УДК 37.016:514.112.4

Кадубовська В.М., Кадубовський О.А.

[1] *вчитель математики вищої категорії, вчитель-методист, Олександрівська ЗОШ І-ІІІ ступенів*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: kadubovs@ukr.net

СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ТА УЗАГАЛЬНЕННЯ ФАКТІВ ГЕОМЕТРІЇ ПАРАЛЕЛОГРАМІВ

В статті висвітлюється авторський досвід щодо одного з можливих підходів до систематизації та узагальнення фактів геометрії паралелограмів. Шляхом укрупнення дидактичних одиниць та розширення кола основних лінійних елементів паралелограма викладено низку як добре, так і мало відомих метричних співвідношень у паралелограмі, властивостей-тверджень, зокрема афінних, ознак рівності та подібності та ознак паралелограма тощо.

Ключові слова: *опуклий чотирикутник, паралелограм, властивості, ознаки, основні та маловідомі твердження, систематизація та узагальнення.*

Вступ

Добре відомо (напр., [10]), що цілісна теорія паралелограмів була розроблена ще наприкінці середніх віків але з'явилась у підручниках лише у XVII ст. Слід відзначити, що з викладом «паралелограмів» у вітчизняній навчальній літературі пов'язані імена професора математики Харківського університету Тимофія Федоровича Осиповського («Курс математики. Ч. 2. Геометрия, прямолинейная и сферическая тригонометрия и введение в криволинейную геометрию», 1820 р.) та його учня — одного з найвидатніших математиків XIX століття, українського вченого, академіка Михайла Васильовича Остроградського («РУКОВОДСТВО НАЧАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРІЙ», 1855 р.).

Змістова лінія «Чотирикутники» є невід'ємною складовою сучасного шкільного курсу геометрії. Традиційно, тема «паралелограми» є своєрідним «містком» між геометрією трикутників та окремими видами чотирикутників. Її вивчення пропонується більшістю з діючих підручників за хронологією «визначення – основні властивості – ознаки – додаткові властивості-твердження»; рідше супроводжується найпростішими «задачами на побудову» та ще рідше — відповідними задачами з «елементів векторної алгебри» [1, 2, 10, 15, 20, 21].

Серед посібників, присвячених дидактичному забезпеченню вивчення теми «паралелограми», хочемо виділити посібники [13], [15], [19] і [4].

Серед навчальних посібників з елементарної геометрії, в яких наведено яскраві геометричні факти (зокрема про паралелограм), що не ввійшли до шкільних підручників, маємо своїм приємним обов'язком виділити посібники І.А. Кушніра [11, 12], В.Ф. Бутузова [3], Р.К. Гордіна [5] та двотомне видання Я.П. Понаріна [16]. Серед збірників задач, які містять доволі широке коло задач (на паралелограми) різного рівня складності, зокрема теоретичного характеру, — чудові збірники В.В. Прасолова [17], І.Ф. Шаригіна [22], загально відомий збірник задач за редакцією М.І. Сканаві [18] та збірники [7], [23].

Загально визнано, що одним із основних завдань в будь-якій сфері людської діяльності, зокрема математиці та дидактиці математики, є систематизація та узагальнення накопиченого досвіду. І хоча зазначені вище навчальні посібники і збірники задач (в певному розумінні) «цілком закривають» тему задачників з планіметрії, проте якісний аналіз змісту запропонованих в них задач саме «на паралелограми» дозволяє констатувати наступне:

— до «основних» елементів паралелограма переважно відносять *сторони*, *діагоналі*, *висоти*, *бісектриси кутів*, *перпендикуляри, опущені з вершин на діагоналі*, рідше – *середні лінії* й «медіани» (відрізки, що сполучають вершину паралелограма із серединою несуміжної сторони) та *кути між ними*;

— *відомості про паралелограми*, за винятком тих, які викладено у підручниках, та найбільш типових задач і класичних результатів, що не ввійшли до підручників, *суттєво різняться за обсягами* та *носять доволі розрізнений характер* в залежності від способу їх класифікації й уподобань авторів;

— цілу низку задач на обчислення (наведених у представленій статті в загальному вигляді), або взагалі не пропонують, або ж (незначну їх частину) пропонують в якості задач виключно з числовими даними;

— накопилася значна кількість задач зі спільними вихідними даними / умовою але різними вимогами / завданнями, які носять змістовно (та, як з'ясувалося, «по-джерельно») відокремлений характер.

Крім того, більшість запропонованих у шкільних підручниках задач на обчислення «пропедевтично заточені» саме під окремі види паралелогамів. Можливо тому поза увагою залишаються яскраві факти «власної метричної теорії» паралелограмів. Але ж, як зазначається в [6], «Навчальні задачі є ефективним засобом реалізації і формою втілення змісту навчання. Викладач повинен постійно вирішувати проблему відбору навчальних задач, щоб забезпечити системне засвоєння змісту навчальної дисципліни. Тому, необхідною є вдала і обґрунтована систематизація задач. Проблемою в цьому випадку є вибір засад для такої систематизації».

Пропонований у даній статі підхід до систематизації та узагальнення фактів геометрії паралелограмів орієнтований саме на структурно-компонентний склад задачі та зміст і структуру досліджуваного матеріалу.

Питанням систематизації та узагальнення фактів з окремих тем курсу планіметрії, в тому числі й властивостей основних геометричних фігур та їх елементів, присвячена велика кількість навчально-методичних посібників і статей. Проте, як зазначає Г.П. Бевз (маючи на увазі книжки Д.Д. Єфрємова[1], О.С. Смогоржевського[2] та С.І. Зетеля[3]), «... книжки, в яких усі такі теми висвітлюються в певній системі і повно, давно стали бібліографічною рідкістю». Дану статтю слід вважати продовженням циклу статей співавтора [9] і [10], а її основним завданням — привернення уваги майбутніх і молодих вчителів математики до наведеного матеріалу та *спроба* продовжити «традицію», закладену ще за часів *Д.Д. Єфрємова*, *О.С. Смогоржевського* та *С.І. Зетеля*, «естафету» якої не менш яскраво перейняли сучасники *Шаригін І.Ф.*[4]; *Кушнір І.А.*[4], *Мякішев О.Г.*[6], *Бевз Г.П.*[7], *Юзбашев А.В.*[8], *Понарін Я.П.*[9], *Смірнова І.М., Смірнов В.О.*[10], *Акопян А.*[11] та багато інших фахівців в галузі елементарної геометрії.

З урахуванням зазначеного, метою статті є:
з одного боку — звести в цілісну систему, як найвідоміші й найважливіші факти із «сучасної» геометрії паралелограмів, так і маловідомі проте яскраві властивості паралелограма, які (на превеликий жаль) залишаються поза увагою не лише підручників, а й перевидань загально визнаних збірників задач різного рівня складності, в тому числі олімпіадних;
з іншого боку — надати вчителям можливість вибору задач цікавого, саме теоретичного змісту/характеру, зокрема задач різного рівня складності.

Звісно ж, що більшість із наведених далі властивостей давно є відомими й досконало вивчені, викладені в багатьох виданнях, починаючи від шкільних підручників та закінчуючи олімпіадними збірниками задач. Проте деякі властивості-твердження та ціла низка метричних співвідношень паралелограма виявлені авторами та наведені вперше.

---

[1] «Новая геометрия треугольника», 1903
[2] «Елементи геометрії трикутника», 1939
[3] «Новая геометрия треугольника», 1962
[4] Страница Игоря Федоровича Шарыгина — http://eek.diary.ru/p148941323.htm
[5] «Трикутник і тетраедр у задачах», 1991; «Повернення втраченої геометрі», 2000; «Триумф школьной геометрии», 2005; «Геометрія трапеції в задачах», 2009; «Емоції різницевого трикутника», 2016
[6] «Элементы геометрии треугольника», 2000
[7] «Геометрія чотирикутника», 2003; «Геометрія кіл», 2004; «Геометрія трикутника», 2005
[8] «Свойства геометрических фигур — ключ к решению любых задач по планиметрии», 2005
[9] «Элементарная геометрия. Том 3. Треугольники и тетраэдры», 2006
[10] «50 задач о равенстве треугольников», 2007
[11] «Геометрия в картинках», 2011

Маючи на меті саме цілісний виклад матеріалу, який (на нашу думку) допоможе при комплексній підготовці випускників до ДПА та ЗНО, в першій та частково другій частині статті авторами цілком свідомо наведено «загальновідомий теоретичний мінімум», засвоєння та розуміння суті якого є необхідною складовою при формуванні відповідних компетентностей.

