МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

Новіков О.О., Ровенська О.Г., Кадубовський О.А., Шулик Т.В., Козаченко Ю.О.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики, ДДМА*

[3] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[4] *студент фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

БІНОМІАЛЬНІ КОЕФІЦІЄНТИ В ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

Методом математичної індукції доведені деякі допоміжні формули для величин, які задаються за допомогою біноміальних коефіцієнтів. Обчислене значення інтегралу у головному члені розв'язку екстремальної задачі у вигляді суми квадратів біноміальних коефіцієнтів.

Ключові слова: *біноміальні коефіцієнти, метод математичної індукції.*

В роботі розглянуті задачі, які у своїх формулюваннях містять біноміальні коефіцієнти, розв'язуються методом математичної індукції, що виникли під час розв'язання однієї з екстремальних задач теорії наближення періодичних функцій.

1. Отримання компонент уявлень величин кратного підсумовування

Теорема 1. *Нехай,* $q \in (0;1)$, $\Lambda_{\bar{r}} = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r\}$, *– множина натуральних чисел таких, що* $\sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k \leqslant n + r$,

$$\Lambda_{\overline{r-1}} = \{\lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_r\}; \Lambda_{\overline{r-2}} = \{\lambda_3, \lambda_4, ..., \lambda_r\}; ...\Lambda_{\bar{1}} = \{\lambda_r\}$$

величини

$$G^{(1)}_{n,\Lambda_{\bar{1}}}(t), G^{(2)}_{n,\Lambda_{\bar{2}}}(t), ..., G^{(r)}_{n,\Lambda_{\bar{r}}}(t)$$

задовольняють рекурентній умові

$$G^{(r)}_{n,\Lambda_{\bar{r}}}(t) = \frac{1}{\lambda_1} \sum_{k_1=n-\lambda_1}^{n-1} G^{(r-1)}_{n,\Lambda_{\overline{r-1}}}(t) = \frac{1}{\lambda_1} \sum_{k_1=n-\lambda_1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_2} \sum_{k_2=k_1-\lambda_2}^{k_1} G^{(r-2)}_{n,\Lambda_{\overline{r-2}}}(t), \qquad (1)$$

де

$$G^{(1)}_{n,\Lambda_{\overline{1}}}(t)=\frac{q^{n+1}}{\lambda_1}\left(\left[-\cos(n+1)t+2q\cos nt-q^2\cos(n-1)t\right]+\right.$$

$$\left.+q^{n-\lambda_1+1}\left[\cos(n-\lambda_1+1)t-2q\cos(n-\lambda_1)t+q^2\cos(n-\lambda_1-1)t\right]\right). \qquad (2)$$

Тоді для будь-якого $r\in\mathbb{N}$ *виконується рівність*

$$G^{(r)}_{n,\Lambda_{\overline{r}}}(t)=\frac{Z_q^{2(r-1)}(t)}{\prod_{i=1}^{r}\lambda_i}\sum_{\alpha\subset\overline{r}}\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{r-|\alpha|+\nu}C^{\nu}_{r+1}q^{n-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r}}}+r+\nu}\cos(n-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r}}}+r-\nu)t, \qquad (3)$$

де $\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r}}}=\sum\limits_{j\in\alpha}\lambda_j$, $|\alpha|$ *– кількість елементів множини* $\alpha\subset\overline{r}$,

$$Z_q(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2q\cos x+q^2}},$$

$C^k_n=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ *– коефіцієнти біноміального розвинення.*

Доведення. Для доведення застосуємо метод математичної індукції. Зауважимо, що за формулою (2)

$$G^{(1)}_{n,\Lambda_{\overline{1}}}(t)=\frac{(t)q^{n+1}}{\lambda_1}\left(\left[-\cos(n+1)t+2q\cos nt-q^2\cos(n-1)t\right]+q^{n-\lambda_1+1}\times+\right.$$

$$\left.\times\left[\cos(n-\lambda_1+1)t-2q\cos(n-\lambda_1)t+q^2\cos(n-\lambda_1-1)t\right]\right)=\frac{Z_q^{2(1-1)}(t)}{\prod_{i=1}^{1}\lambda_i}\times$$

$$\times\sum_{\alpha\subset\overline{1}}\sum_{\nu=0}^{1+1}(-1)^{1-|\alpha|+\nu}C^{\nu}_{1+1}q^{n-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r}}}+1+\nu}\cos(n-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r}}}+1-\nu)t=G^{(r)}_{n,\Lambda_{\overline{r}}}(t)\Big|_{r=1},$$

тобто за умовою теореми для $r=1$ формула (3) виконується. Нехай $r\in\mathbb{N}$. Припустимо, що для довільного набору натуральних чисел $\Lambda_{\overline{r'}}=\{\lambda_2,\lambda_3,...,\lambda_{r+1}\}$ таких, що $\sum\limits_{i=2}^{r+1}\lambda_i<k_1+r$ і $\overline{r'}=\{2,3,...,r+1\}$, справедливою є формула (3). Відшукаємо вирази для величини $G^{(r+1)}_{k_0+1,\Lambda_{\overline{r+1}}}(t)$ з набором чисел $\Lambda_{\overline{r+1}}=\{\lambda_1\}\cup\Lambda_{\overline{r'}}$, для яких, окрім вище зазначених, виконані такі умови $\lambda_1\in\mathbb{N}$, $\sum\limits_{i=1}^{r+1}\lambda_i<k_0+r$. В силу співвідношення (1) маємо

