УДК 517.5

Бодра В.І., Стьопкін А.В., Сипчук Є.Ю., Литвиненко О.В., Волік С.В.

[1] *асистент каф. вищої математики, Київський національний університет технологій і дизайну*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

[3–5] *студенти фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

АПРОКСИМАТИВНІ ВЛАСТИВОСТІ ПОВТОРНИХ ОПЕРАТОРІВ ФЕЙЄРА

Розглянуті питання наближення функцій, які можна подати у вигляді інтегралів Пуассона, 4-повторними операторами Фейєра. Для верхніх граней відхилень повторних операторів Фейєра на класі інтегралів Пуассона отримані асимптотичні формули, які за певних умов забезпечують розв'язок відповідної задачі Колмогорова-Нікольського.

Ключові слова: *ряд Фур'є, повторні оператори Фейєра, асимптотична формула*

Нехай

$$S_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$

— часткова сума ряду Фур'є сумовної 2π –періодичної функції $f \in L$. Суми Валле Пуссена функції $f \in L$ задаються співвідношенням

$$V_{n,p}(f,x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f,x).$$

У випадку $p = n$ такий оператор називають методом Фейєра. Нехай p_1, p_2, p_3, p_4 — довільні натуральні числа такі, що $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = n + 3$. Тригонометричні поліноми, які задаються наступним співвідношенням

$$\sigma_{n,\overline{p}}^{(4)}(f;x) = \frac{1}{p_1} \sum_{k=n-p_1}^{n-1} \frac{1}{p_2} \sum_{m=k-p_2+1}^{k} \frac{1}{p_3} \sum_{j=m-p_3+1}^{m} \frac{1}{p_4} \sum_{r=j-p_4+1}^{j} S_r(f;x). \qquad (1)$$

будемо називати 4-повторними сумами Фейєра функції $f \in L$. У випадку $p_4 = 1$ суми $\sigma_{n,\overline{p}}^{(4)}(f;x)$ співпадають з потрійними сумами Фейєра $\sigma_{n,\overline{p}}^{(3,-2)}$, які вивчалися у роботі [1] та інших. У випадку $p_3 = 1$ потрійні оператори Фейєра співпадають з подвійними $\sigma_{n,\overline{p}}^{(2,0)}$, які вивчалися у роботі [2] та інших.

Наслідуючи О.І. Степанця [3], позначимо через S_M^0 множину функцій істотно обмежених і таких, що мають нульове середнє значення на періоді, а через $C_{\beta,\infty}^q$ – класи неперервних 2π–періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t)P_\beta^q(t)\;dt,$$

в якій $P_\beta^q(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})$ – ядро Пуассона, а функція $\varphi \in S_M^0$ називається $(\beta, q)-$ похідною функції $f(x)$ і позначається $\varphi(z) \equiv f_\beta^q(x)$.

Питанням наближення класів $C_{\beta,\infty}^q$ лінійними методами присвячено ряд робіт спеціалістів з теорії функцій. З бібліографією до цих питань можна ознайомитися у роботах [3]-[4]

В даній роботі отримані асимптотичні формули для верхніх граней відхилень тригонометричних поліномів $\sigma_{n,\overline{p}}^{(4)}$ на класах $C_{\beta,\infty}^q$ для $\beta = 1$

$$\mathcal{E}(C_{1,\infty}^q, \sigma_{n,\overline{p}}^{(4)}) \equiv \sup_{f\in C_{1,\infty}^q} ||f(x) - \sigma_{n,\overline{p}}^{(4)}(f,x)||_C.$$

Теорема 1. *Нехай* $q \in (0; 1/4)$, $\Sigma_p \equiv \sum\limits_{j=1}^{4} p_j = n+3$, *тоді для* $n \to \infty$, $p_i \to \infty$, $i = 1,2,3,4$ *має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(C_{1,\infty}^q, \sigma_{n,\overline{p}}^{(4)}) = \frac{q[4+3q^2-q^4]}{\pi\prod_{i=1}^4 p_i(1-q^2)^4} + \frac{O(1)\sum_{i=1}^4 q^{p_i}}{\prod_{i=1}^4 p_i}, \qquad (2)$$

де $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена за* n, q.