1. Основні поняття та загальні відомості

Означення 1. *Чотирикутник називають опуклим, якщо він лежить в одній півплощині відносно кожної прямої, яка містить його сторону.*

Означення 2. *Відрізки (а також прямі), що сполучають середини протилежних сторін чотирикутника, називають його середніми лініями.*

Означення 3. *Центром симетрії фігури F називають таку точку O, центральна симетрія відносно якої відображає цю фігуру на себе.*

Означення 4. *Паралелограмом називають чотирикутник, у якого протилежні сторони паралельні.*

Означення 5. *Ромбом називають паралелограм, у якого всі сторони рівні.*

Прямокутником називають паралелограм, у якого всі кути прямі.

Квадратом називають прямокутник, у якого всі сторони рівні; або ж ромб, у якого всі кути прямі.

Означення 6. *Висотою паралелограма називають спільний перпендикуляр до прямих, які містять протилежні сторони паралелограма (інколи висотою паралелограма називають також і довжину перпендикуляра).*

Зауваження 1. *Паралелограм є опуклим чотирикутником. І тому він має всі властивості опуклого чотирикутника. Зокрема: кожна діагональ поділяє його на трикутники, діагоналі перетинаються в точці, яка є внутрішньою відносно паралелограма, а сума всіх його кутів становить 360^0.*

? Чи можуть усі кути паралелограма бути: гострими, тупими, прямими, негострими, нетупими? (Відповідь: ні; ні; так; так; так.)

Добре відомо, що

Твердження 1. *Середні лінії опуклого чотирикутника (зокрема паралелограма) перпендикулярні тоді і лише тоді, коли його діагоналі є рівними.*

Твердження 2. *Навколо паралелограма можна описати коло тоді і лише тоді, коли він є прямокутником (зокрема квадратом).*

Твердження 3. *В паралелограм можна вписати коло тоді і лише тоді, коли він є ромбом (зокрема квадратом).*

Твердження 4. *З усіх (опуклих) чотирикутників з даними діагоналями d_1, d_2 та кутом φ між ними найменший периметр має паралелограм.*

Зауваження 2. *Заради визначеності в подальшому вершини паралелограма завжди будемо іменувати літерами* A, B, C, D *за годинниковою стрілкою та вважати, що* $AD = a \geqslant b = AB$ *(*AD *– «нижня основа»),* $\angle DAB = \alpha$ *– нетупий кут між його сторонами («паралелограм не нахилено ліворуч»),* O *– точка перетину діагоналей* AC *і* BD*,* d_1, d_2 *– довжини діагоналей, причому* $d_1 \geqslant d_2$*, а* φ *– нетупий кут між ними — рис. 1.*

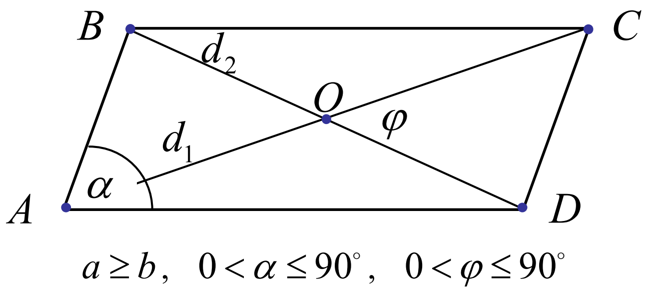

Рис. 1:

2. Основна частина

2.1. «Найпростіші» властивості паралелограма

У паралелограма ...

1) сума кутів, прилеглих до кожної зі сторін, становить 180^0;
   (a) бісектриси внутрішніх (зовнішніх) кутів, прилеглих до певної сторони, перетинаються під прямим кутом;
   (b) кут між висотами, опущеними з вершини тупого кута, дорівнює гострому куту між його сторонами;
   (c) кут між висотами, опущеними з вершини гострого кута, дорівнює тупому куту між його сторонами;
2) кожна діагональ утворює з протилежними (паралельними) сторонами дві пари рівних («внутрішніх різносторонніх») кутів;
   (a) протилежні кути рівні;
   (b) бісектриси протилежних кутів паралельні або належать одній прямій;
3) висоти, опущені на паралельні сторони (або ж їх продовження) рівні;
4) сума відстаней від будь-якої точки всередині паралелограма до його сторін є величиною сталою (та дорівнює сумі довжин його висот);
5) бісектриса внутрішнього кута відтинає від нього рівнобедрений трикутник;
6) довжина кожної з діагоналей менша за суму довжин його непаралельних сторін та більша за модуль різниці довжин зазначених сторін.

? Чи можуть два даних гострих кути бути кутами паралелограма? (Відповідь: якщо рівні — так; якщо нерівні — ні, не можуть.)

2.2. «Основні» властивості паралелограма

У паралелограма ...

1) кожна з діагоналей ділить його на два рівні трикутники;
   (a) протилежні сторони рівні;
      i. середня лінія паралельна та рівна довжині відповідних сторін;
      ii. кожна середня лінія ділить його на два рівних паралелограма;
   (b) висоти, опущені з протилежних вершин на діагональ, є рівними;
2) відрізки діагоналей (на які вони діляться точкою їх перетину) разом з його сторонами утворюють дві пари рівних трикутників;
   (a) діагоналі точкою перетину діляться навпіл;
      i. кожна середня лінія проходить через точку перетину діагоналей;
      ii. будь-який відрізок, який проходить через точку перетину діагоналей і кінці якого належать паралельним його сторонам, ділиться цією точкою навпіл;
      тобто, **точка перетину діагоналей є центром його симетрії**;
      iii. точки перетину бісектрис кутів між діагоналями зі сторонами паралелограма є вершинами ромба.
3) точка перетину бісектрис внутрішніх (зовнішніх) кутів, прилеглих до певної сторони, належить прямій, що містить відповідну середню лінію;
   (a) бісектриси внутрішніх кутів, прилеглих до меншої сторони, точкою перетину діляться навпіл;
4) відрізки, які сполучають певну вершину із серединами несуміжних сторін, ділять відповідну діагональ на три відрізки однакової довжини;

Також добре відомим є наступне твердження

Твердження 5. *Нехай вершини паралелограма* $A_1B_1C_1D_1$ *належать сторонам паралелограма* $ABCD$ *(точка* A_1 *належить стороні* AB, B_1 *— стороні* BC, C_1 *— стороні* CD, D_1 *— стороні* DA*). Тоді центри симетрії (точки перетину їх діагоналей) обох паралелограмів співпадають.*

? Скільки на площині існує паралелограмів з вершинами в трьох даних точках, які не належать одній прямій? (Відповідь: три.)

? Чи однозначно визначається паралелограм своїм центром симетрії та двома своїми вершинами? (Відповідь: якщо вершини симетричні відносно центра — ні; якщо сусідні — так.)

? Чи визначається паралелограм своїми: сторонами; кутами; діагоналями; стороною, кутом і діагоналлю?
(Відповідь: ні; ні; ні; так, причому в залежності від співвідношень, в яких перебувають величини даних елементів: два, один або жодного паралелограма.)

2.3. «Розташуваня» основ висот та бісектрис паралелограма

1) Нехай $\angle A$ – гострий кут паралелограма $ABCD$, $\overline{\overline{A}}$, $\overline{A}$ – основи висот опущених з вершини гострого кута A на прямі, що містять більшу (BC) та відповідно меншу (CD) сторони паралелограма — рис. 2 $a)$; $\overline{\overline{B}}$, $\overline{B}$ – основи висот опущених з вершини тупого кута B на прямі, що містять більшу (AD) та відповідно меншу (CD) сторони паралелограма — рис. 2 $c)-d)$. Тоді мають місце твердження:

   (a) $\overline{\overline{A}}$ **завжди** належить продовженню сторони CB (за точку B);
   (b) $\overline{A}$ **завжди** належить продовженню сторони CD (за точку D);
   (c) $\overline{\overline{B}}$ **завжди** належить стороні AD ($\overline{\overline{B}} \in [AD]$);
   (d) $\overline{B}$ належить стороні CD тоді і лише тоді, коли $\angle ABD = \angle CDB$ є гострим (або, що теж саме, тоді і лише тоді, коли $a \cdot \cos\alpha < b < a$);
   (e) $\overline{B}$ співпадає з вершиною D тоді і лише тоді, коли $\angle ABD = \angle CDB$ є прямим (або, що теж саме, тоді і лише тоді, коли $a \cdot \cos\alpha = b < a$);
   (f) $\overline{B}$ належить продовженню сторони CD (за точку D) тоді і лише тоді, коли $\angle ABD = \angle CDB$ є тупим (або, що теж саме, тоді і лише тоді, коли $b < a \cdot \cos\alpha < a$).