$$G^{(r+1)}_{k_0+1,\Lambda_{\overline{r+1}}}(t)=\frac{1}{\lambda_1}\sum_{k_1=k_0-\lambda_1+1}^{k_0}G^{(r)}_{k_1+1,\Lambda_{\overline{r'}}}(t)=\frac{Z_q^{2(r-1)}(t)}{\lambda_1\prod_{i=2}^{r+1}\lambda_i}\times$$

$$\times \sum_{k_1=k_0-\lambda_1+1}^{k_0} \sum_{\alpha\subset\overline{r}} \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^{r-|\alpha|+\nu} C_{r+1}^{\nu} q^{k_1-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r}'}}+r+\nu} \cos(k_1-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r}'}}+r-\nu)t =$$

$$= \frac{Z_q^{2(r-1)}(t)}{2\prod_{i=1}^{r+1}\lambda_i} \sum_{\alpha\subset\overline{r}} \sum_{\nu=0}^{r+1} ((-1)^{r-|\alpha|+\nu} C_{r+1}^{\nu} q^{2\nu} \times$$

$$\times \sum_{k=k_0-\lambda_1+1}^{k_0} \left(\left(qe^{it}\right)^{k-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r}'}}+r-\nu} + \left(qe^{-it}\right)^{k-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r}'}}+r-\nu} \right).$$

Застосовуючи формулу суми елементів нескінченої спадної геометричної прогресії, отримуємо

$$\sum_{k=k_0-\lambda_1+1}^{k_0} \left(qe^{it}\right)^{k-\sum\limits_{j\in\overline{\alpha}}\lambda_j+r-\nu} = \left(qe^{it}\right)^{k_0-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_r}+r+1-\nu} \frac{\left(qe^{-it}\right)^{\lambda_1}-1}{1-qe^{it}}.$$

Тоді, виконуючи елементарні перетворення, отримуємо

$$q^{2\nu} \sum_{k=k_0-\lambda_1+1}^{k_0} \left(\left(qe^{it}\right)^{k-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r}'}}+r-\nu} + \left(qe^{-it}\right)^{k-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r}'}}+r-\nu} \right) =$$

$$= \frac{q^{k_0-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r}'}}+r+1+\nu}}{1-2q\cos t+q^2} q^{k_0-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r}'}}+r+1-\nu} \Big\{ q^{-\lambda_1}\cos\left(k_0-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r}'}}+r+1-\lambda_1-\nu\right)t-$$

$$-q^{1-\lambda_1}\cos\left(k_0-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r}'}}+r-\lambda_1-\nu\right)t-\cos\left(k_0-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r}'}}+r+1-\nu\right)t+$$

$$+q\cos\left(k_0-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r}'}}+r-\nu\right) \Big\}.$$

Таким чином,

$$G^{(r+1)}_{k_0+1,\Lambda_{\overline{r+1}}}(t) = \frac{Z_q^{2r}(t)}{\prod_{i=1}^{r+1}\lambda_i} \sum_{\alpha\subset\overline{r}} (-1)^{r-|\alpha|} q^{k_0-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r}'}}+r+1} \Bigg[\sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^{\nu} C_{r+1}^{\nu} \times$$

$$\times q^{\nu-\lambda_1}\cos\left(k_0-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r}'}}+r+1-\lambda_1-\nu\right)t - \sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\nu+1-\lambda_1}\times$$

$$\times\cos\left(k_0-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r}'}}+r-\lambda_1-\nu\right)t - \sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\nu}\cos\left(k_0-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r}'}}+r+1-\nu\right)t+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\nu+1}\cos\left(k_0-\Sigma^{\alpha}_{\Lambda_{\overline{r}'}}+r-\nu\right)\Bigg].$$

Виконуючи перетворення з врахуванням очевидної рівності

$$C_{r+1}^{\nu} + C_{r+1}^{\nu-1} = C_{r+2}^{\nu}, \tag{4}$$

отримуємо

$$\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\nu}\cos\left(k_0-\Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha}+r+1-\lambda_1-\nu\right)t-\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\nu+1}\times$$

$$\times\cos\left(k_0-\Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha}+r-\lambda_1-\nu\right)t=C_{r+1}^{0}\cos\left(k_0-\Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha}+r+1-\lambda_1\right)t+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r+1}[C_{r+1}^{\nu}+C_{r+1}^{\nu-1}](-1)^{\nu}q^{\nu}\cos\left(k_0-\Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha}+r+1-\lambda_1-\nu\right)t+$$

$$+(-1)^{r+2}C_{r+1}^{r+1}q^{r+2}\cos\left(k_0-\Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha}+r-\lambda_1-r-1\right)t=$$

$$=C_{r+2}^{0}\cos\left(k_0-\Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha}+r+1-\lambda_1\right)t+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r+1}C_{r+2}^{\nu}(-1)^{\nu}q^{\nu}\cos\left(k_0-\Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha}+r+1-\lambda_1-\nu\right)t+$$

$$+(-1)^{r+2}C_{r+2}^{r+2}q^{r+2}\cos\left(k_0-\Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha}+r+1-\lambda_1-(r+2)\right)t=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{r+2}C_{r+2}^{\nu}(-1)^{\nu}q^{\nu}\cos\left(k_0-\Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha}+r+1-\lambda_1-\nu\right)t.$$

Аналогічно

$$\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\nu}\cos\left(k_0-\Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha}+r+1-\nu\right)t-$$

$$-\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^{\nu}C_{r+1}^{\nu}q^{\nu+1}\cos\left(k_0-\Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha}+r-\nu\right)t=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{r+2}C_{r+2}^{\nu}(-1)^{\nu}q^{\nu}\cos\left(k_0-\Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha}+r+1-\nu\right)t.$$

