УДК 512.53

Рябухо О.М., Смоляков О.В., Турка Т.В.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент, «КДМТУ»*

[2] *студент 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[3] *кандидат фізико-математичних наук, доцент, «ДДПУ»*

e-mail: smolyakovalex@ukr.net, tvturka@gmail.com

ПРИКЛАДИ НАПІВГРУП ВІДПОВІДНОСТЕЙ

У даній статті наведено деякі приклади напівгруп відповідностей, а саме напігрупа відповідностей напівгрупи з нулем і нульовим множенням, напівгрупа відповідностей напівгрупи лівих (правих) нулів, яка є ізоморфною напівгрупі всіх бінарних відношень. Також описано спосіб отримання елементів напівгрупи відповідностей $S(G)$, для $G = (N, \circ)$, де $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, а дія $\circ$ визначається так: $a \circ b = \max\,(a, b)$.

Ключові слова: *напівгрупа відповідностей, напвігрупа лівих нулів, напівгрупа бінарних відношень.*

Вступ

Теорію напівгруп, як і більшість розділів алгебри, можна умовно поділити на дві великі частини. Першу з них можна назвати загальною або абстрактною. Це та частина теорії напівгруп, яка вивчає напівгрупи, виходячи з певних абстрактних обмежень, що покладаються на напівгрупи: регулярні напівгрупи, інверсні, моногенні, зі скороченням ... (цей список можна продовжувати дуже довго).

Другу частину теорії напівгруп можна назвати прикладною або конкретною. Вона вивчає конкретні приклади або класи напівгруп, що виникають як у самій теорії напівгруп, так і за її межами.

Зрозуміло, що ці частини теорії напівгруп тісно переплетені між собою: перша створює відповідний теоретичний апарат для другою, а друга дає ілюстративні приклади і ставить задачі для першої.

Дана робота належить до конкретної частини теорії напівгруп. Вона присвячена дослідженню напівгруп відповідностей універсальних алгебр.

Задачу вивчення напівгруп відповідностей універсальних алгебр свого часу ставив Курош О.Г. в своєму курсі загальної алгебри, який він читав на механіко-математичному факультеті Московського університету в 1969-70 навчальному році (див. [1]). Однак зроблено в цьому напрямку небагато.

Першими тут були роботи А.А. Іскандера [2], [3], учня О.Г. Куроша. Однак Іскандера цікавила лише будова напівгруп відповідностей як частково впорядкованих множин стосовно природного часткового порядку, який там є.

У роботі [4] показано, що коли G — група, то елементи напівгрупи $S(G)$ можна ототожнити з п'ятірками вигляду $(H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$, де $H_1 \lhd G_1 < G$, $H_2 \lhd G_2 < G$, а φ — ізоморфізм факторгрупи G_1/H_1 на факторгрупу G_2/H_2. При цьому відповідний елемент напівгрупи $S(G)$ — як підмножина із $G \times G$ — має вигляд

$$(H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi) = \bigcup_{a \in G_1} (aH_1 \times \varphi(aH_1)).$$

Множини вигляду $aH_1 \times bH_2$, де $bH_2 = \varphi(aH_1)$, будемо називати блоками елемента $A = (H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$.

Також у [4] підраховано порядок напівгруп $S(G)$, коли G є скінченною групою. Зокрема, явно вказано порядок $|S(G)|$ для трьох класичних серій скінченних груп: циклічних, дієдральних та елементарних абелевих.

Будову відношень Гріна на напівгрупі відповідностей скінченної групи описано в роботі [5]. Для циклічних, дієдральних та елементарних абелевих груп обчислено також кількість та потужність $\mathcal{D}$-, $\mathcal{R}$-, $\mathcal{H}$-класів.

Описано умови ідемпотентності елементів і максимальні підгрупи $\mathcal{D}$-класу напівгрупи відповідностей скінченної групи. Доведена теорема про регулярність напівгрупи відповідностей [6].