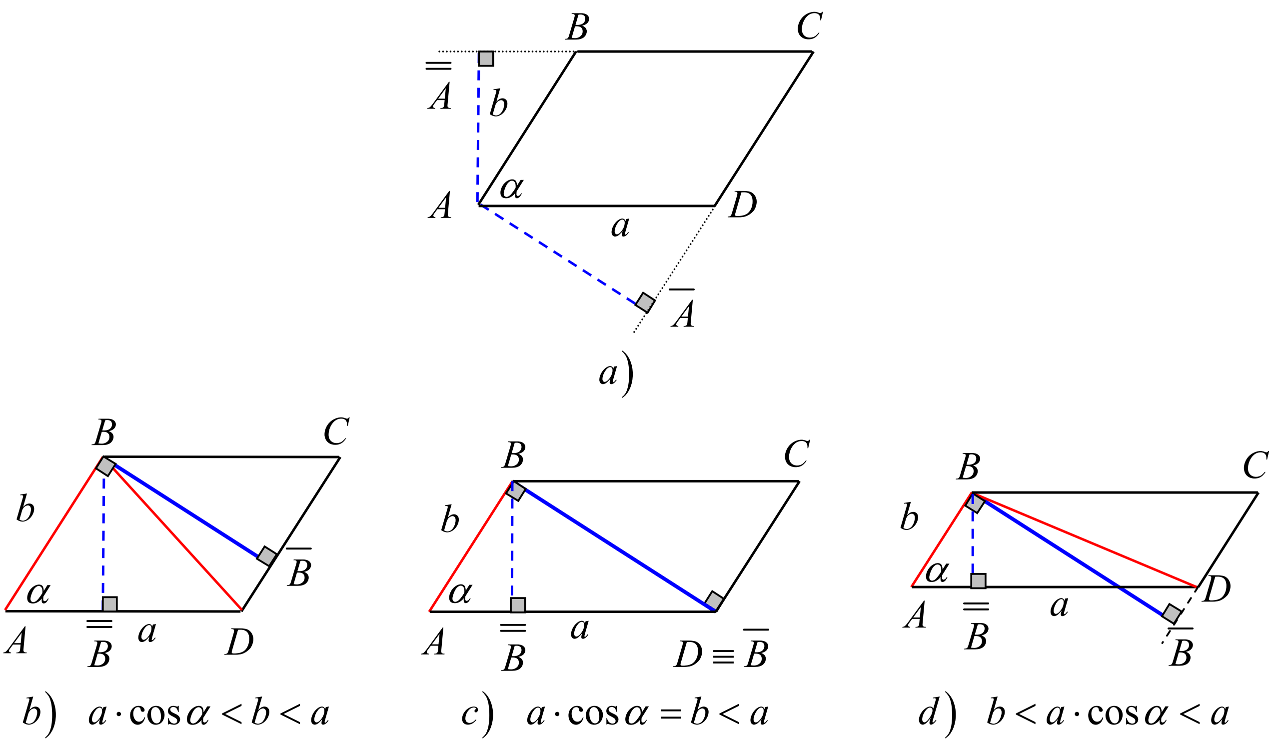

Рис. 2:

? Чи існує такий паралелограм, що основи всіх його висот належать сторонам (співпадають з його вершинами)? (Відповідь: так.)

2) Нехай $\angle A$ – гострий кут паралелограма $ABCD$, A', B', C', D' – основи бісектрис кутів A, B, C і D відповідно, $AD = a \geqslant b = AB$. Тоді мають місце твердження:

   (a) якщо $a = b$, то $A' \equiv C$, $C' \equiv A$, $B' \equiv D$, $D' \equiv B$ (і навпаки);

   (b) якщо $a > b$, то $A' \in [BC]$, $B' \in [AD]$ (і навпаки);
   а «точка перетину бісектрис внутрішніх кутів при меншій стороні завжди є внутрішньою відносно паралелогрма»;

   (c) якщо $b < a < 2b$, то $A' \in [BC]$, $D' \in [BC]$, причому саме точка D' «лежить» між точками B та A' (і навпаки);
   а «точка Q перетину бісектрис внутрішніх кутів при більшій стороні є внутрішньою відносно паралелогрма»;

   (d) якщо $a = 2b$, то $A' \equiv D' \equiv Q \in [BC]$ (і навпаки);
   а «точка Q перетину бісектрис внутрішніх кутів при більшій стороні співпадає із серединою протилежної сторони паралелогрма»;

   (e) якщо $a > 2b$, то $A' \in [BC]$, $D' \in [BC]$, причому саме точка A' «лежить» між точками B та D' (і навпаки);
   а «точка Q перетину бісектрис внутрішніх кутів при більшій стороні є зовнішньою відносно паралелогрма».

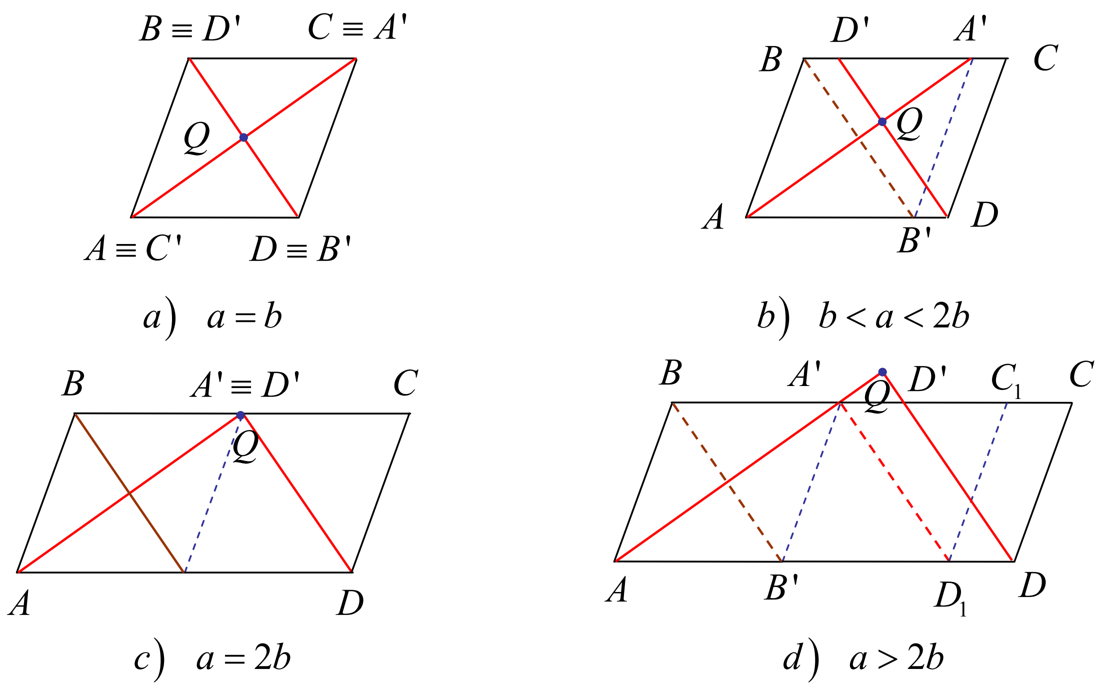

Рис. 3:

? Чи існує такий паралелограм, що всі точки попарних перетинів бісектрис його внутрішніх кутів лежать зовні паралелограма? (Відповідь: ні.)