Таким чином, поклавши $\alpha'=\alpha\cup\{1\}$ і зауваживши, що $\overline{r+1}=\overline{r'}\cup\{1\}$, отримуємо

$$\sum_{\alpha\subset\overline{r'}}(-1)^{r-|\alpha|}q^{k_0-\Sigma_{\Lambda_r}^{\alpha}+r+1}\left[\sum_{\nu=0}^{r+2}C_{r+2}^{\nu}(-1)^{\nu}q^{\nu-\lambda_1}\cos\left(k_0-\Sigma_{\Lambda_r}^{\alpha}+r+1-\lambda_1-\nu\right)t-\right.$$

$$-\sum_{\nu=0}^{r+2} C_{r+2}^{\nu}(-1)^{\nu} q^{\nu} \cos\left(k_0 - \Sigma_{\Lambda_r}^{\alpha} + r + 1 - \nu\right)t \Bigg] = \sum_{\alpha\subset\overline{r'}} (-1)^{r-|\alpha|} \times$$

$$\times \left[\sum_{\nu=0}^{r+2} C_{r+2}^{\nu}(-1)^{\nu} q^{k_0 - \Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha} + r + 1 - \lambda_1 + \nu} \cos\left(k_0 - \Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha} + r + 2 - \lambda_1 - \nu\right)t - \right.$$

$$\left. - \sum_{\nu=0}^{r+2} C_{r+2}^{\nu}(-1)^{\nu} q^{k_0 - \Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha} + r + 1 + \nu} \cos\left(k_0 - \Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha} + r + 2 - \nu\right)t \right] =$$

$$= \sum_{\alpha'\subset\overline{r+1}} (-1)^{r+1-|\alpha'|} \sum_{\nu=0}^{r+2} C_{r+2}^{\nu}(-1)^{\nu} q^{k_0 - \Sigma_{\Lambda_{\overline{r+1}}}^{\alpha'} + (r+1) + \nu} \times$$

$$\times \cos\left(k_0 - \Sigma_{\Lambda_{\overline{r+1}}}^{\alpha\cup\{1\}} + (r+1) + 1 - \nu\right)t + \sum_{\alpha\subset\overline{r+1}, 1\notin\alpha} (-1)^{r+1-|\alpha|} \times$$

$$\times \sum_{\nu=0}^{r+2} C_{r+2}^{\nu}(-1)^{\nu} q^{k_0 - \Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha} + r + 1 + \nu} \cos\left(k_0 - \Sigma_{\Lambda_{\overline{r'}}}^{\alpha} + 1 + (r+1) - \nu\right)t.$$

Оскільки, для множин $A = \{\lambda_i, i \in \alpha' \subset \overline{r+1}\}$, $C = \{\lambda_i, i \in \alpha \subset \overline{r+1}\}$ $B = \{\lambda_i, i \in \alpha \subset \overline{r+1}, 1 \notin \alpha\}$ виконується $A \cup B = C$, то нарешті отримуємо

$$G_{n,\Lambda_{\overline{r+1}}}^{(r+1)}(t) = \frac{Z_q^{2((r+1)-1)}(t)}{\prod_{i=1}^{r+1} \lambda_i} \sum_{\alpha\subset\overline{r+1}} \sum_{\nu=0}^{(r+1)+1} (-1)^{(r+1)-|\alpha|+\nu} \times$$

$$\times C_{(r+1)+1}^{\nu} q^{n - \Sigma_{\Lambda_{\overline{r+1}}}^{\alpha} + (r+1) + \nu} \cos(n - \Sigma_{\Lambda_{\overline{r+1}}}^{\alpha} + (r+1) - \nu)t.$$

Це означає, що із справедливості виразу (3) для величини $G_{k_0+1,\Lambda_{\overline{m}}}^{(m)}(t)$ для $m = r$ випливає його справедливість для $m = r+1$. Отже, за індукцією, для довільного $r \in \mathbb{N}$ справедливим є співвідношення (3). Теорема доведена.

2. Застосування полінома Лежандра для обчислення визначених інтегралів

Теорема 2. *Для будь-яких* $\nu \in \mathbb{N}$, $q \in (0;1)$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(1 + q^2 - 2q\cos x)^{\nu}} = \frac{\pi}{(1-q^2)^{2\nu-1}} \sum_{k=0}^{\nu-1} \left(C_{\nu-1}^{k}\right)^2 q^{2k},$$

де $C_m^n = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ *– біноміальні коефіцієнти.*

Доведення. Поклавши для зручності $\frac{1+q^2}{2q} = \alpha^2$, отримуємо

$$\int \frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^\nu} = \frac{1}{(2q)^\nu}\int \frac{dt}{(\frac{1+q^2}{2q}-\cos t)^\nu} = \frac{1}{(2q)^\nu}\int \frac{dt}{(\alpha^2-\cos t)^\nu}. \quad (5)$$

Застосовуючи універсальну тригонометричну підстановку

$$x = \mathrm{tg}\frac{t}{2}, \cos t = \frac{1-x^2}{1+x^2}, dt = \frac{2dx}{1+x^2},$$