У роботі [7] описано центр напівгрупи відповідностей скінченної групи. Введено означення суперцентрального автоморфізму скінченної групи. Показано, що кожний автоморфізм циклічної групи є суперцентральним. Доведено, що центр напівгрупи відповідностей скінченної групи ізоморфний групі суперцентральних ізоморфізмів групи.

1. Означення напівгрупи відповідностей.

Нехай G — універсальна алгебра. Якщо G не містить 0-арних операторів (тобто виділених елементів), то пусту підмножину ми також будемо вважати підалгеброю алгебри G. Розглянемо множину $S(G)$ всіх підалгебр декартового квадрату $G \times G$ алгебри G. На кожну підалгебру $H \leqslant G \times G$ можна дивитися як на бінарне відношення на множині G.

Твердження 1. *Множина $S(G)$ як множина бінарних відношень на алгебрі G утворює напівгрупу відносно деморганівського добутку відношень.*

Доведення. Оскільки деморганівський добуток відношень є асоціативним, то треба довести тільки замкненість множини $S(G)$ відносно деморганівського добутку.

Нехай H_1, H_2 — два елементи з $S(G)$, а ω — n-арна операція із сигнатури G. Розглянемо довільну n-ку елементів (a_1, c_1), $\ldots$, (a_n, c_n) із деморганівського добутку $H_1 \circ H_2$. Тоді існують такі елементи $b_1, \ldots, b_n$ із G, що

$$(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in H_1 \quad \text{і} \quad (b_1, c_1), \ldots, (b_n, c_n) \in H_2$$

Оскільки H_1 і H_2 — підалгебри з $G \times G$, то H_1 містить елемент $(\omega(a_1, \ldots, a_n), \omega(b_1, \ldots, b_n))$, а H_2 — елемент $(\omega(b_1, \ldots, b_n), \omega(c_1, \ldots, c_n))$. Але тоді

$$\omega((a_1, c_1), \ldots, (a_n, c_n)) = (\omega(a_1, \ldots, a_n), \omega(c_1, \ldots, c_n)) \in H_1 \circ H_2.$$

Отже, відношення $H_1 \circ H_2$ є замкненим відносно операції ω.
Із довільності ω випливає, що $H_1 \circ H_2$ є підалгеброю алгебри $G \times G$. $\Box$

Напівгрупу $S(G)$ називають *напівгрупою відповідностей* алгебри G.

Зауважимо, що $S(G)$ містить діагональ

$$\Delta = \{(a, a) | a \in G\},$$

яка є одиницею напівгрупи $\mathfrak{B}(G)$ усіх бінарних відношень на множині G. Оскільки $S(G) \leqslant \mathfrak{B}(G)$, то Δ буде одиницею і для напівгрупи $S(G)$. Таким чином напівгрупа відповідностей є напівгрупою з одиницею.

2. Приклади напівгруп відповідностей.

1. Нехай G — напівгрупа з нулем 0 і нульовим множенням (тобто $ab = 0$ для довільних $a, b \in G$). Тоді $G \times G$ також є напівгрупою з нульовим множенням (нулем буде елемент $(0, 0)$). Тому піднапівгрупами в $G \times G$ (тобто елементами напівгрупи $S(G)$) будуть усі підмножини з $G \times G$, які містять $(0, 0)$. Зокрема, якщо $|G| = n$, то $|S(G)| = 2^{n^2-1}$.