2.4. Навколо «середніх ліній» та «медіан» паралелограма

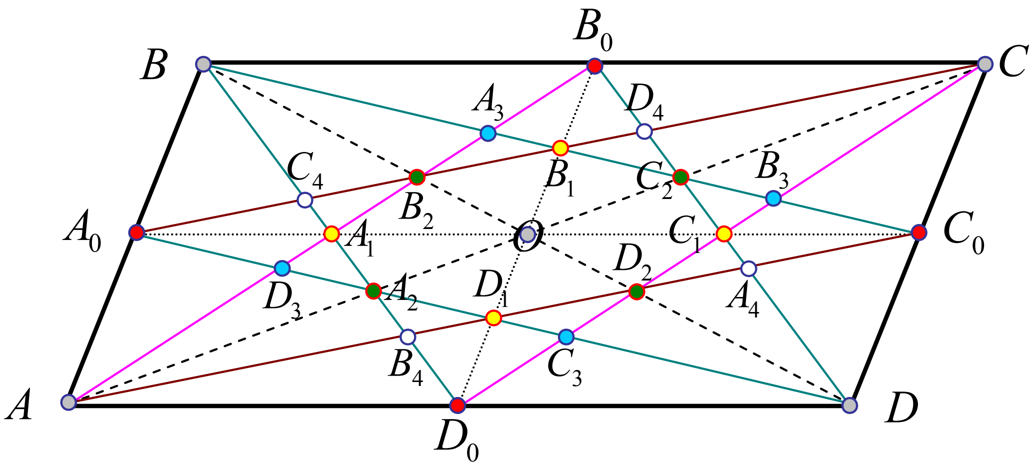

Рис. 4:

Нехай A_0, B_0, C_0 і D_0 — середини сторін AB, BC, CD і DA (відповідно) паралелограма $ABCD$ — рис. 4. Тоді:

1) чотирикутник $A_0B_0C_0D_0$ є паралелограмом:

   (a) $P_{A_0B_0C_0D_0} = AC + BD$; (b) $2S_{A_0B_0C_0D_0} = S_{ABCD}$.

2) **дві «чудові» точки на діагоналі** AC:
   (a) прямі BC_0 і BD_0 ділять діагональ AC на три рівні частини;
   (b) прямі DA_0 і DB_0 ділять діагональ AC на три рівні частини;
   (c) прямі BD_0 і DB_0 ділять діагональ AC на три рівні частини;
   (d) точки $A_2 = BD_0 \cap A_0D$ і $C_2 = BC_0 \cap DB_0$ належать діагоналі AC та ділять її на три рівні частини;

3) **дві «чудові» точки на діагоналі** BD:
   точки $B_2 = AB_0 \cap A_0C$ і $D_2 = CD_0 \cap C_0A$ належать діагоналі BD та ділять її на три рівні частини;

4) **три «чудові» точки на середній лінії** A_0C_0:
   точки $A_1 = AB_0 \cap BD_0$, $O = AC \cap BD$ і $C_1 = B_0D \cap CD_0$ належать середній лінії A_0C_0 та ділять її на чотири рівні частини;

5) **три «чудові» точки на середній лінії** B_0D_0:
   точки $B_1 = A_0C \cap BC_0$, $O = AC \cap BD$ і $D_1 = C_0A \cap DA_0$ належать середній лінії B_0D_0 та ділять її на чотири рівні частини;

6) **точки перетину «медіан» – 1-2**:
   (a) точки A_1, B_1, C_1 і D_1 є серединами «медіан» AB_0, BD_0; BC_0, CA_0; CD_0, DB_0 і DA_0, AC_0 відповідно;
   (b) точки A_2, B_2, C_2 і D_2 ділять кожну з відповідних медіан (BD_0 і DA_0; AB_0 і CA_0; BC_0 і DB_0; CD_0 і AC_0) у відношенні $2:1$

(рухаючись від вершини паралелограма), тобто:

$$BA_2 : A_2D_0 = 2:1\,,\ DA_2 : A_2A_0 = 2:1 \text{ і т.д.}$$

7) **точки перетину «медіан» – 3-4**:
   (a) $AA_3 : A_3B_0 = BB_3 : B_3C_0 = CC_3 : C_3C_0 = DD_3 : D_3A_0 = 4:1$;
   (b) $AA_4 : A_4C_0 = BB_4 : B_4D_0 = CC_4 : C_4A_0 = DD_4 : D_4B_0 = 4:1$;
   (c) $AD_3 : D_3B_0 = BA_3 : A_3C_0 = CB_3 : B_3D_0 = DC_3 : C_3A_0 = 2:3$;
   (d) $AB_4 : B_4C_0 = BC_4 : C_4D_0 = CD_4 : D_4A_0 = DA_4 : A_4B_0 = 2:3$;
8) **Теорема** [чудова властивість «медіан» паралелограма] *На кожній з 8-ми медіан паралелограма розташовано* 4 *точки її перетину з 4-ма іншими медіанами. Кожна із 8-ми зазначених четвірок точок ділить відповідну медіану, рухаючись від вершини паралелограма, у відношенні*

$$12:3:5:4:6\,.$$

   Наприклад: $AD_3 : D_3A_1 : A_1B_2 : B_2A_3 : A_3B_0 = 12:3:5:4:6$ і т.д.
9) Чотирикутники AB_0CD_0, BB_0DD_0, AA_0CC_0, BC_0DA_0 та $A_1B_0C_1D_0$, $B_1C_0D_1A_0$ є паралелограмами:
   (a) $S_{AB_0CD_0} = S_{BB_0DD_0} = S_{AA_0CC_0} = S_{BC_0DA_0} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$;
   (b) $S_{A_1B_0C_1D_0} = S_{B_1C_0D_1A_0} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.
10) Чотирикутники $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ є паралелограмами:
   (a) $2P_{A_1B_1C_1D_1} = AC + BD$,
   (b) $8S_{A_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD}$;
   (c) $3P_{A_2B_2C_2D_2} = P_{ABCD}$,
   (d) $9S_{A_2B_2C_2D_2} = S_{ABCD}$.
11) Чотирикутники $A_3B_3C_3D_3$, $A_4B_4C_4D_4$ є паралелограмами:
   (a) $5S_{A_3B_3C_3D_3} = S_{ABCD}$;
   (b) $5S_{A_4B_4C_4D_4} = S_{ABCD}$.
12) Чотирикутники $D_3C_4B_3A_4$, $B_4A_3D_4C_3$ є паралелограмами:
   (a) $P_{D_3C_4B_3A_4} = \frac{3}{5}AD + \frac{1}{5}AB$,
   (b) $S_{D_3C_4B_3A_4} = \frac{3}{25}S_{ABCD}$;
   (c) $P_{B_4A_3D_4C_3} = \frac{1}{5}AD + \frac{3}{5}AB$,
   (d) $S_{B_4A_3D_4C_3} = \frac{3}{25}S_{ABCD}$;
13) Чот-ки $AD_3B_3C_3$, $BA_3C_3D_3$, $CB_3D_3A_3$ і $DC_3A_3B_3$ є паралелограмами:
   (a) $S_{AD_3B_3C_3} = S_{BA_3C_3D_3} = S_{CB_3D_3A_3} = S_{DC_3A_3B_3} = \frac{1}{5}S_{ABCD}$.
14) Чот-ки $AC_4D_4B_4$, $BD_4A_4C_4$, $CA_4B_4D_4$ і $DB_4C_4A_4$ є паралелограмами:
   (a) $S_{AC_4D_4B_4} = S_{BD_4A_4C_4} = S_{CA_4B_4D_4} = S_{DB_4C_4A_4} = \frac{1}{5}S_{ABCD}$.
15) Якщо S – площа паралелограма, то площа трикутника, вершинами якого є одна з вершин паралелограма та ...
   (a) середини двох несуміжних із нею сторін, становить $\frac{3}{8}S$;
   (b) середини двох суміжних із нею сторін, становить $\frac{1}{8}S$;
   (c) середини двох послідовних за нею сторін, становить $\frac{1}{8}S$;
   (d) середини двох паралельних сторін, становить $\frac{1}{4}S$;
16) $6 \cdot S_{A_1B_2B_1C_2C_1D_2D_1A_2} = S_{ABCD}$.

2.5. Ознаки рівності паралелограмів

? Чи можуть два нерівних паралелограма мати по рівній стороні й по рівній діагоналі? (Відповідь: так, можуть.)