маємо на основі співвідношення (5)

$$\int_0^\pi \frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^\nu} = \frac{1}{(2q)^\nu}\int_0^\pi \frac{dt}{(\alpha^2-\cos t)^\nu} =$$

$$= \frac{1}{(2q)^\nu}\int_0^\infty \frac{\frac{2dx}{1+x^2}}{(\alpha^2-\frac{1-x^2}{1+x^2})^\nu} = \frac{1}{(2q)^\nu}\int_0^\infty \frac{\frac{2dx}{1+x^2}}{\frac{1}{(1+x^2)^\nu}(\alpha^2(1+x^2)-1+x^2)^\nu} =$$

$$= \frac{1}{(2q)^\nu}\int_0^\infty \frac{2(1+x^2)^{\nu-1}dx}{(\alpha^2-1+(\alpha^2+1)x^2)^\nu} = \frac{1}{(2q)^\nu}\int_0^\infty \frac{2(1+x^2)^{\nu-1}dx}{(\alpha^2+1)^\nu(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}+x^2)^\nu} =$$

$$= \frac{1}{(2q)^\nu}\frac{2}{(\alpha^2+1)^\nu}\int_0^\infty \frac{(1+x^2)^{\nu-1}dx}{(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}+x^2)^\nu}.$$

Знову, застосовуючи для зручності позначення $a^2 \equiv \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}$, отримуємо

$$\int_0^\pi \frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^\nu} = \frac{1}{(2q)^\nu}\frac{2}{(\alpha^2+1)^\nu}\int_0^\infty \frac{(1+x^2)^{\nu-1}dx}{(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}+x^2)^\nu} =$$

$$= \frac{2}{(2q)^\nu(\alpha^2+1)^\nu}\int_0^\infty \frac{(1+x^2)^{\nu-1}dx}{(a^2+x^2)^\nu} = \frac{2}{(1+q)^{2\nu}}\int_0^\infty \frac{(1+x^2)^{\nu-1}dx}{(a^2+x^2)^\nu}. \quad (6)$$

Таким чином, приходимо до вивчення інтегралів

$$J_\nu(x) = \int \frac{(1+x^2)^{\nu-1}dx}{(a^2+x^2)^\nu}, a^2 < 1.$$

Нехай $\nu \in N, \nu \geqslant 2, \nu = p+1, (p \geqslant 1)$. Тоді, застосовуючи формулу степеня бінома

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n A^{n-k}B^k; (1+x^2)^p = \sum_{k=0}^{p} C_k^p x^{2k},$$

маємо

$$J_{p+1} = \int \frac{(1+x^2)^p dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} = \sum_{k=0}^{p} C_k^p \int \frac{x^{2k}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} =$$

$$= \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} + \sum_{k=1}^{p} C_k^p \int \frac{x^{2k}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}}. \qquad (7)$$

Щоб відшукати для обчислення останнього інтегралу рекурентну формулу для $k \geqslant 1$, виконаємо інтегрування частинами

$$\int \frac{x^{2k}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} =$$

$$= \left| u = \frac{1}{(a^2+x^2)^{p+1}}, dv = x^{2k}dx, du = \frac{-2(p+1)xdx}{(a^2+x^2)^{p+2}}, v = \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| =$$

$$= \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\frac{1}{(a^2+x^2)^{p+1}} - \int \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\frac{[-2(p+1)x]dx}{(a^2+x^2)^{p+2}} =$$

$$= \frac{1}{2k+1}\frac{x^{2k+1}}{(a^2+x^2)^{p+1}} - \frac{-2(p+1)}{2k+1}\int \frac{x^{2(k+1)}dx}{(a^2+x^2)^{p+2}}.$$

Таким чином, для будь-якого $k \geqslant 1$, $p \geqslant 1$

$$\int \frac{x^{2(k+1)}dx}{(a^2+x^2)^{p+2}} = \frac{2k+1}{2(p+1)}\left(\int \frac{x^{2k}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} - \frac{1}{2k+1}\frac{x^{2k+1}}{(a^2+x^2)^{p+1}}\right) =$$

$$= \frac{2k+1}{2(p+1)}\int \frac{x^{2k}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} - \frac{1}{2(p+1)}\frac{x^{2k+1}}{(a^2+x^2)^{p+1}}.$$

Отже, для $k \geqslant 1$

$$\int \frac{x^{2k}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} = \frac{2k-1}{2p}\int \frac{x^{2(k-1)}dx}{(a^2+x^2)^{p}} - \frac{1}{2p}\frac{x^{2(k-1)+1}}{(a^2+x^2)^{p}}. \qquad (8)$$

Враховуючи співвідношення (8), знаходимо для $1 \leqslant k \leqslant p$

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{2k}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} = \frac{2k-1}{2p}\int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-1)}dx}{(a^2+x^2)^{p}} - \frac{1}{2p}\frac{x^{2k-1}}{(a^2+x^2)^{p}}\bigg|_0^\infty =$$

$$= \frac{2k-1}{2p}\int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-1)}dx}{(a^2+x^2)^{p}}. \qquad (9)$$

Отже, для $1 \leqslant m \leqslant n$

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{2m}dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{2m-1}{2(n-1)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2(m-1)}dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}; \tag{10}$$

так само

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-1)}dx}{(a^2+x^2)^p} = \frac{2(k-1)-1}{2(p-1)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2((k-1)-1)}dx}{(a^2+x^2)^{p-1}} = \frac{2k-3}{2(p-1)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-2)}dx}{(a^2+x^2)^{p-1}}.$$

Поєднуючи останню рівність з формулою (9), для $p \geqslant 2$ маємо

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{2k}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} = \frac{2k-1}{2p} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-1)}dx}{(a^2+x^2)^p} = \frac{2k-1}{2p}\frac{2k-3}{2(p-1)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-2)}dx}{(a^2+x^2)^{p-1}} =$$

$$= \frac{(2k-1)(2k-3)}{2^2p(p-1)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-2)}dx}{(a^2+x^2)^{p-1}}.$$

На підставі співвідношення (10) знаходимо

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-2)}dx}{(a^2+x^2)^{p-1}} = \frac{2(k-2)-1}{2(p-2)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2((k-2)-1)}dx}{(a^2+x^2)^{p-2}} = \frac{2k-5}{2(p-2)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-3)}dx}{(a^2+x^2)^{p-2}}.$$

