УДК 517.5

Новіков О.О., Ровенська О.Г., Козаченко Ю.О., Вагнер Г.О., Чала В.В.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики, ДДМА*

[3–5] *студенти фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ЕКСТРЕМАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПОДВІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ ВАЛЛЕ ПУССЕНА НА КЛАСІ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Вивчаються верхні грані відхилень подвійних операторів Фейєра на класі аналітичних функцій дійсної змінної, які не обов'язково можуть подаватися у вигляді інтегралів Пуассона. Отримані асимптотичні формули для цих величин за природних умов забезпечують розв'язки відповідної задачі Колмогорова-Нікольського.

Ключові слова: *ряд Фур'є, повторні суми Фейєра, асимптотична формула.*

Нехай L — множина сумовних 2π–періодичних функцій і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x)$$

— ряд Фур'є функції $f \in L$. Позначимо через $S_n(f;x)$ часткові суми ряду Фур'є. Для фіксованого $p \in \mathbb{N}$ відповідні суми Валле Пуссена функції $f \in L$ задаються співвідношенням

$$V_{n,p}(f,x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f,x).$$

Застосовуючи метод підсумовування Валле Пуссена двічі, отримуємо наступний метод побудови тригонометричних поліномів. Нехай p є довільним натуральним числом таким, що $2p < n$. Функції $f \in L$ поставимо у відповідність послідовність подвійних середніх Валле Пуссена

$$V_{n,p}^{(2)}(f,x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} V_{k+1,p}(f,x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}\frac{1}{p}\sum_{m=k-p+1}^{k} S_m(f,x) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{(n)}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx), \tag{1}$$

де

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant k \leqslant n-2p+1; \\ 1 - \frac{(k-n+2p)(k-n+2p-1)}{2p^2}, & n-2p+1 \leqslant k \leqslant n-p; \\ 1 - \frac{2p^2-(n-k)(n-k+1)}{2p^2}. & n-p \leqslant k \leqslant n-1. \end{cases} \qquad (2)$$

Наслідуючи О.І. Степанця [1, 2], класи періодичних функцій запровадимо наступним чином. Нехай $\psi(k)$ — довільна функція натурального аргументу і β — фіксоване дійсне число. Множина неперервних функцій $f(x)$, для яких ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos(kx + \frac{\beta\pi}{2}) + b_k \sin(kx + \frac{\beta\pi}{2}) \right)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції $f_\beta^\psi(x)$, позначається C_β^ψ. Якщо $f \in C_\beta^\psi$ і, крім того, $f_\beta^\psi(x) \in S_M^0$, тобто виконаними є умови

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(t)dt = 0, \quad \operatorname{ess\,sup} |f_\beta^\psi(t)| \leqslant 1,$$

то множина таких функцій позначається $C_{\beta,\infty}^\psi$.

Для фіксованого $q \in (0;1)$ позначимо символом D_q множину послідовностей $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, для яких має місце співвідношення

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q.$$

У цьому випадку множини $C_{\beta,\infty}^\psi$ складаються з 2π-періодичних функцій, які є звуженнями на дійсну вісь функцій $F(z)$, аналітичних у смузі $|\Im z| < \ln q^{-1}$.

Важливим прикладом таких класів функцій є класи неперервних 2π-періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x+t) \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})dt.$$

В цьому випадку класи $C_{\beta,\infty}^\psi$ позначаються $C_{\beta,\infty}^q$ і називаються класами інтегралів Пуассона [3].

Задача наближення класів інтегралів Пуассона лінійними операторами має багату історію, пов'язану з іменами С.М. Нікольського, С.Б. Стечкина, О.І. Степанця, С.А. Сердюка, В.І. Рукасова, С.О. Чайченка та інших [3].

Для точних верхніх меж відхилень сум Фур'є на класах функцій $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, $\psi(k) \in D_q$ у роботі [2] отримана при $n \to \infty$ асимптотична формула

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; S_n) = \frac{8\psi(n)}{\pi^2} K(q) + O(1)\left(\frac{\psi(n)}{n(1-q)} + \frac{\psi(n)\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right),$$

де

$$\varepsilon_n = \sup_{k \geqslant n} \left| \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q \right|, \tag{3}$$

$O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n, q, β і $\psi(k)$.

У роботі [4] отримано асимптотичні формули для точних верхніх меж відхилень сум Валле Пуссена на класах аналітичних функцій $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, $\psi(k) \in D_q$, $q \in (0;1)$. Ці результати також було розповсюджено на двовимірні аналоги класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, $\psi(k) \in D_q$, $q \in (0;1)$ у роботі [5].