Теореми-ознаки рівності паралелограмів (та ті, що до них зводяться). *Якщо виконується одна з наступних умов*

1) `дві сторони та кут між ними` одного паралелограма дорівнюють двом сторонам та куту між ними іншого паралелограма;
   (a) середні лінії та кут між ними одного паралелограма дорівнюють середнім лініям та куту між ними іншого паралелограма;
   (b) сторона, нерівна їй середня лінія та кут між ними одного паралелограма дорівнюють стороні, нерівній їй середній лінії та куту між ними іншого паралелограма;
2) `дві сторони та кут між діагоналями` одного паралелограма дорівнюють двом сторонам та куту між діагоналями іншого паралелограма;
3) `дві діагоналі та кут між сторонами` одного паралелограма дорівнюють двом діагоналям та куту між сторонами іншого паралелограма;
4) `діагоналі та кут між ними` одного паралелограма дорівнюють діагоналям та куту між ними іншого паралелограма;
5) `сторона, діагональ та кут між ними` одного паралелограма дорівнюють стороні, діагоналі та куту між ними іншого паралелограма;
6) `сторона та дві діагоналі` одного паралелограма дорівнюють стороні та двом діагоналям іншого паралелограма;
7) `непаралельні сторони та діагональ` одного паралелограма дорівнюють непаралельним сторонам та діагоналі іншого паралелограма;
   (a) середні лінії та діагональ одного паралелограма дорівнюють середнім лініям та діагоналі іншого паралелограма;
   (b) діагональ та два кути, які вона утворює з непаралельними сторонами одного паралелограма дорівнюють діагоналі та двом кутам, які вона утворює з непаралельними сторонами іншого паралелограма;
8) `лінійний елемент, кут між діагоналями та кут між сторонами` одного паралелограма дорівнюють відповідному лінійному елементу, куту між діагоналями та куту між сторонами іншого паралелограма;

то такі паралелограми є рівними.

2.6. Ознаки подібності паралелограмів

? Чи можуть два неподібних паралелограма мати відповідно паралельні сторони? (Відповідь: так, можуть.)

Теореми-ознаки подібності паралелограмів (ті, що до них зводяться). *Якщо виконується одна з наступних умов*

1) два кути, які більша (менша) діагональ утворює з непаралельними сторонами одного паралелограма, відповідно дорівнюють двом кутам, які більша (менша) діагональ утворює з непаралельними сторонами іншого паралелограма;
2) дві (непаралельні) сторони одного паралелограма відповідно пропорційні двом (непаралельним) сторонам іншого паралелограма і кути між цими сторонами рівні між собою;
3) дві діагоналі одного паралелограма відповідно пропорційні двом діагоналями іншого паралелограма і кути між цими діагоналями рівні;
4) більша (менша) сторона та більша (менша) діагональ відповідно пропорційні більшій (меншій) стороні та більшій (меншій) діагоналі іншого паралелограма і кути між ними рівні між собою;
5) дві (непаралельні) сторони та діагональ одного паралелограма відповідно пропорційні двом (непаралельним) сторонам та діагоналі іншого паралелограма;
6) нетупий кут між сторонами та нетупий кут між діагоналями одного паралелограма відповідно дорівнюють нетупому куту між сторонами та нетупому куту між діагоналями іншого паралелограма;

то такі паралелограми є подібними.

2.7. Паралелограм: задачі на обчислення.

Перелік умовних позначень:

a і b – довжини сторін паралелограма, причому $a \geqslant b$;

α – нетупий, а β – негострий кут між його сторонами;

d_1, d_2 – довжини діагоналей ($d_1 \geqslant d_2$), а φ – нетупий кут між ними;

h_a, h_b – довжини висот, проведених до сторін a і b відповідно;

h_1, h_2 – довжини перпендикулярів, опущених із вершин паралелограма на діагоналі d_1 і d_2 відповідно;

l_a, l_b – довжини бісектрис нетупого та негострого кутів відповідно;

m_a, m_a' – довжини («медіан») відрізків, що сполучають *середину більшої сторони* з вершинами нетупого та негострого кутів відповідно;

m_b, m_b' – довжини («медіан») відрізків, що сполучають *середину меншої сторони* з вершинами нетупого та негострого кутів відповідно;

α_1, α_2 – кути, які утворює *більша діагональ* з більшою та меншою сторонами паралелограма відповідно; β_1, β_2 – кути, які утворює *менша діагональ* з більшою та меншою сторонами паралелограма відповідно;

P, S – периметр та площа паралелограма відповідно.

2.7.1. «Основні метричні співвідношення» в паралелограмі

1) $h_b = a\sin\alpha$, $h_a = b\sin\alpha$, звідки: $h_a : h_b = b : a$;

   (a) $\sin^2\alpha = \dfrac{h_a h_b}{ab}$, звідки: $ab \geqslant h_a h_b$, $\cos^2\alpha = \dfrac{ab - h_a h_b}{ab}$;

2) $h_1 = \frac{1}{2} d_2 \sin\varphi$, $h_2 = \frac{1}{2} d_1 \sin\varphi$, звідки: $h_1 : h_2 = d_2 : d_1$;

   (a) $\sin^2\varphi = \dfrac{4h_1h_2}{d_1d_2}$, звідки: $d_1d_2 \geqslant 4h_1h_2$, $\cos^2\varphi = \dfrac{d_1d_2 - 4h_1h_2}{d_1d_2}$;

3) $l_a = 2b\cos\frac{\alpha}{2}$, $l_b = 2b\sin\frac{\alpha}{2}$, звідки:

$$l_a^2 - l_b^2 = 4b^2\cos\alpha, \quad l_a^2 + l_b^2 = 4b^2, \quad l_a \cdot l_b = 2b^2\sin\alpha, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{l_a^2 - l_b^2}{2l_a l_b}.$$

4) **кути, що утворені діагоналями зі сторонами паралелограма**:

   (a) $h_a = d_1\sin\alpha_1$, $h_b = d_1\sin\alpha_2$, звідки: $h_a : h_b = \sin\alpha_1 : \sin\alpha_2$;

   (b) $\dfrac{a}{\sin\alpha_2} = \dfrac{b}{\sin\alpha_1} = \dfrac{d_1}{\sin\alpha}$, $\dfrac{a}{\sin\beta_2} = \dfrac{b}{\sin\beta_1} = \dfrac{d_2}{\sin\alpha}$;

   (c) $\cos\alpha_1 = \frac{a+b\cos\alpha}{d_1}$, $\cos\alpha_2 = \frac{b+a\cos\alpha}{d_1}$, $\cos\beta_1 = \frac{a-b\cos\alpha}{d_2}$, $\cos\beta_2 = \frac{b-a\cos\alpha}{d_2}$;

   (d) $\operatorname{ctg}\alpha_1 = \dfrac{a + b\cos\alpha}{b\sin\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha_2 = \dfrac{b + a\cos\alpha}{a\sin\alpha}$;

   $\operatorname{ctg}\beta_1 = \dfrac{a - b\cos\alpha}{b\sin\alpha}$, $\operatorname{ctg}\beta_2 = \dfrac{b - a\cos\alpha}{a\sin\alpha}$.

5) $S = \dfrac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$; $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$; $S = d_1 \cdot h_1 = d_2 \cdot h_2$;

   (a) $S = ab\sin\alpha$;

   (b) $S = \dfrac{d_1^2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$;

   (c) $S = \sqrt{ab h_a h_b}$;

   (d) $S = \dfrac{h_a \cdot h_b}{\sin\alpha}$;

   (e) $S = \sqrt{d_1 d_2 h_1 h_2}$;

   (f) $S = \dfrac{2h_1 \cdot h_2}{\sin\varphi}$;

   (g) $\sin\alpha \cdot \sin\varphi = \dfrac{2h_a h_b}{d_1 d_2} = \dfrac{2h_1 h_2}{ab}$, $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = \dfrac{d_1 d_2}{2ab} = \dfrac{h_a h_b}{2h_1 h_2}$;

«**навколо теореми косинусів**»:

6) $d_1^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$, $d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$:

   (a) $d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$ — «**рівність паралелограма**»;

   (b) «проти більшого кута лежить більша діагональ і навпаки»;

   (c) «проти меншого кута лежить менша діагональ і навпаки»;

(d) «до нерівностей паралелограма»:
$\sqrt{a^2+b^2} \leqslant d_1 < a+b, \quad a-b < d_2 \leqslant \sqrt{a^2+b^2}\,;$