Поєднуючи останні рівності для $p \geqslant 3$, маємо

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{2k}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} = \frac{(2k-1)(2k-3)}{2^2p(p-1)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-2)}dx}{(a^2+x^2)^{p-1}} =$$

$$= \frac{(2k-1)(2k-3)}{2^2p(p-1)}\frac{2k-5}{2(p-2)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-3)}dx}{(a^2+x^2)^{p-2}} =$$

$$= \frac{(2k-1)(2k-3)(2k-5)}{2^3p(p-1)(p-2)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-3)}dx}{(a^2+x^2)^{p-2}} =$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^3(2k-(2i-1))}{2^3\prod_{i=1}^3(p-3+1)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-3)}dx}{(a^2+x^2)^{p-3+1}}.$$

Продовжуючи за аналогією, для достатньо великих $p \geqslant k \geqslant m \geqslant 1$ отримуємо

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{2k}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} =$$

$$= \frac{(2k-1)(2k-3)(2k-5)...(2k-(2m-1))}{2^m p(p-1)(p-2)...(p-m+1)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-m)}dx}{(a^2+x^2)^{p-m+1}} =$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^m (2k-(2i-1))}{2^m \prod_{i=1}^m (p-i+1)} \int\limits_0^\infty \frac{x^{2(k-m)}dx}{(a^2+x^2)^{p-m+1}}. \tag{11}$$

Таким чином, на підставі (11) для $k = 1, 2, ..., p-1$ маємо

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{2k}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} = \frac{\prod_{i=1}^k (2k-(2i-1))}{2^k \prod_{i=1}^k (p-i+1)} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k+1}} =$$

$$= \frac{(2k-1)!!}{2^k \prod_{i=1}^k (p-i+1)} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k+1}}, \tag{12}$$

де

$$(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2k-1)$$

добуток всіх непарних чисел до $(2k-1)$. Зокрема,

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{2p}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} = \frac{(2p-1)!!}{2^p \prod_{i=1}^p (p-i+1)} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-p+1}} =$$

$$= \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)}. \tag{13}$$

Враховуючи, що

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}\bigg|_0^\infty = \frac{\pi}{2a}$$

та маючи на увазі співвідношення (7), (12) отримуємо

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{2k}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} = \frac{\prod_{i=1}^k (2k-(2i-1))}{2^k \prod_{i=1}^k (p-i+1)} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k+1}} =$$

$$= \frac{(2k-1)!!}{2^k \prod_{i=1}^{k}(p-i+1)} \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k+1}};$$

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{x^{2p}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} = \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} \frac{\pi}{2a}.$$

Отже,

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{(1+x^2)^p dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} = \sum_{k=0}^{p} C_k^p \int\limits_0^{\infty} \frac{x^{2k}dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} + \sum_{k=1}^{p-1} C_k^p \frac{\prod_{i=1}^{k}(2k-(2i-1))}{2^k \prod_{i=1}^{k}(p-i+1)} \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k+1}} +$$

$$+ \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)} =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} + \sum_{k=1}^{p-1} C_k^p \frac{(2k-1)!!}{2^k \prod_{i=1}^{k}(p-i+1)} \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k+1}} +$$

$$+ \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} \frac{\pi}{2a}. \tag{14}$$

На підставі формули (120.9) роботи [2] для $k = 0, 1, 2, ..., p-1$ маємо

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k+1}} = \frac{x}{2(p-k)(a^2+x^2)^{p-k}}\Bigg|_0^{\infty} + \frac{2(p-k)-1}{2(p-k)a^2} \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k}} =$$

$$= \frac{2(p-k)-1}{2(p-k)a^2} \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k}} = \frac{2(p-k)-1}{2(p-k)a^2} \times$$

$$\times \left[\frac{x}{2(p-k-1)(a^2+x^2)^{p-k-1}}\Bigg|_0^{\infty} + \frac{2(p-k-1)-1}{2(p-k-1)a^2} \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k-1}} \right] =$$

$$= \frac{2(p-k)-1}{2(p-k)a^2} \times \frac{2(p-k-1)-1}{2(p-k-1)a^2} \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k-1}} =$$

$$= \frac{2(p-k)-1}{2(p-k)a^2} \times \frac{2(p-k-1)-1}{2(p-k-1)a^2} \times \frac{2(p-k-2)-1}{2(p-k-2)a^2} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k-2}} =$$

$$= \frac{2(p-k)-1}{2(p-k)a^2} \times ... \times \frac{2(p-k-(p-k-1))-1}{2(p-k-(p-k-1))a^2} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k-(p-k-1)}} =$$

$$= \frac{\prod_{i=0}^{p-k-1} 2(p-k-i)-1}{\prod_{i=0}^{p-k-1} 2(p-k-i)a^2} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)} =$$

$$= \frac{\prod_{i=0}^{p-k-1}(2(p-k)-2i-1)}{(2a^2)^{p-k}(p-k)!} \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} \Bigg|_0^\infty = \frac{\pi}{2a} \frac{\prod_{i=0}^{p-k-1}(2(p-k)-2i-1)}{(2a^2)^{p-k}(p-k)!}.$$

Таким чином, для $k = 0, 1, 2, ..., p-1$

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k+1}} = \frac{\pi}{2a} \frac{\prod_{i=0}^{p-k-1}(2(p-k)-2i-1)}{(2a^2)^{p-k}(p-k)!} = \frac{\pi}{2a} \frac{(2(p-k)-1)!!}{(2a^2)^{p-k}(p-k)!},$$