В даній роботі отримані асимптотичні формули для верхніх граней відхилень тригонометричних поліномів $V^{(2)}_{n,p}(f,x)$ на класах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, де $\psi(k) \in D_q$, $q \in (0;1)$

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, V^{(2)}_{n,p}) = \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}} ||f(x) - V^{(2)}_{n,p}(f,x)||_C.$$

Теорема 1. *Нехай* $\psi(k) \in D_q$, $q \in (0;1)$, $\psi(k) > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді при* $n - 2p \to \infty$, *має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; V^{(2)}_{n,p}) = \frac{8\psi(n-2p+2)}{\pi p^2 (1+q)^3} \Pi\left(\frac{4q}{(1+q)^2}; \frac{2\sqrt{q}}{1+q}\right) +$$

$$+ O(1)\left(\frac{\psi(n-2p)}{p^2(n-2p)(1-q)^4} + \frac{\psi(n-2p)q^p}{p^2(1-q)^3} + \frac{\psi(n-2p)\varepsilon_{n-2p+2}}{(1-q)^2}\right), \tag{4}$$

де $\Pi(n;k)$ *— повний еліптичний інтеграл третього роду,* $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена щодо* n, q, β, p *і* $\psi(k)$, *величини* ε_m *задані співвідношенням (3).*

Доведення. Нехай величини $\lambda^{(n)}_k$ задані співвідношенням (2). Для $f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}$ мають місце інтегральні зображення [1, 2]

$$\rho_{n,p}(f,x) \equiv f(x) - V^{(2)}_{n,p}(f,x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(x+t) \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda^{(n)}_k) \psi(k) \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2}) dt.$$

Тоді, виконуючи перетворення, маємо

$$\rho_{n,p}(f,x) =$$

$$= \psi(n-2p+2)\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x+t)\sum_{k=n-2p+2}^{\infty}(1-\lambda_k^{(n)})\frac{\psi(k)}{\psi(n-2p+2)}\cos(kt+\frac{\beta\pi}{2})dt =$$

$$= \frac{\psi(n-2p+2)}{\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x+t)\sum_{k=n-2p+2}^{\infty}(1-\lambda_k^{(n)})\left[\frac{\psi(k)}{\psi(n-2p+2)}-\frac{q^k}{q^{n-2p+2}}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\cos(kt+\frac{\beta\pi}{2})dt+\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x+t)\sum_{k=n-2p+2}^{\infty}\frac{(1-\lambda_k^{(n)})q^k}{q^{n-2p+2}}\cos(kt+\frac{\beta\pi}{2})dt\right] =$$

$$= \frac{\psi(n-2p+2)}{q^{n-2p+2}}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x+t)\sum_{k=n-2p+2}^{\infty}(1-\lambda_k^{(n)})q^k\cos(kt+\frac{\beta\pi}{2})dt+$$

$$+\psi(n-p_1-p_2+2)R_{n-2p}(f,x),$$

де

$$R_{n-2p}(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x+t)r_{n-2p}(t)dt, \quad r_{n-2p}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-\lambda_{n-2p+2+k}^{(n)})\times$$

$$\times\left[\frac{\psi(n-2p+2+k)}{\psi(n-2p+2)}-\frac{q^{n-2p+2+k}}{q^{n-2p+2}}\right]\cos((n-2p+2+k)t+\beta\pi/2). \qquad (5)$$

Розглянемо величину $r_{n-2p}(t)$. Оскільки

$$\prod_{l=0}^{k-1}\frac{\psi(n-2p+k+3)}{\psi(n-2p+l+2)} = \frac{\psi(n-2p+3)}{\psi(n-2p+2)}\frac{\psi(n-2p+4)}{\psi(n-2p+3)}\cdots\frac{\psi(n-2p+k+2)}{\psi(n-2p+k+1)} =$$

$$= \frac{\psi(n-2p+2+k)}{\psi(n-2p+2)},$$

то

$$r_{n-2p}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-\lambda_{n-2p+2+k}^{(n)})\left[\frac{\psi(n-2p+2+k)}{\psi(n-2p+2)}-\frac{q^{n-2p+k+2}}{q^{n-2p+2}}\right]\times$$

$$\times\cos((n-2p+2+k)t+\frac{\beta\pi}{2}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(1-\lambda_{n-2p+2+k}^{(n)})\left(\prod_{l=0}^{k-1}\frac{\psi(n-2p+k+3)}{\psi(n-2p+l+2)}-q^k\right)\cos((n-2p+2+k)t+\frac{\beta\pi}{2}).$$

Враховуючи співвідношення (3.5.9) роботи [1], маємо

$$\left|\prod_{l=0}^{k-1}\frac{\psi(n-2p+k+3)}{\psi(n-2p+l+2)}-q^k\right|\leqslant(q+\varepsilon_{n-2p+2})^k-q^k,$$

де величини ε_m задані співвідношенням (3). Тоді маючи на увазі умову $0\leqslant 1-\lambda_k^{(n)}\leqslant 1$, отримуємо

$$|r_{n-2p}(t)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\left|\prod_{l=0}^{k-1}\frac{\psi(n-2p+k+3)}{\psi(n-2p+l+2)}-q^k\right|\leqslant\sum_{i=2}^{\infty}(q+\varepsilon_{n-2p+1})^k-q^k\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon_{n-2p+2}}{((1-q)-\varepsilon_{n-2p+2}))(1-q)}.$$