(e) $d_1^2 - d_2^2 = 4ab\cos\alpha$:

i. «до нерівностей паралелограма»:
$$4ab > d_1^2 - d_2^2\,, \quad \cos\alpha \geqslant \frac{d_1^2-d_2^2}{d_1^2+d_2^2}\,, \quad \operatorname{ctg}\tfrac{\alpha}{2} = \frac{l_a}{l_b} \geqslant \frac{d_1}{d_2}\,;$$

ii. $d_1 = d_2 \Leftrightarrow \alpha = 90^0\,,$

iii. $d_1^2 - d_2^2 = 2ab \Leftrightarrow \alpha = 60^0\,,$

iv. $d_1^2 - d_2^2 = 2ab\sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha = 45^0\,,$

v. $d_1^2 - d_2^2 = 2ab\sqrt{3} \Leftrightarrow \alpha = 30^0\,,$

vi. $\left(d_1^2 - d_2^2\right)\cdot\sin\alpha = 4S\cdot\cos\alpha\,,$

vii. $a\left(l_a^2 - l_b^2\right) = b\left(d_1^2 - d_2^2\right),$

viii. $\sin\alpha = \frac{1}{4ab}\sqrt{16a^2b^2 - \left(d_1^2-d_2^2\right)^2}\,, \quad S = \frac14\sqrt{16a^2b^2 - \left(d_1^2-d_2^2\right)^2}\,;$

(f) $d_1^2d_2^2 = \left(a^2+b^2\right)^2 - 4a^2b^2\cos^2\alpha =$
$$= \left(a^2-b^2\right)^2 + 4abh_ah_b = \left(a^2-b^2\right)^2 + 4S^2:$$

i. $d_1\cdot d_2 = a^2+b^2 \Leftrightarrow \alpha = 90^0\,;$

ii. $d_1^2\cdot d_2^2 = a^4+b^4 \Leftrightarrow \alpha = 45^0\,;$

iii. $d_1^2\cdot d_2^2 = a^4+b^4+a^2b^2 \Leftrightarrow \alpha = 60^0\,;$

iv. $d_1^2\cdot d_2^2 = a^4+b^4-a^2b^2 \Leftrightarrow \alpha = 30^0\,;$

7) $a^2 = \dfrac14 d_1^2 + \dfrac14 d_2^2 + \dfrac12 d_1d_2\cos\varphi, \qquad b^2 = \dfrac14 d_1^2 + \dfrac14 d_2^2 - \dfrac12 d_1d_2\cos\varphi\,;$

(a) «до нерівностей паралелограма»:
$\dfrac12\sqrt{d_1^2+d_2^2} \leqslant a < \dfrac12(d_1+d_2), \quad \dfrac12(d_1-d_2) < b \leqslant \dfrac12\sqrt{d_1^2+d_2^2}\,;$

(b) $a^2 - b^2 = d_1d_2\cos\varphi$:

i. «до нерівностей паралелограма»:
$$d_1d_2 > a^2-b^2\,, \quad \cos\varphi \geqslant \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\,, \quad \operatorname{ctg}\tfrac{\varphi}{2} \geqslant \frac{a}{b}\,;$$

ii. $a = b \Leftrightarrow \varphi = 90^0\,,$

iii. $a^2 - b^2 = \frac12 d_1d_2 \Leftrightarrow \varphi = 60^0\,,$

iv. $a^2 - b^2 = \frac{\sqrt2}{2} d_1d_2 \Leftrightarrow \varphi = 45^0\,,$

v. $a^2 - b^2 = \frac{\sqrt3}{2} d_1d_2 \Leftrightarrow \varphi = 30^0\,,$

vi. $a^2 - b^2 = 2S\cdot\operatorname{ctg}\varphi\,,$

vii. $\sin\varphi = \frac{1}{d_1d_2}\sqrt{d_1^2d_2^2 - \left(a^2-b^2\right)^2}\,, \quad S = \frac12\sqrt{d_1^2d_2^2 - \left(a^2-b^2\right)^2}\,;$

(c) $16a^2b^2 = \left(d_1^2+d_2^2\right)^2 - 4d_1^2d_2^2\cos^2\varphi =$
$$= \left(d_1^2-d_2^2\right)^2 + 16d_1d_2h_1h_2 = \left(d_1^2-d_2^2\right)^2 + 16S^2:$$

i. $4ab = d_1^2 + d_2^2 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \varphi = 90^0\,,$

ii. $16a^2b^2 = d_1^4 + d_2^4 + d_1^2d_2^2 \Leftrightarrow \varphi = 60^0\,,$

iii. $16a^2b^2 = d_1^4 + d_2^4 - d_1^2d_2^2 \Leftrightarrow \varphi = 30^0\,,$

iv. $16a^2b^2 = d_1^4 + d_2^4 \Leftrightarrow \varphi = 45^0\,,$

«**навколо рівності паралелограма**»:

8) $2\left(\dfrac{1}{h_a^2}+\dfrac{1}{h_b^2}\right)=\dfrac{1}{h_1^2}+\dfrac{1}{h_2^2}$;

9) $4m_a^2=2(b^2+d_1^2)-a^2$, $4m_a'^2=2(b^2+d_2^2)-a^2$;
$4m_b^2=2(a^2+d_1^2)-b^2$, $4m_b'^2=2(a^2+d_2^2)-b^2$;

(a) $2(m_a^2-m_a'^2)=d_1^2-d_2^2=4ab\cos\alpha$, звідки $m_a\geqslant m_a'$;

(b) $2(m_b^2-m_b'^2)=d_1^2-d_2^2=4ab\cos\alpha$, звідки $m_b\geqslant m_b'$;

(c) $m_a^2+m_b'^2=m_b^2+m_a'^2$;

(d) $2(m_a^2+m_a'^2)=4b^2+a^2$, $2(m_b^2+m_b'^2)=4a^2+b^2$;

(e) $m_a^2+m_a'^2+m_b^2+m_b'^2=\frac{5}{2}(a^2+b^2)=\frac{5}{4}(d_1^2+d_2^2)$,
$m_a^2+m_b'^2=m_b^2+m_a'^2=\frac{5}{4}(a^2+b^2)=\frac{5}{8}(d_1^2+d_2^2)$;

(f) $4(m_b^2-m_a^2)=3(a^2-b^2)=3d_1d_2\cos\varphi$, звідки $m_b\geqslant m_a$;

(g) $4(m_b'^2-m_a'^2)=3(a^2-b^2)=3d_1d_2\cos\varphi$, звідки $m_b'\geqslant m_a'$;

10) «**навколо формули Герона**»:

(a) $4S^2=\left[(a+b)^2-d_i^2\right]\left[d_i^2-(a-b)^2\right]=$
$=\left[2ab+\left(a^2+b^2-d_i^2\right)\right]\left[2ab-\left(a^2+b^2-d_i^2\right)\right]=$
$=4a^2b^2-\left(a^2+b^2-d_i^2\right)^2=4a^2b^2-\frac{1}{4}\left(d_1^2-d_2^2\right)^2=d_1^2d_2^2-\left(a^2-b^2\right)^2$;

(b) $16S^2=\left[(d_1+d_2)^2-4a^2\right]\left[4a^2-(d_1-d_2)^2\right]=$
$=\left[2d_1d_2-\left(4a^2-d_1^2-d_2^2\right)\right]\left[2d_1d_2+\left(4a^2-d_1^2-d_2^2\right)\right]=$
$=4d_1^2d_2^2-\left(4a^2-d_1^2-d_2^2\right)^2=4d_1^2d_2^2-\left(d_1^2+d_2^2-4b^2\right)^2=$
$=4d_1^2d_2^2-4\left(a^2-b^2\right)^2=16a^2b^2-(d_1^2-d_2^2)^2$.