зокрема, для $k = 0$

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} = \frac{\pi}{2a} \frac{\prod_{i=0}^{p-1}(2p-2i-1)}{(2a^2)^p p!} = \frac{\pi}{2a} \frac{(2p-1)!!}{(2a^2)^p p!}$$

і в силу (14), вважаючи, що $(-1)! = 0! = 1$

$$\int\limits_0^\infty \frac{(1+x^2)^p dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p+1}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p-1} C_k^p \frac{\prod_{i=1}^k (2k-(2i-1))}{2^k \prod_{i=1}^k (p-i+1)} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^{p-k+1}} + \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)} =$$

$$= \frac{\pi}{2a} \frac{(2p-1)!!}{(2a^2)^p p!} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{C_k^p (2k-1)!!}{2^k \prod_{i=1}^k (p-i+1)} \frac{\pi}{2a} \frac{(2(p-k)-1)!!}{(2a^2)^{p-k}(p-k)!} +$$

$$+ \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} \frac{\pi}{2a} = \sum_{k=0}^{p} \frac{C_k^p (2k-1)!!}{2^k \prod_{i=1}^k (p-i+1)} \frac{\pi}{2a} \frac{(2(p-k)-1)!!}{(2a^2)^{p-k}(p-k)!} =$$

$$= \frac{\pi}{2a} \sum_{k=0}^{p} \frac{C_k^p (2k-1)!!(2(p-k)-1)!!}{2^k (2a^2)^{p-k}(p-k)! \prod_{i=1}^k (p-i+1)} =$$

$$= \frac{\pi}{2a} \sum_{k=0}^{p} \frac{C_k^p (2k-1)!!(2(p-k)-1)!!}{2^k (2a^2)^{p-k} (p-k)!(p-k+1)(p-k+2)...p} =$$

$$= \frac{\pi}{2a} \sum_{k=0}^{p} \frac{C_k^p (2k-1)!!(2(p-k)-1)!!}{2^k (2a^2)^{p-k} p!}.$$

Отже,

$$\int_0^\infty \frac{(1+x^2)^{\nu-1} dx}{(a^2+x^2)^\nu} = \frac{\pi}{2a(\nu-1)!} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{C_k^{\nu-1} (2k-1)!!(2(\nu-1-k)-1)!!}{2^k (2a^2)^{\nu-1-k}}.$$

Тоді, на підставі (6)

$$\int_0^\pi \frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^\nu} = \frac{2}{(1+q)^{2\nu}} \int_0^\infty \frac{(1+x^2)^{\nu-1} dx}{(a^2+x^2)^\nu} =$$

$$= \frac{2}{(1+q)^{2\nu}} \frac{\pi}{2a(\nu-1)!} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{C_k^{\nu-1} (2k-1)!!(2(\nu-1-k)-1)!!}{2^k (2a^2)^{\nu-1-k}} =$$

$$= \frac{\pi}{(1+q)^{2\nu} a(\nu-1)!} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-1)!}{k!(\nu-1-k)!} \frac{(2k-1)!!(2(\nu-1-k)-1)!!}{2^k (2a^2)^{\nu-1-k}} =$$

$$= \frac{\pi}{(1+q)^{2\nu} a} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(2k-1)!!(2(\nu-1-k)-1)!!}{k!(\nu-1-k)! 2^k (2a^2)^{\nu-1-k}} =$$

$$= \frac{\pi}{(1+q)^{2\nu} a} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(2k-1)!!(2(\nu-1-k)-1)!!}{k!(\nu-1-k)! 2^k 2^{\nu-1-k} (a^2)^{\nu-1-k}} =$$

$$= \frac{\pi}{(1+q)^{2\nu} a} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(2k-1)!!(2(\nu-1-k)-1)!!}{2^k k! 2^{\nu-1-k} (\nu-1-k)! (a^2)^{\nu-1-k}}.$$

Оскільки

$$(2k-1)!! = \frac{(2k)!}{2^k k!}, (2(\nu-1-k)-1)!! = \frac{(2(\nu-1-k))!}{2^{\nu-1-k}(\nu-1-k)!},$$

то

$$\int_0^\pi \frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^\nu} =$$

$$= \frac{\pi}{(1+q)^{2\nu}a}\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{(2k-1)!!(2(\nu-1-k)-1)!!}{2^k k! 2^{\nu-1-k}(\nu-1-k)!(a^2)^{\nu-1-k}} =$$

$$= \frac{\pi}{(1+q)^{2\nu}a}\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{(2k)!(2(\nu-1-k))!}{(2^k k! 2^{\nu-1-k}(\nu-1-k)!)^2(a^2)^{\nu-1-k}} =$$

$$= \frac{\pi}{(1+q)^{2\nu}a}\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{(2k)!(2(\nu-1-k))!}{(2^{\nu-1})^2(k!)^2((\nu-1-k)!)^2(a^2)^{\nu-1-k}} =$$

$$= \frac{\pi}{(2^{\nu-1})^2(1+q)^{2\nu}a}\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{(2k)!}{k!((\nu-1-k)!)}\frac{(2(\nu-1-k))!}{k!(\nu-1-k)!}\frac{1}{(a^2)^{\nu-1-k}}.$$