Нехай $\mathfrak{B}^0(G)$ — напівгрупа всіх бінарних відношень на множині $G \setminus \{0\}$. Розглянемо множину

$$\widetilde{\mathfrak{B}^0(G)} = \{\varphi \cup \{(0, 0)\} | \varphi \in \mathfrak{B}^0(G).\}$$

Легко бачити, що $\widetilde{\mathfrak{B}^0(G)}$ буде піднапівгрупою з $S(G)$, ізоморфною напівгрупі $\mathfrak{B}^0(G)$:

$$(\varphi \cup \{(0, 0)\}) \circ (\psi \cup \{(0, 0)\}) = (\varphi \circ \psi) \cup \{(0, 0)\}).$$

Таким чином, хоча напівгрупа G влаштована надзвичайно просто, будова її напівгрупи відповідностей $S(G)$ є дуже складною. Зауважимо, що дослідженню повної напівгрупи бінарних відношень присвячено багато робіт різних авторів (див. напр., [8] і вказану там літературу).

2. Нехай G — напівгрупа лівих нулів (тобто $ab = a$ для всіх $a, b \in G$). Оскільки $(a,b)(c,d) = (ac, bd) = (a,b)$, то кожна підмножина з $G \times G$ буде підалгеброю. Таким чином, напівгрупа відповідностей $S(G)$ збігається з множиною всіх підмножин множини G, а тому є ізоморфною напівгрупі $\mathfrak{B}(G)$ усіх бінарних відношень на напівгрупі G.

Цей факт у певному сенсі можна обернути:

Твердження 2. *Напівгрупа відповідностей $S(G)$ напівгрупи G буде збігатися з напівгрупою $\mathfrak{B}(G)$ усіх бінарних відношень на множині G тоді і тільки тоді, коли G – напівгрупа лівих (правих) нулів.*

Доведення. *Достатність* фактично вже доведена вище.

Необхідність. Якщо кожна підмножина з $G \times G$ є піднапівгрупою, то піднапівгрупою повинна бути і кожна двоелементна підмножина. Тому для довільних двох елементів (a,a) і (b,b) із $G \times G$ має бути

$$(a,a) \cdot (b,b) = (ab, ab) = (a,a) \quad \text{або} \quad (ab, ab) = (b,b).$$

Таким чином, для довільних елементів $a, b \in G$ маємо $ab = a$ або $ab = b$.

Нехай для деяких $a, b \in G$, $a \neq b$ маємо $ab = a$ (випадок $ab = b$ розглядається аналогічно). Покажемо, що тоді $xy = x$ для довільних $x, y \in G$.

Припустимо, що це не так. Тоді існують такі елементи $c \neq d$, що $cd = d$. Тут можливі такі випадки.

1) $\{a,b\} \cap \{c,d\} = \varnothing$. Тоді для підмножини $H = \{(a,c),(b,d)\}$ із $G \times G$ маємо:

$$(a,c) \cdot (b,d) = (ab, cd) = (a,d) \notin H.$$

Отже, підмножина H не є замкненою відносно множення, а тому не є піднапівгрупою. Таким чином, цей випадок неможливий.

2) $a = c$. Тоді для підмножини $H = \{(c,c),(b,d)\}$ маємо:

$$(c,c) \cdot (b,d) = (cb, cd) = (ab, cd) = (a,d) \notin H.$$

Отже, підмножина H знову не є замкненою відносно множення, а тому не є піднапівгрупою. Таким чином, і цей випадок неможливий.

Інші можливі випадки розглядаються аналогічно:

3) $a = d$. Тоді для $H = \{(d,c),(b,d)\}$ маємо:

$$(d,c) \cdot (b,d) = (db, cd) = (cb, cd) = (a,d) \notin H.$$

4) $b = c$. Тоді для $H = \{(a,b),(b,d)\}$ маємо:

$$(a,b) \cdot (b,d) = (ab, bd) = (ab, cd) = (a,d) \notin H.$$

5) $b = d$. Тоді для $H = \{(a, c), (d, d)\}$ маємо:

$$(a, c) \cdot (d, d) = (ad, cd) = (ab, cd) = (a, d) \notin H.$$

$\square$

3. Нехай $G = (N, \circ)$, де $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, а дія $\circ$ визначається так: $a \circ b = \max\,(a, b)$. Тоді із рівності

$$(a_1, a_2) \circ (b_1, b_2) = (\max\,(a_1, b_1), \max\,(a_2, b_2))$$

випливає, що підмножина $H \subseteq G \times G$ буде піднапівгрупою тоді і тільки тоді, коли для довільних $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in G$ із $a_1 \geqslant b_1$ і $b_2 \geqslant a_2$ випливає, що $(a_1, b_2) \in H$.