11) «**додаткові формули для знаходження площі паралелограма**»:

(a) якщо m — добуток довжин непаралельних сторін, n — добуток довжин двох непаралельних висот паралелограма ($m\geqslant n$), то
$$S=\sqrt{mn}.$$

(b) якщо m — добуток довжин діагоналей, а n — добуток довжин двох непаралельних перпендикулярів, опущених на діагоналі ($m\geqslant 4n$), то
$$S=\sqrt{mn}.$$

(c) якщо $a\neq b\Leftrightarrow\varphi<90^0$, то $S=\frac{1}{2}\left(a^2-b^2\right)\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{2h_a^2h_b^2}{h_b^2-h_a^2}\operatorname{ctg}\varphi$;

(d) якщо $d_1\neq d_2\Leftrightarrow\alpha<90^0$, то $S=\frac{1}{4}\left(d_1^2-d_2^2\right)\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{4h_1^2h_2^2}{h_2^2-h_1^2}\operatorname{ctg}\alpha$;

(e) $S=\frac{Ph_ah_b}{2(h_a+h_b)}$, $S=\frac{1}{8}\sqrt{(P^2-4d_1^2)\,(P^2-4d_2^2)}$;

(f) $S=\dfrac{d_1^2}{\operatorname{ctg}\alpha_2+\operatorname{ctg}\alpha_1}=\dfrac{d_1^2h_ah_b}{h_a\sqrt{d_1^2-h_b^2}+h_b\sqrt{d_1^2-h_a^2}}$;

12) **«навколо тригонометричних тотожностей»**:

(a) $\dfrac{h_a h_b}{ab} + \dfrac{\left(a^2+b^2\right)^2 - d_1^2 d_2^2}{4a^2b^2} = 1\,;\quad \dfrac{4h_1h_2}{d_1d_2} + \dfrac{\left(d_1^2+d_2^2\right)^2 - 16a^2b^2}{4d_1^2d_2^2} = 1\,;$

(b) $\sin(\alpha \mp \varphi) = \dfrac{S}{2abd_1d_2}\cdot\left(2(a^2-b^2) \mp (d_1^2-d_2^2)\right);$

i. якщо $\alpha+\varphi=90^0$, то $\quad S = \dfrac{2abd_1d_2}{2(a^2-b^2)+(d_1^2-d_2^2)}\,;$

ii. якщо $\alpha=\varphi$, то $\quad d_1^2-d_2^2 = 2a^2-2b^2 \Leftrightarrow d_1 = a\sqrt{2} \Leftrightarrow d_2 = b\sqrt{2}\,;$

(c) $\cos(\alpha \mp \varphi) = \dfrac{(a^2-b^2)(d_1^2-d_2^2) \pm 8abh_ah_b}{4abd_1d_2} = \dfrac{(a^2-b^2)(d_1^2-d_2^2) \pm 8S^2}{4abd_1d_2}\,;$

i. якщо $\alpha+\varphi=90^0$, то $\quad 8S^2 = (d_1^2-d_2^2)(a^2-b^2)\,;$

ii. якщо $\alpha=\varphi$, то $8S^2 = 4abd_1d_2 - (d_1^2-d_2^2)(a^2-b^2) = 12a^2b^2 - 2(a^4+b^4)\,;$

13) **«навколо рівності кутів між сторонами та діагоналями»**:

(a) Якщо $d_1 = a\sqrt{2} \Leftrightarrow d_2 = b\sqrt{2} \Leftrightarrow d_1^2-d_2^2 = 2a^2-2b^2$, то:
$\cos\alpha = \dfrac{d_1^2-d_2^2}{4ab} = \dfrac{a^2-b^2}{2ab}$, $\cos\varphi = \dfrac{a^2-b^2}{d_1d_2} = \dfrac{a^2-b^2}{2ab}$, звідки $\alpha=\varphi$.

(b) Якщо α — гострий кут паралелограма, а φ — гострий кут між його діагоналями, то має місце рівність

$$\operatorname{ctg}\varphi\left(d_1^2-d_2^2\right) = \operatorname{ctg}\alpha\left(2a^2-2b^2\right):$$

i. якщо ж $\alpha=\varphi$, то $d_1^2-d_2^2 = 2a^2-2b^2 \Leftrightarrow d_1 = a\sqrt{2} \Leftrightarrow d_2 = b\sqrt{2}\,;$

(c) Якщо довжини діагоналей пропорційні довжинам непаралельних сторін, то кути між сторонами та діагоналями рівні ($\alpha=\varphi$).

14) **якщо у паралелограма одна з діагоналей перпендикулярна до його сторони**, то мають місце рівності:

(a) $\varphi = 90^0 - \alpha_2\,;$
(b) $h_b = d_2\,;$
(c) $h_2 = b\,;$
(d) $ah_a = b\cdot d_2\,;$
(e) $a^2 = b^2 + d_2^2\,;$
(f) $4b^2 = d_1^2 - d_2^2\,;$
(g) $4a^2 = d_1^2 + 3d_2^2\,;$
(h) $S = \frac{1}{2}d_2\sqrt{d_1^2-d_2^2}\,;$
(i) $S = b\sqrt{a^2-b^2}\,;$
(j) $\cos\alpha = \frac{b}{a}\,;$
(k) $\cos\beta_1 = \frac{d_2}{a}\,;$
(l) $\cos\varphi = \sin\alpha_2 = \frac{d_2}{d_1}\,;$

15) **залежність між сторонами** $a \geqslant b$ **та** нетупими **кутами** φ, α:

$$\frac{b}{a} = \sin\alpha\left(\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\varphi} - \operatorname{ctg}\varphi\right),$$
$$\frac{a}{b} = \sin\alpha\left(\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\varphi} + \operatorname{ctg}\varphi\right);$$

16) **залежність між діагоналями** $d_1 \geqslant d_2$ **та** нетупими **кутами** φ, α:

$$\frac{d_2}{d_1} = \sin\varphi\left(\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\varphi} - \operatorname{ctg}\alpha\right),$$
$$\frac{d_1}{d_2} = \sin\varphi\left(\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\varphi} + \operatorname{ctg}\alpha\right).$$

2.7.3. «Зведені таблиці» для величин основних елементів паралелограма

за відомими $a,\ b,\ \alpha\ (a \geqslant b)$**:**

1) $P = 2(a+b)$;
2) $S = ab\sin\alpha$;
3) $h_a = b\sin\alpha,\quad h_b = a\sin\alpha$;
4) $l_a = 2b\cos\frac{\alpha}{2},\quad l_b = 2b\sin\frac{\alpha}{2}$;
5) $d_1 = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha},\quad d_2 = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$;
6) $h_1 = \dfrac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}},\ h_2 = \dfrac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}$;
7) $\cos\varphi = \dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a^4+b^4-2a^2b^2\cos 2\alpha}},\ \sin\varphi = \dfrac{2ab\sin\alpha}{\sqrt{a^4+b^4-2a^2b^2\cos 2\alpha}}$;
8) $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2+a^2+4ab\cos\alpha},\quad m'_a = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2+a^2-4ab\cos\alpha}$;
9) $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2+4ab\cos\alpha},\quad m'_b = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2-4ab\cos\alpha}$;
10) $\cos\alpha_1 = \dfrac{a+b\cos\alpha}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}},\quad \cos\alpha_2 = \dfrac{b+a\cos\alpha}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}$;
11) $\cos\beta_1 = \dfrac{a-b\cos\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}},\quad \cos\beta_2 = \dfrac{b-a\cos\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}$;

за відомими $d_1,\ d_2,\ \varphi\ (d_1 \geqslant d_2)$**:**

1) $S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$;
2) $h_1 = \frac{d_2}{2}\sin\varphi,\ h_2 = \frac{d_1}{2}\sin\varphi$;
3) $a = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2+d_2^2+2d_1d_2\cos\varphi},\quad b = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2+d_2^2-2d_1d_2\cos\varphi}$;
4) $P = \sqrt{d_1^2+d_2^2+2d_1d_2\cos\varphi} + \sqrt{d_1^2+d_2^2-2d_1d_2\cos\varphi}$;
5) $h_a = \dfrac{d_1d_2\sin\varphi}{\sqrt{d_1^2+d_2^2+2d_1d_2\cos\varphi}},\quad h_b = \dfrac{d_1d_2\sin\varphi}{\sqrt{d_1^2+d_2^2-2d_1d_2\cos\varphi}}$;
6) $\cos\alpha_1 = \dfrac{d_1+d_2\cos\varphi}{\sqrt{d_1^2+d_2^2+2d_1d_2\cos\varphi}},\quad \cos\alpha_2 = \dfrac{d_1-d_2\cos\varphi}{\sqrt{d_1^2+d_2^2-2d_1d_2\cos\varphi}}$;
7) $\cos\beta_1 = \dfrac{d_2+d_1\cos\varphi}{\sqrt{d_1^2+d_2^2+2d_1d_2\cos\varphi}},\quad \cos\beta_2 = \dfrac{d_2-d_1\cos\varphi}{\sqrt{d_1^2+d_2^2-2d_1d_2\cos\varphi}}$;
8) $\cos\alpha = \dfrac{d_1^2-d_2^2}{\sqrt{\left(d_1^2+d_2^2\right)^2-4d_1^2d_2^2\cos^2\varphi}},\quad \sin\alpha = \dfrac{2d_1d_2\sin\varphi}{\sqrt{\left(d_1^2+d_2^2\right)^2-4d_1^2d_2^2\cos^2\varphi}}$;
9) $m_a = \frac{1}{4}\sqrt{9d_1^2+d_2^2-6d_1d_2\cos\varphi},\quad m'_a = \frac{1}{4}\sqrt{9d_2^2+d_1^2-6d_1d_2\cos\varphi}$;
10) $m_b = \frac{1}{4}\sqrt{9d_1^2+d_2^2+6d_1d_2\cos\varphi},\quad m'_b = \frac{1}{4}\sqrt{9d_2^2+d_1^2+6d_1d_2\cos\varphi}$;
11) $l_a^2 = 2b^2 + \dfrac{2b^2(d_1^2-d_2^2)}{\sqrt{\left(d_1^2+d_2^2\right)^2-4d_1^2d_2^2\cos^2\varphi}},\ l_b^2 = 2b^2 - \dfrac{2b^2(d_1^2-d_2^2)}{\sqrt{\left(d_1^2+d_2^2\right)^2-4d_1^2d_2^2\cos^2\varphi}}$;