Оскільки $a = \frac{1-q}{1+q}$, то

$$\int_0^{\pi}\frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^{\nu}} = \frac{\pi\frac{1+q}{1-q}}{2^{2(\nu-1)}(1+q)^{2\nu}}\sum_{k=0}^{\nu-1}C_{2k}^kC_{2(\nu-1-k)}^{\nu-1-k}\frac{1}{\left(\frac{(1-q)^2}{(1+q)^2}\right)^{\nu-1-k}} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{2(\nu-1)}(1+q)^{2\nu-1}(1-q)}\sum_{k=0}^{\nu-1}C_{2k}^kC_{2(\nu-1-k)}^{\nu-1-k}\left(\frac{(1+q)^2}{(1-q)^2}\right)^{\nu-1-k} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{2(\nu-1)}(1+q)^{2\nu-1}(1-q)}\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{2\nu-2}\sum_{k=0}^{\nu-1}C_{2k}^kC_{2(\nu-1-k)}^{\nu-1-k}\left(\frac{(1-q)^2}{(1+q)^2}\right)^{k} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{2(\nu-1)}(1-q)^{2\nu-1}(1+q)}\sum_{k=0}^{\nu-1}\left[C_{2k}^kC_{2(\nu-k-1)}^{(\nu-k-1)}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{2k}\right]. \qquad (15)$$

Далі застосуємо співвідношення (1.2.7.38) роботи [3, с. 627]

$$\sum_{k=0}^{n}C_{2k}^kC_{2(n-k)}^{(n-k)}x^{2k} = 2^{2n}x^nP_n\left(\frac{1}{2}(x+1/x)\right),$$

де $P_n(z)$ — поліном Лежандра. Тоді

$$\sum_{k=0}^{\nu-1}C_{2k}^kC_{2(\nu-1-k)}^{(\nu-1-k)}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{2k} = 2^{2(\nu-1)}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{\nu-1}P_{\nu-1}\left(\frac{1+q^2}{1-q^2}\right). \qquad (16)$$

На основі співвідношення (1.2.7.6) роботи [3, с. 625]

$$(1-y)^nP_n\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2y^k.$$

Отже, для $y = q^2$, $n = \nu - 1$ маємо

$$P_{\nu-1}\left(\frac{1+q^2}{1-q^2}\right) = \frac{1}{(1-q^2)^{\nu-1}}\sum_{k=0}^{\nu-1}(C_{\nu-1}^k)^2 q^{2k}.$$

Тоді, на основі (16)

$$\sum_{k=0}^{\nu-1} C_{2k}^k C_{2(\nu-1-k)}^{(\nu-1-k)}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{2k} = \frac{2^{2(\nu-1)}}{(1+q)^{2(\nu-1)}}\sum_{k=0}^{\nu-1}\left(C_{\nu-1}^k\right)^2 q^{2k}.$$

Поєднуючи останню рівність з (15), отримуємо

$$\int_0^{\pi}\frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^{\nu}} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{2(\nu-1)}(1-q)^{2\nu-1}(1+q)}\sum_{k=0}^{\nu-1}\left[C_{2k}^k C_{2(\nu-k-1)}^{(\nu-k-1)}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{2k}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2^{2(\nu-1)}(1-q)^{2\nu-1}(1+q)}\cdot 2^{2(\nu-1)}\frac{1}{(1+q)^{2(\nu-1)}}\cdot\sum_{k=0}^{\nu-1}\left(C_{\nu-1}^k\right)^2 q^{2k} =$$

$$= \frac{\pi}{(1-q^2)^{2\nu-1}}\sum_{k=0}^{\nu-1}\left(C_{\nu-1}^k\right)^2 q^{2k}.$$

Теорема доведена.

3. Доведення інших рівностей для величин, які містять біноміальні коефіцієнти

Теорема 3. *Для будь-яких* $q \in (0;1)$, $r \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{\nu}C_r^{\nu}q^{\nu}\cos\nu t\right)^2 + \left(\sum_{\nu=1}^{r}(-1)^{\nu}C_r^{\nu}q^{\nu}\sin\nu t\right)^2 =$$

$$= (1-2q\cos t+q^2)^r. \tag{17}$$

Доведення. Застосовуючи формули Ейлера, маємо

$$\left(\sum_{\nu=0}^{r}C_r^{\nu}(-1)^{\nu}q^{\nu}\cos\nu t\right)^2 + \left(\sum_{\nu=0}^{r}C_r^{\nu}(-1)^{\nu}q^{\nu}\sin\nu t\right)^2 =$$

$$= \left(\sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu C_r^\nu q^\nu \left(\frac{e^{i\nu t} + e^{-i\nu t}}{2} \right) \right)^2 + \left(\sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu C_r^\nu q^\nu \left(\frac{e^{i\nu t} + e^{-i\nu t}}{2i} \right) \right)^2 =$$

$$= \left[\left(\sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu C_r^\nu q^\nu \frac{e^{i\nu t}}{2} \right) + \left(\sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu C_r^\nu q^\nu \frac{e^{-i\nu t}}{2} \right) \right]^2 +$$

$$+ \left[\left(\sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu C_r^\nu q^\nu \frac{e^{i\nu t}}{2} \right) - \left(\sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu C_r^\nu q^\nu \frac{e^{-i\nu t}}{2} \right) \right]^2 =$$

$$= \left[\frac{1}{4} \left(\sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu C_r^\nu (qe^{it})^\nu \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu C_r^\nu (qe^{-it})^\nu \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left(\sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu C_r^\nu (qe^{it})^\nu \right) \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu C_r^\nu (qe^{-it})^\nu \right) \right] +$$

$$+ \left[\left(-\frac{1}{4} \right) \left(\sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu C_r^\nu (qe^{it})^\nu \right)^2 + \left(-\frac{1}{4} \right) \left(\sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu C_r^\nu (qe^{-it})^\nu \right)^2 - \right.$$

$$\left. -2 \cdot \frac{1}{2i} \frac{1}{2i} \left(\sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu C_r^\nu (qe^{it})^\nu \cdot \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu C_r^\nu (qe^{-it})^\nu \right) \right] =$$

$$= \left(\sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu C_r^\nu (qe^{it})^\nu \right) \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu C_r^\nu (qe^{-it})^\nu \right) =$$

$$= \left(\sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu C_r^\nu (qe^{it})^\nu \right) \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu C_r^\nu (qe^{-it})^\nu \right) =$$

$$= \left(1 - qe^{it}\right)^r (1 - qe^{-et})^r = \left((1 - qe^{it})(1 - qe^{-it})\right)^r =$$

$$= \left(1 - qe^{it} - qe^{-it} + q^2 e^{it} e^{-it}\right)^r = \left(1 - 2q\cos t + q^2\right)^r .$$

Таким чином, справедлива рівність (17). Теорема доведена.