Твердження 3. *Нехай* $0 \leqslant k \leqslant n$, $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\} \subseteq N$, $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$, $A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq N$, $a_i' = max\, A_i$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$, $a_i'' = min\, A_i$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$, $a_1' \leqslant a_2' \leqslant \ldots a_k'$ *та для кожного* j *(*$1 < j \leqslant k$*) виконується умова*

$$A_j \supseteq [a_j'', a_j'] \cap (\bigcup_{i<j} A_i). \qquad (1)$$

Тоді множина

$$C = \bigcup_{i=1}^{k} (A_i, b_i)$$

буде елементом напівгрупи $S(G)$ *і кожен елемент із* $S(G)$ *можна отримати в такий спосіб.*

Доведення. Покажемо спочатку, що множина G є піднапівгрупою в $G \times G$. Справді, нехай (a_i, b_i), $(a_j, b_j) \in G$ і $a_i \geqslant a_j$, $b_j \geqslant b_i$. Тоді

$$(a_i, b_i) \cdot (a_j, b_j) = (a_i, b_j).$$

Тому треба показати, що $a_i \in A_j$. Це очевидно, якщо $i = j$. Нехай тепер $i \neq j$. Тоді з нерівності $b_j > b_i$ випливає, що $j > i$. Крім того, з нерівності $a_i \geqslant a_j$ випливає, що $a_i \geqslant a_j''$. Звідси і з нерівності $a_i \leqslant a_i' \leqslant a_j'$ отримуємо, що $a_i \in [a_j'', a_j']$. Але тоді з умови (1) випливає, що $a_i \in A_i$, а тому $(a_i, b_j) \in C$.

Навпаки, нехай $C \subseteq G \times G$ — піднапівгрупа. Очевидно, що пуста підмножина із $G \times G$ одержується в потрібний спосіб при $k = 0$. Тому далі можна вважати, що $C \neq \varnothing$.

Нехай $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ $(b_1 < b_2 < \ldots < b_k)$ — проекція C на другий множник.

Покладемо для кожного $i = 1, 2, \ldots, k$ $A_i = \{a|(a, b_i) \in C\}$, $a'_i = \max A_i$, $a''_i = \min A_i$.

Нехай $i < j$. Тоді для елементів (a'_i, b_i) та (a'_j, b_j) маємо:

$$(a'_i, b_i) \cdot (a'_j, b_j) = (\max (a'_i, a'_j), b_j).$$

Оскільки $\max (a'_i, a'_j) \in A_j$, то $\max (a'_i, a'_j) \leqslant a'_j$, звідки $a'_i \leqslant a'_j$. Отже,

$$a'_1 \leqslant a'_2 \leqslant \ldots \leqslant a'_k.$$

Лишилось довести умови (1).

Нехай $a \in [a''_j, a'_j] \cap (\cup_{i<j} A_i)$. Тоді існує такий номер $i_0 < j$, що $(a, b_{i_0}) \in C$. Далі маємо

$$(a, b_{i_0}) \cdot (a''_j, b_j) = (a, b_j).$$

Отже, $(a, b_i) \in C$, а тому $a \in A_j$. $\square$

Наслідок 1. *Нехай* $G = (\{1, 2, \ldots, n\}, \circ)$, *де* $a \circ b = max(a, b)$. *Тоді порядок напівгрупи відповідностей* $S(G)$ *задовольняє нерівність*

$$|S(G)| \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \sum_{1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k \leqslant n} a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k. \qquad (2)$$

Доведення. Досить показати, що для деякого k, $1 \leqslant k \leqslant n$ конструкція із попереднього твердження дає не менше ніж

$$\binom{n}{k} \sum_{1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k \leqslant n} a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$$

різних елементів напівгрупи $S(G)$. Справді, множину $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\} \subseteq N$ може вибрати $\binom{n}{k}$ способами.

