УДК 512.53

Величко В.Є.

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри МНМ та МНІ, ДВНЗ «ДДПУ»

e-mail: vladislav.velichko@gmail.com, ORCID 0000-0001-9752-0907

ОБЧИСЛЕННЯ КВАЗІІДЕАЛІВ СКІНЧЕНИХ НАПІВГРУП ПЕРЕТВОРЕНЬ ГРАФОМ КЕЛІ НАПІВГРУП

Безсумнівно ідеали є одним з важливих носіїв інформації про будову напівгрупи. Як ліві так і праві ідеали всебічно характеризують напівгрупу перетворень, тим більш буде корисно отримати інформацію і про узагальнення односторонніх ідеалів, а саме про квазіідеали напівгрупи.

Ключові слова: *напівгрупа, граф Келі, квазіідеал, структура квазіідеалів*

Вступ

Граф Келі спочатку розглядали як об'єкт, що пов'язаний з групою і його вивченню присвячено багато робіт. Аналогічна конструкція перенесена на напівгрупи в роботі [1], в якій графом Келі напівгрупи S відносно її підмножини T названо граф з вершинами із S і множиною дуг, яка складається з таких впорядкованих пар різних елементів (a, b), де $at = b$ для деякого t із T.

Графи Келі широко використовуються для представлення напівгруп, наприклад, в [2] та [3]. Вивчення спеціальних видів графів Келі напівгруп виконані в [4; 5].

В цій роботі використані графи Келі напівгрупи для знаходження структури квазіідеалів скінчених напівгруп.

Орієнтований граф – це пара (V, A), де V – скінчена непорожня множина вершин, A – множина дуг (впорядкованих пар (v_i, v_j) елементів із V), яка є довільною підмножиною декартового квадрата множини вершин графа.

Якщо пара (v_i, v_j) зустрічається в A більше одного разу, то говорять, що (v_i, v_j) – кратна дуга. Граф з кратними дугами називають орієнтованим мультиграфом.

Вершини графа, зазвичай зображуються точками на площині, а дуга (a, x, b) – стрілкою, що направлена від a до b і помічена елементом x.

Графом Келі напівгрупи S відносно множини її твірних елементів T, називають орієнтований мультиграф $Cay(S, T)$, який складається з множини вершин S і множини помічених дуг – всіх можливих трійок (a, t, b), де $a, b \in S$, $t \in T$ і $at = b$. Таке означення трохи відрізняється від введеного в [1] де граф Келі є орієнтованим графом без петель і багатократних ребер.

Основна частина

В монографії [6] наведена одна характеристика квазіідеалів напівгрупи, що дозволяє повністю їх охарактеризувати: будь який квазіідеал Q напівгрупи S є перетином деякого лівого та деякого правого ідеалу. Тобто $Q = R \cap L$. Отже задача полягає в тому, щоб знайти всі ліві та всі праві ідеали напівгрупи перетворень деякої скінченої напівгрупи, яка задана множиною твірних елементів.

Нехай S напівгрупа перетворень деякої скінченої множини X, яка задана системою твірних елементів T. Побудуємо граф Келі для цієї напівгрупи $Cay(S,T)$ будь-яким способом.

Проілюструємо сказане на прикладі.

Приклад. Нехай $X = \{1,2,3\}$ – множина на якій задано два перетворення

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ та } b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Скориставшись алгоритмом побудови напівгрупи перетворень, яка задана твірними елементами, як приклад такий алгоритм наведено в роботі [7], отримуємо напівгрупу S яка складається з елементів $\{a, b, a^2, b^2, ab, a^2b\}$. Крім того отримуємо наступну таблицю Келі та наступний граф Келі.

	a	b	a^2	b^2	ab	a^2b
a	a^2	ab	a^2	a	a^2b	a^2b
b	a^2	b^2	a^2	b	a^2b	a^2b
a^2	a^2	a^2b	a^2	a^2	a^2b	a^2b
ab	a^2	a	a^2	ab	a^2b	a^2b
a^2b	a^2	a^2	a^2	a^2b	a^2b	a^2b
b^2	a^2	b	a^2	b^2	a^2b	a^2b

Табл. 1: Таблиця Келі напігрупи S

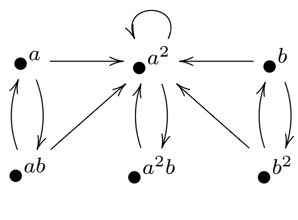

Рис. 1: Граф Келі напівгрупи S

Зрозуміло, що побудований таким чином граф Келі однозначно описує дану напівгрупу S з твірною підмножиною T. Має місце настпуне

Твердження 1. *Нехай T – твірна система напівгрупи S, $Cay(S,T)$ – граф Келі напівгрупи S. Тоді відображення $\varphi : S \to Cay(S,T)$ є ізоморфізмом.*

Створена напівгрупа S має чотири правих ідеали, це $R_1 = \{a^2, a^2b\}$, $R_2 = \{a, a^2, ab, a^2b\}$, $R_3 = \{b, a^2, b^2, a^2b\}$ та $R_4 = S$. Не важко побачити, що ці підмножини є не чим іншим як "області замкнутості" орієнтованого графа Келі. Тобто такими підграфами, що не зв'язані з іншими вершинами графа.

Для визначення таких областей замкнутості використовують так зване транзитивне замикання орієнтованого графу. Для цього побудуємо матрицю суміжності і за допомогою модифікованого алгоритму Флойда-Воршелла (Floyd–Warshall algorithm, [8]) знайдемо матрицю суміжності транзитивного замикання.