Оскільки, для будь-якої $f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}$ виконується $|f^{\psi}_{\beta}(x)|\leqslant 1$, то

$$||R_{n-2p}(f;x)||_C=||\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\psi}_{\beta}(x+t)r_{n-2p}(t)dt||_C=O(1)\frac{\varepsilon_{n-2p+2}}{(1-q)^2}.$$

Нехай $J^q_{\beta}(\varphi)$ є (β,q)–інтегралом функції $\varphi\in S^0_M$. Тоді

$$\rho_{n,p}(J^q_{\beta}(f^{\psi}_{\beta},x))=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\psi}_{\beta}(x+t)\sum_{k=2m-n+2}^{\infty}(1-\lambda_k^{(n)})q^k\cos(kt+\frac{\beta\pi}{2})dt.$$

Таким чином, маючи на увазі співвідношення (5) і (6), отримуємо

$$\rho_{n,p}(f,x)=\frac{\psi(n-2p+2)}{q^{n-2p+2}}\rho_{n,p}(J^q_{\beta}(f^{\psi}_{\beta},x))+\psi(n-2p+2)R_{n-2p}(f;x),$$

$$||\rho_{n,p}(f,x)||_C=\frac{\psi(n-2p+2)}{q^{n-2p+2}}||\rho_{n,p}(J^q_{\beta}(f^{\psi}_{\beta},x))||_C+O(1)\frac{\psi(n-2p)\varepsilon_{n-2p+2}}{(1-q)^2}. \quad (7)$$

В роботі [6] показано, що

$$\sup_{\varphi\in S^0_M}||\rho_{n,p}(J^q_{\beta}(\varphi,\cdot))||_C=\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty},V^{(2)}_{n,p})=\frac{8q^{n-2p+2}}{\pi p^2(1+q)^3}\Pi\left(\frac{4q}{(1+q)^2};\frac{2\sqrt{q}}{1+q}\right)+$$

$$+O(1)\left(\frac{q^{n-2p}}{p^2(n-2p)(1-q)^4}+\frac{q^{n-p}}{p^2(1-q)^3}\right). \quad (8)$$

Враховуючи, що

$$\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}}||\rho_{n,p}(J^q_{\beta}(f^{\psi}_{\beta},\cdot))||_C=\sup_{\varphi\in S^0_M}||\rho_{n,p}(J^q_{\beta}(\varphi,\cdot))||_C=\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty},V^{(2)}_{n,p}),$$

отримуємо для верхніх граней правої і лівої частин рівності (7)

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, V^{(2)}_{n,p}) = \frac{\psi(n-2p+2)}{q^{n-2p+2}}\mathcal{E}(C^{q}_{\beta,\infty}, V^{(2)}_{n,p}) + O(1)\frac{\psi(n-2p)\varepsilon_{n-2p+2}}{(1-q)^2}.$$

Тож, підставивши в останню рівність співвідношення (8), отримуємо асимптотичну формулу (4). Теорема доведена.

Література

1. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. / Степанец А.И. — К. : Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 1. — 427 с. — (Праці Ін-ту математики НАН України ; т. 40).
2. *Степанец А.И.* Приближения суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций / А.И. Степанец, А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 2000. — Т. 52, № 3. — С. 375–395.
3. *Степанец А.И.* Решение задачи Колмогорова-Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций / Степанец А.И. // Мат. сборник. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113–138.
4. *Рукасов В.И.* Приближение суммами Валле Пуссена классов аналитических функций / В.И. Рукасов // Укр. мат. журн. —2003. — Т. 55, № 6. — С. 806–816.
5. *Новіков О.О.* Наближення періодичних функцій високої гладкості прямокутними суммами Фур'є / О.О. Новіков, О.Г. Ровенська //Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т. 5, № 1. С. 111–118.
6. *Ровенская О.Г.* Приближение интегралов Пуассона повторными суммами Валле Пуссена/ О.Г. Ровенская, О.А. Новиков // Нелінійні коливання. — 2010. — Т. 13, № 1. — С. 96–99.

An extreme tasks for double operators of Vallee Poussin on the class of analytic functions

Donbas State Teachers' Training University, Slovijans'k, Ukraine
Donbas State Engineering Academy, Kramators'k, Ukraine.

Novikov O., Rovens'ka O., Kozachenko Yu., Vagner G., Chala V.

Upper bounds of inflexions of double Fejer's operators on a group of analytical functions of a real variable which not necessarily can be set in the form of Poisson integrals are studied. The received asymptotic formulas for these values provide the solution of a corresponding Kolmogorov-Nikol'skiy problem in certain conditions.

Keywords: *Fourier series, repeated sums of Fejer, asymptotic formula.*