сировиною» при відборі задач для 8–10 класів на Всеукраїнську учнівську олімпіаду з математики.

Також маємо сподівання, що запропонований матеріал допоможе студентам математичних спеціальностей ПЗВО і молодим вчителям математики при опануванні практичними навичками видового розмежування та проведення класифікацій геометричних об'єктів за декількома основами.

Література

1. *Бескин Н.М.* Методика геометрии : учебник для педагогичских институтов. — М.: Учпедгиз, 1947. — 276 с.
2. *Болтянский В.Г.* Четырехугольники // Квант. — 1974, №9. — С. 53–56.
3. *Гусев В.А.* Практикум по элементарной математике: Геометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов и учителей / В.А. Гусев, В.Н. Литвиненко, А.Г Мордкович. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Просвещение, 1992. — 352 с.
4. Геометрія : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. — К. : УОВЦ «Оріон», 2016. — 224 с.
5. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. — К. : УОВЦ «Оріон», 2017. — 224 с.
6. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. — Х. : Гімназія, 2016. — 224 с.
7. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. — Х. : Гімназія, 2017. — 304 с.
8. *Кадубовський О.А.* До питань про систематизацію фактів геометрії трапецій та їх класифікацію / О.А. Кадубовський, О.І. Цвєткова, М.І. Полюга // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2015. — Випуск 5. — С. 114–140.
9. *Кадубовський О.А.* Систематизація та узагальнення фактів геометрії паралелограмів / В.М. Кадубовська, О.А. Кадубовський // Збірник нау-

кових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2017. — Вип. 7. — С. 136–170.

10. *Кадубовський О.А.* Про одну чудову властивість паралелограма // Збірник наукових праць за матеріалами дистанційної всеукраїнської наукової конференції «Математика у технічному університеті XXI сторіччя», 15 — 16 травня, 2017 р., Донбаська державна машинобудівна академія, м. Краматорськ. — Краматорськ : ДДМА, 2017. — С. 229–231. — 350 с.
11. *Кушнір І.А.* Геометрія трапеції в задачах. — Х. : Вид. Группа «Основа» 2009. — 80 с. (Зб. журн. «Математика в школах України»; Вип. 9 (81)).
12. *Понарин Я.П.* Элементарная геометрия: В 2 т. — Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости. — М.: МЦНМО, 2004. — 312 с.
13. *Сарванова Ж.А.* Методическая направленность обучения элементарной математике студентов педагогического ВУЗа // Интеграция образования. — 2007, №3–4. — С. 169-172.
14. *Сканави М.И.* Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. 3-е изд., доп. — М.: Высшая школа, 1978. — 519 с.
15. *Чичигин В.Г.* Методика преподавания геометрии. Планиметрия // Пособие для учителей средней школы. — М.: Гос.-ное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1959. — 391 с.
16. *Фридман Л.Н.* Учитесь учиться математике: книга для учащихся. — М.: Просвещение, 1985. — 114 с.

Lavreniuk A.F., Kadubovska V.M., Kadubovskyi O.A.
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

About the one kind of parallelograms and some related questions

In this article we consider parallelograms in which the angle between the sides is equal to the angle between the diagonals. One of the possible approaches to acquaintance of students with the specified type of parallelograms in the school course of geometry is offered. Except a number of related methodological aspects, the article presents classification of parallelograms based on various bases, in particular the author's approach to the gradual classification of parallelograms by five bases.

Keywords: *parallelograms, learning process of geometry, classification of parallelograms.*