Доведення. Позначивши

$$\xi_\alpha(t;q) = (-1)^{(4-|\alpha|)}\sum_{j=0}^{5}(-1)^j C_5^j q^{n-\Sigma_p^\alpha+4+j}\sin(n-\Sigma_p^\alpha+4-j)t,$$

де $\Sigma_p^\alpha \equiv \sum\limits_{j\in\alpha} p_j$, $|\alpha|$ – кількість елементів множини $\alpha \subset \overline{4} \equiv \{1,2,3,4\}$, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – коефіцієнти біноміального розвинення, і наслідуючи [5], можемо записати

$$\delta_{n,\overline{p}}^{(4)}(f;x) \equiv f(x) - \sigma_n^{(4)}(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^q(x+t)\frac{-Z_q^{10}(t)}{\prod_{i=1}^4 p_i}\sum_{\alpha\subset\overline{4}}\xi_\alpha(t;q)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^q(x+t)\frac{-Z_q^{10}(t)}{\prod_{i=1}^4 p_i}\ \xi_{\overline{4}}(t;q)dt + O(1)\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^q(x+t)\frac{Z_q^{10}(t)}{\prod_{i=1}^4 p_i}\sum_{\alpha\subset\overline{4},\alpha\neq\overline{4}}\xi_\alpha(t;q)dt,$$

де

$$Z_q(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2q\cos x+q^2}}.$$

Тоді, оскільки для $f \in S_M^0$ виконується $\operatorname{esssup}|f(x)| \leqslant 1$, то

$$\mathcal{E}(C_{1,\infty}^q;\sigma_{n,\overline{p}}^{(4)}) \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|Z_q^{10}(t)\xi_{\overline{4}}(t;q)\right|}{\pi\prod_{i=1}^4 p_i}dt + \frac{O(1)}{\prod_{i=1}^4 p_i}\sum_{\alpha\subset\overline{4},\alpha\neq\overline{4}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|Z_q^{10}(t)\xi_\alpha(t;q)\right|dt.$$

Відшукаємо функцію $\varphi(t) \in S_M^0$, для якої

$$\sup_{f\in C_{1,\infty}^q}\left\|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1^q(x+t)\frac{-Z_q^{10}(t)}{\prod_{i=1}^4 p_i}\ \xi_{\overline{4}}(t;q)dt\right\|_C = \frac{1}{\pi\prod_{i=1}^4 p_i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)Z_q^{10}(t)\xi_{\overline{4}}(t;q)dt.$$

Для цього вивчимо функцію $\xi_{\overline{4}}$. Виконавши елементарні перетворення, маємо

$$\xi_{\overline{4}}(t,q) = \frac{Z_q^{10}(t)}{\prod_{i=1}^4 p_i}(q\sin t - 10q^3\sin t + 10q^4\sin 2t - 5q^5\sin 3t + q^6\sin 4t) =$$

$$= \frac{Z_q^{10}(t)}{\prod_{i=1}^4 p_i}\zeta(\cos t,q)\sin t,$$

де

$$\zeta(z,q) \equiv [1-10q^2+5q^4] + [20q^3-4q^5]z - 20q^4z^2 + 8q^5z^3.$$

Відшукаємо нулі функції $\zeta(z,q)$. Оскільки

$$256\zeta(z,1/4) = 101 + 79z - 20z^2 + 2z^3 = (z+1)(2z^2-22z+101),$$

то $z=-1$ єдиний дійсний корінь рівняння $\zeta(z,1/4)=0$.

Оскільки для всіх $q\in(0;1/4)$ виконується $\nu'_z(z;q)>0$, то за теоремою про неявну функцію для $z\in[-1;1]$ на проміжку $q\in(0;1/4]$ співвідношення

$$\nu(z;q) = [1-10q^2+5q^4] + [20q^3-4q^5]z - 20q^4z^2 + 8q^5z^3 = 0$$

задає функцію $z(q)$ неявним чином. Оскільки на проміжку $q \in (0;1/4]$ виконується $z'(q) > 0$, то на цьому проміжку функція $z(q)$ зростає і досягає значення $z(1/4) = -1$. А це у свою чергу означає, що для будь-якого $q\in(0;1/4)$ функція $\zeta(\cos t,q)$ зберігає знак і виконується умова

$$|\zeta(\cos t,q)| = \zeta(\cos t,q); \quad q\in(0;1/4); t\in(-\pi;\pi).$$

Це означає, що для $q \in (0; 1/4); t \in (0; \pi)$ функція $\xi_{\overline{4}}(t; q)$ є додатною, а для $q \in (0; 1/4); t \in (-\pi; 0)$ вона є від'ємною. Отже для функції

$$\varphi(t) = \mathrm{sign}\xi_{\overline{4}}(t; q) = \begin{cases} 1, & t \in (0; \pi); \\ -1, & t \in (-\pi; 0) \end{cases}$$

виконується $\varphi(t) \in S_M^0$ і

$$\sup_{f \in C_{1,\infty}^q} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1^q(x+t) \frac{-Z_q^{10}(t)}{\prod_{i=1}^4 p_i} \; \xi_{\overline{4}}(t; q) dt \right\|_C = \frac{1}{\pi \prod_{i=1}^4 p_i} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) Z_q^{10}(t) \xi_{\overline{4}}(t; q) dt =$$

$$= q^2 J_2(t) + q^2[2 - 3q^2] J_3(t) + 3q^2(1-q^2)^2 J_4(t) - (1-q^2)^4 J_5(t), \qquad (3)$$