Теорема 4. *Нехай* $q \in (0;1)$, *тоді для будь-якого* $n \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{-\sum_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu C_n^\nu q^\nu \sin \nu t}{\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu C_n^\nu q^\nu \cos \nu t} \right) = n \operatorname{arctg} \frac{q \sin t}{1 - q\cos t}. \tag{18}$$

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції. Позначимо

$$\xi(t) = \frac{q\sin t}{1 - q\cos t}.$$

Оскільки

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{-\sum_{\nu=1}^{1}(-1)^{\nu}C_1^{\nu}q^{\nu}\sin\nu t}{\sum_{\nu=0}^{1}(-1)^{\nu}C_1^{\nu}q^{\nu}\cos\nu t}\right) = \operatorname{arctg}\frac{q\sin t}{1 - q\cos t} = \operatorname{arctg}\xi(t),$$

то для $n = 1$ формула (18) є вірною.

Припустимо, що формула (18) є вірною для $n = r$. Тоді

$$\frac{-\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k}C_r^{k}q^{k}\sin kt}{\sum_{k=0}^{r}(-1)^{k}C_r^{k}q^{k}\cos kt} = \operatorname{tg}r\xi(t).$$

Застосовуючи формулу тангенсу суми та виконуючи елементарні перетворення, отримуємо

$$\operatorname{tg}\left((r+1)\xi(t)\right) = \operatorname{tg}(r\xi(t) + \xi(t)) = \frac{\operatorname{tg}r\xi(t) + \operatorname{tg}\xi(t)}{1 - \operatorname{tg}r\xi(t)\operatorname{tg}\xi(t)} =$$

$$= \frac{\left[-\sum\limits_{k=1}^{r}(-q)^{k}C_r^{k}\sin kt\right](1 - q\cos t) + q\sin t\sum\limits_{k=0}^{r}(-1)^{k}C_r^{k}q^{k}\cos kt}{(1 - q\cos t)\sum\limits_{k=0}^{r}(-1)^{k}C_r^{k}q^{k}\cos kt + q\sin t\sum\limits_{k=1}^{r}(-1)^{k}C_r^{k}q^{k}\sin kt} =$$

$$= \frac{-\sum\limits_{k=1}^{r}(-q)^{k}C_r^{k}\sin kt - \sum\limits_{k=1}^{r}(-q)^{k+1}C_r^{k}\sin kt\cos t - \sum\limits_{k=0}^{r}(-q)^{k+1}C_r^{k}\cos kt\sin t}{\sum\limits_{k=0}^{r}(-q)^{k}C_r^{k}\cos kt + \sum\limits_{k=0}^{r}(-q)^{k+1}C_r^{k}\cos kt\cos t - \sum\limits_{k=1}^{r}(-q)^{k+1}C_r^{k}\sin kt\sin t} =$$

$$= \frac{-\sum\limits_{k=1}^{r}(-1)^{k}(C_r^{k} + C_r^{k-1})q^{k}\sin kt - C_{r+1}^{r+1}q^{r+1}\sin(r+1)t}{\sum\limits_{k=1}^{r}(-1)^{k}(C_r^{k} + C_r^{k-1})q^{k}\cos kt + C_{r+1}^{r+1}q^{r+1}\cos(r+1)t} =$$

$$= \frac{-\sum\limits_{k=1}^{r+1}(-1)^{k}C_{r+1}^{k}q^{k}\sin kt}{\sum\limits_{k=0}^{r+1}(-1)^{k}C_{r+1}^{k}q^{k}\cos kt}.$$

Таким чином, із припущення справедливості формули (18) для $n = r$ випливає, що вона є справедливою для $n = r+1$. Враховуючи, що вона справедлива для $n = 1$ робимо висновок, що формула (18) є справедливою для довільного $n \in \mathbb{N}$. Теорема доведена.

Література

1. *Новиков О.А.* Приближение классов интегралов Пуассона r-повторными суммами Валле Пуссена / О.А. Новиков, О.Г. Ровенская // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. — 2014. — Т.19, вип. 3(23). — С. 14–26.
2. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы : пер. с англ. / Г.Б. Двайт. — 5-е изд. — М. : Наука, 1977. — 228 с.
3. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды: В 3-х томах. Том 1. Элементарные функции. — 2003. — 632 с.

Novikov O., Rovens'ka O., Kadubovs'kyi O., Shulik T., Kozachenko Yu.
Donbas State Teachers' Training University, Slovijans'k, Ukraine
Donbas State Engineering Academy, Kramators'k, Ukraine.

Binomial coefficients in extreme tasks of the theory of approximation of functions

With a help of method of mathematical induction some auxiliary formulas for values which are set by means of binominal coefficients are proved. The value of integral in the main member of the solution of an extreme task in the form of the sum of squares of binomial coefficients is calculated.

Keywords: *binomial coefficients, method of mathematical induction.*