Нехай задано орієнтований мультиграф $Cay(S,T)$, як зображення деякої напівгрупи S за множиною твірних елементів T, – множиною вершин S та матрицею суміжності E. Нехай $s_1, s_2, \ldots, s_k$ – елементи напівгрупи S. Визначимо значення елементів матриці суміжності E – $t_{ij}^{(k)}$ при $i, j, k = 1, 2, \ldots, |S|$ рівним 1, якщо в графі $G = Cay(S,T)$ існує шлях з вершини s_i до вершини s_j, всі проміжні вершини якого належать множині $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$; в протилежному випадку ця величина рівна 0. Конструюючи транзитивне замикання $G^* = (S, E^*)$, будемо включати ребро (s_i, s_j) в множину E^* тоді й лише тоді, коли $t_{ij}^{(k)} = 1$. Рекурсивне визначення величини $t_{ij}^{(k)}$ має вид

$$t_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{якщо } i \neq j \text{ і } (i,j) \notin E, \\ 1 & \text{якщо } i = j \text{ або } (i,j) \in E, \end{cases}$$

а при $k \geqslant 1$ виконується співвідношення

$$t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} \vee \left(t_{ik}^{(k-1)} \wedge t_{kj}^{(k-1)} \right).$$

Матриця суміжності транзитивного замикання E^* містить всі можливі варіанти досяжності вершин графу G. В нашому випадку цікавими є всі унікальні рядки матриці E^*. Для нашого прикладу, з порядком елементів $\{a, b, a^2, b^2, ab, a^2b\}$ маємо матрицю E і Після наведеного алгоритму отримали матрицю досяжност E^*.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; E^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

DOI: https://doi.org/10.31865/2413-26672415-3079102020207116

В матриці E^* отримали унікальні рядки $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Всі можливі комбінації цих рядків повністю відображають множину правих ідеалів напівгрупи S. А саме $R_1 = \{a^2, a^2b\}$, $R_2 = \{a, a^2, ab, a^2b\}$, $R_3 = \{b, a^2, b^2, a^2b\}$ та $R_4 = S$.

Для пошуку множини лівих ідеалів напівгрупи S побудуємо двоїстий граф Келі. Тобто мультиграф $Cay^*(S,T)$, який складається з множини вершин S і множини помічених дуг – всіх можливих трійок (a,t,b), де $a, b \in S$, $t \in T$ і $ta = b$. Для нашого прикладу отримуємо граф

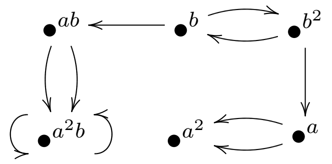

Рис. 2: Двоїстий граф Келі напівгрупи S

Аналогічними міркуваннями знаходимо області замкнутості, а отже і множину лівих ідеалів. Тобто

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отримали унікальні рядки $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Остаточно, множина лівих ідеалів напівгрупи наступна $L_1 = \{a, a^2\}$, $L_2 = \{a^2\}$, $L_3 = \{a^2b\}$, $L_4 = \{ab, a^2b\}$ та $L_5 = S$.

Отримавши ліві та праві ідеали напрівгрупи S перетворень скінченої множини можна перейти до визначення квазіідеалів напівгрупи через перетин рядків матриць R та L.

Висновки

Наведений алгоритм надає можливість обчислювати квазіідеали напівгрупи перетворень скінченої множини використовуючи граф Келі напівгрупи за допомогою відомих алгоритмів. Обчислені знайденим алгоритмом квазіідеали повністю вичерпують всю множину квазіідеалів напівгруп перетворень скінченої множини, а отже може бути використаним для перевірки теоретичних досліджень квазіідеалів напівгрупи перетворень скінченої множини.

Література

1. *Zelinka B.* Graphs of semigroups, Casopis. Pest. Mat, **106**, (1981), – 407-408.
2. *Margolis S.W., Meakin J.C* E-unitary inverse monoids and the Cayley graph of a group representation, Journal of Pure and Applied Algebra, **58** (1989), – 45-76.
3. *Heydemann M.C. Cayley graphs and interconnection networks,* "Graph Symmetry: Algebraic Methods and Applications", Monreal, Canada, July 1-12 (1996), Kluwer, Pordrecht, (1997), – 167-224.
4. *Kelarev A.V.* On unidirected Cayley graphs, Australian J. Combinatorics, **25** (2002), – 73-78.
5. *Kelarev A.V., Quinn S.J.* A Combinatorial Property and Cayley Graphs of Semigroups, Semigroup Forum, Vol. 66, (2003), – 89-96.
6. *O. Steinfeld* Quasi-ideals in rings and semigroups, Akademiai Kiado, – Budapest, – 1978
7. *Величко В.Є.* Алгоритм обчислення скінчених напівгруп, Вісник СДПУ, Математика, 2(4), 2010, с.24-31.
8. *Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L., Stein C.* Introduction to algorithms, The MIT Press, 2009, 1292 p.

Velychko V.Ye.

Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

Calculation of quasi-ideals of finite semigroups of transformations by the Kelly graph of semigroups

Undoubtedly, ideals are one of the important carriers of information about the structure of a semigroup. Both left and right ideals comprehensively characterize the semigroup of transformations, the more it will be useful to obtain information about the generalization of one-sided ideals, namely, about the quasi-ideals of the semigroup.

Keywords: *semigroup, Kelly graph, quasi-ideal, structure of quasi-ideals.*

DOI: https://doi.org/10.31865/2413-26672415-3079102020207116