де

$$J_k(t) = \int \frac{dz}{(1 - 2qz + q^2)^k}.$$

Виконуючи обчислення

$$J_2(t)\Big|_0^\pi = \frac{-2}{(1-q^2)^2}; \; J_3(t)\Big|_0^\pi = \frac{-2-2q^2}{(1-q^2)^4}; \; J_4(t)\Big|_0^\pi = \frac{-2 - \frac{20}{3}q^2 - 2q^4}{(1-q^2)^6};$$

$$J_5(t)\Big|_0^\pi = \frac{-2 - \frac{27}{2}q^2 - \frac{27}{2}q^4 - 2q^6}{(1-q^2)^8},$$

на підставі (3), маємо

$$J(t)\Big|_0^\pi = \frac{q[4 + 3q^2 - q^4]}{\pi \prod_{i=1}^4 p_i (1-q^2)^4}.$$

Таким чином

$$\mathcal{E}(C_{1,\infty}^q; \sigma_{n,\overline{p}}^{(4)}) = \frac{q[4 + 3q^2 - q^4]}{\pi \prod_{i=1}^4 p_i (1-q^2)^4} + O(1) \frac{\sum\limits_{\alpha \subset \overline{4}, \alpha \neq \overline{4}} |\xi_\alpha(t; q)|}{\pi \prod_{i=1}^4 p_i} \int_{-\pi}^{\pi} Z_q^{10}(t) dt. \qquad (4)$$

Оскільки, для $\alpha \subset \overline{4}, \alpha \neq \overline{4}$

$$|\xi_\alpha(t; q)| = q^{n - \Sigma_p^\alpha + 4} \left| \sum_{j=0}^{5} (-1)^j C_5^j q^j \sin(n - \Sigma_p^\alpha + 4 - j)t \right| = O(1) q^{n - \Sigma_p^\alpha},$$

тож

$$\sum_{\alpha \subset \overline{4}, \alpha \neq \overline{4}} |\xi_\alpha(t; q)| = O(1) \sum_{\alpha \subset \overline{4}, \alpha \neq \overline{4}} q^{n - \Sigma_p^\alpha} = O(1) \sum_{i=1}^{4} q^{p_i}. \qquad (5)$$

Оскільки, $(1-2q\cos t+q^2)\geqslant(1-2q+q^2)=(1-q)^2$, то для $q\in(0;1/4)$ маємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{(1-2q\cos t+q^2)^5}\leqslant\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{(1-q)^{10}}\leqslant\frac{2\pi}{(3/4)^{10}}=O(1). \qquad (6)$$

Підставивши оцінки (5), (6) в співвідношення (4), отримуємо асимптотичну формулу (2). Теорема доведена.

Література

1. *Новіков О.О.* Екстремальна задача для потрійних операторів Фейєра / О.О. Новіков, О.Г. Ровенська, Ю.О. Козаченко, [та ін.] // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2016. — Вип. №6. — С. 13–18.
2. *Бодра В.І.* Екстремальна задача для подвійних операторів Фейєра на класах інтегралів Пуассона / В.І. Бодра, К.В. Безсмертна, О.В. Єгорова , [та ін.] // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2015. — Вип. №5. — С. 20–22.
3. *Степанец А.И.* Решение задачи Колмогорова-Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сборник. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113–138.
4. *Степанец А.И.* Приближения суммами Валле Пуссена / Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О. — К. : Ін-т математики НАН України, — 2007. — 386 с. — (Праці Ін-ту математики НАН України ; т. 68).
5. *Новиков О.А.* Приближение классов интегралов Пуассона r-повторными суммами Валле Пуссена / О.А. Новиков, О.Г. Ровенская // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. — 2014. — Т.19, вип. 3(23). — С. 14–26.

Approximation properties of the repeat Fejer's operators.

Kyiv National University of Technologies and Design, Kyiv, Ukraine,
Donbas State Teachers' Training University, Slovijans'k, Ukraine.

Bodra V., Stepkin A., Sypchuk Ye., Lytvynenko O., Volik S.

Questions of approximations of functions, which can be set in the form of Poisson integrals, by 4-repeated Fejer operators are considered. Asymptotic formulas for upper bounds of inflexions of repeated Fejer operators on the class of Poisson integrals are obtained. These formulas provide the solution of a corresponding Kolmogorov-Nikol'skiy problem in certain conditions.

Keywords: *Fourier series, repeated sums of Fejer, asymptotic formula.*