Далі для фіксованої множини $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ вибираємо набір

$$1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k \leqslant n.$$

Для кожного i, $1 \leqslant i \leqslant k$, множину A_i вибираємо як множину вигляду

$$A_i = [a''_i, a_i], \ \ 1 \leqslant a''_i \leqslant a_i.$$

Очевидно, що тоді $\max A_i = a_i$, а саму множину A_i можна вибрати a_i способами. Умова (1) тепер виконується очевидним чином, бо при нашому виборі A_i маємо $A_i = [a_i'', a_i']$.

Таким чином, для кожного такого набору множин A_i одержуємо елемент із $S(G)$, різним наборам відповідають різні елементи, а різних наборів A_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, буде $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$. $\square$

Зауваження. Безпосереднім обчисленням перевіряється, що при $n = 1, 2$ в наслідку 1. маємо рівність. При $n \geqslant 3$ напівгрупа $S(G)$ містить елемент

$$H = \{(1,1), (1,2), (3,2), (3,3)\}.$$

Оскільки в цьому випадку $A_2 = \{1, 3\}$ не є інтервалом, то H не одержується конструкцією із доведення наслідку 1. Отже, при $n \geqslant 3$ нерівність (2) буде строгою.

Література

1. *Курош А.Г.* Общая алгебра. Лекции 1969–1970 учебного года. / А.Г. Курош — М.: Наука, 1974. — 159 с.
2. *Искандер А.А.* Структура соответствий универсальной алгебры / А.А. Искандер // Известия АНСССР: серия математическая. — 1965. — Т. 29, Вып. 6. — С. 1357–1372.
3. *Искандер А.А.* Частичные универсальные алгебры с заданными структурами подалгебр и соответствий / А.А. Искандер // Математический сборник. — 1966. — Т. 70 (112):3. — С. 438–456.
4. *Ганюшкін О.Г., Турка Т.В.* Порядок напівгрупи відповідностей скінченної групи // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, вип. № 3. Серія: фізико-математичні науки, 2009. — С. 9–13.
5. *Турка Т.В.* Відношення Гріна на напівгрупі відповідностей скінченної групи // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, вип. № 4. Серія: фізико-математичні науки, 2010. – С. 38–42.
6. *Рябухо О.М.* Напівгрупи відповідностей груп та напівгруп / О.М. Рябухо, Т.В. Турка, К.О. Судіна, Г.В. Плюшко // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. – 2014. – Вип. № 4. – С. 58–62.
7. *Турка Т.В.* Центр напівгрупи відповідностей // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, вип. № 2. Серія: фізико-математичні науки, 2015. — С. 41–44.
8. *Plemmons R.J.* On the semigroup of binary relations / R.J. Plemmons, M.T. West // Pacific Journal of Mathematics. — 1971. — Vol. 35 (3). — P. 743–753.

Ryabukho O.M., Smolyakov A.V., Turka T.V.
Donbas State Teachers' Training University, Slovijans'k, Ukraine.

Examples of semigroup of correspondence

This article contains some examples of semigroup of correspondences, namely, the semigroup of correspondence of a semigroup with zero and zero multiplication, the semigroup of correspondence of the semigroup of left (right) zeros, which is isomorphic to the semigroup of all binary relations. The method of obtaining elements of the semigroup of correspondences $S(G)$ is also described, where $G = (N, \circ)$ where $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, and the operation of $\circ$ is defined as: $a \circ b = \max\,(a, b)$. $N = 1, 2, ..., n$.

Keywords: *the semigroup of correspondence, semigroup of left zeros, semigroup of binary relations*