за відомими $a,\ b,\ d_1\ (a \geqslant b)$**:**

1) $P = 2(a+b)$; 2) $d_2 = \sqrt{2(a^2+b^2)-d_1^2}$;

3) $S = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-d_1^2)^2}$;

4) $h_a = \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-d_1^2)^2}, \quad h_b = \frac{1}{2b}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-d_1^2)^2}$;

5) $h_1 = \dfrac{\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-d_1^2)^2}}{2d_1}, \quad h_2 = \dfrac{\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-d_1^2)^2}}{2\sqrt{2(a^2+b^2)-d_1^2}}$;

6) $\cos\alpha = \frac{1}{2ab}(d_1^2-a^2-b^2), \quad \sin\alpha = \frac{1}{2ab}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-d_1^2)^2}$;

7) $\cos\varphi = \dfrac{a^2-b^2}{d_1\sqrt{2(a^2+b^2)-d_1^2}}, \quad \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-d_1^2)^2}}{d_1\sqrt{2(a^2+b^2)-d_1^2}}$;

8) $l_a^2 = 2b^2\left(1+\dfrac{d_1^2-a^2-b^2}{2ab}\right), \quad l_b^2 = 2b^2\left(1-\dfrac{d_1^2-a^2-b^2}{2ab}\right)$;

9) $m_a^2 = \frac{1}{4}(2d_1^2+2b^2-a^2), \quad m_b^2 = \frac{1}{4}(2d_1^2+2a^2-b^2)$;

10) $m_a'^2 = \frac{1}{4}(3a^2+6b^2-2d_1^2), \quad m_b'^2 = \frac{1}{4}(6a^2+3b^2-2d_1^2)$;

11) $\cos\alpha_1 = \frac{1}{2ad_1}(a^2+d_1^2-b^2), \quad \cos\alpha_2 = \frac{1}{2bd_1}(b^2+d_1^2-a^2)$;

12) $\cos\beta_1 = \dfrac{3a^2+b^2-d_1^2}{2a\sqrt{2(a^2+b^2)-d_1^2}}, \quad \cos\beta_2 = \dfrac{a^2+3b^2-d_1^2}{2a\sqrt{2(a^2+b^2)-d_1^2}}$.

за відомими $d_1,\ d_2,\ a\ (d_1 \geqslant d_2)$**:**

1) $b = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d_1^2+d_2^2-2a^2}$; 2) $P = 2a+\sqrt{2}\sqrt{d_1^2+d_2^2-2a^2}$;

3) $S = \frac{1}{4}\sqrt{4d_1^2d_2^2-(4a^2-d_1^2-d_2^2)^2}$;

4) $h_a = \frac{1}{4a}\sqrt{4d_1^2d_2^2-(4a^2-d_1^2-d_2^2)^2}, \ h_b = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{4d_1^2d_2^2-\left(4a^2-d_1^2-d_2^2\right)^2}{d_1^2+d_2^2-2a^2}}$;

5) $h_1 = \frac{1}{4d_1}\sqrt{4d_1^2d_2^2-(4a^2-d_1^2-d_2^2)^2}, \quad h_2 = \frac{1}{4d_2}\sqrt{4d_1^2d_2^2-(4a^2-d_1^2-d_2^2)^2}$;

6) $4m_a^2 = 3d_1^2+d_2^2-3a^2, \quad 4m_a'^2 = d_1^2+3d_2^2-3a^2$;

7) $4m_b^2 = 3a^2+\frac{3}{2}d_1^2-\frac{1}{2}d_2^2, \quad 4m_b'^2 = 3a^2-\frac{1}{2}d_1^2+\frac{3}{2}d_2^2$;

8) $\sin\varphi = \frac{1}{2d_1d_2}\sqrt{4d_1^2d_2^2-(4a^2-d_1^2-d_2^2)^2}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{2d_1d_2}(4a^2-d_1^2-d_2^2)$;

9) $\sin\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}a}\sqrt{\dfrac{4d_1^2d_2^2-\left(4a^2-d_1^2-d_2^2\right)^2}{d_1^2+d_2^2-2a^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}\dfrac{d_1^2-d_2^2}{a\sqrt{d_1^2+d_2^2-2a^2}}$;

10) $l_a^2 = 2b^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{b^2(d_1^2-d_2^2)}{a\sqrt{d_1^2+d_2^2-2a^2}}, \quad l_b^2 = 2b^2-\frac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{b^2(d_1^2-d_2^2)}{a\sqrt{d_1^2+d_2^2-2a^2}}$;

11) $\cos\alpha_1 = \frac{1}{4ad_1}(4a^2+d_1^2-d_2^2), \quad \cos\beta_1 = \frac{1}{4ad_2}(4a^2+d_2^2-d_1^2)$;

12) $\cos\alpha_2 = \dfrac{3d_1^2+d_2^2-4a^2}{2\sqrt{2}d_1\sqrt{d_1^2+d_2^2-2a^2}}, \quad \cos\beta_2 = \dfrac{d_1^2+3d_2^2-4a^2}{2\sqrt{2}d_2\sqrt{d_1^2+d_2^2-2a^2}}$.

2.7.3. «Найбільш типові задачі на обчислення»

Якщо у паралелограма відомими є:

1) відношення кутів $m:n$ $(m>n)$, то $\alpha=\frac{n}{m+n}\cdot 180^0$, $\beta=\frac{m}{m+n}\cdot 180^0$;
2) різниця кутів q $(q>0)$, то $\alpha=\frac{1}{2}(180^0-q)$, $\beta=\frac{1}{2}(180^0+q)$;
3) сума кутів q $(q<180^0)$, то $\alpha=\frac{q}{2}$, $\beta=180^0-\frac{q}{2}$;
4) сума кутів q $(q\geqslant 180^0)$, то $\alpha=180^0-\frac{q}{2}$, $\beta=\frac{q}{2}$;
5) кут ψ між бісектрисою тупого кута та висотою, опущеної з цієї вершини, то $\alpha=2\psi$, $\beta=180^0-2\psi$;
6) кути ω_1 і ω_2, які утворюють (непаралельні) висоти паралелограма з певною діагоналлю, то його кути становлять
$$\omega_1+\omega_2 \text{ та } 180^0-(\omega_1+\omega_2);$$
7) гострий кут α та довжини m і n відрізків, на які основа бісектриси тупого (гострого) кута ділить сторону рухаючись від вершини гострого (відповідно тупого) кута, то $S=m(m+n)\sin\alpha$;
8) **периметр P та ...**
   (a) сторона a (сторона b), то
   $$b=\frac{P-2a}{2}\quad\left(a=\frac{P-2b}{2}\right);$$
   (b) різниця (нерівних) сторін q, то
   $$a=\frac{P+2q}{4},\quad b=\frac{P-2q}{4};$$
   (c) відношення сторін $m:n$ $(m>n)$, то
   $$a=\frac{P\cdot m}{2(m+n)},\quad b=\frac{P\cdot n}{2(m+n)};$$
   (d) відношення $m:n$, у якому основа бісектриси тупого кута ділить сторону рухаючись від вершини гострого кута, то
   $$a=\frac{P(m+n)}{2(2m+n)},\quad b=\frac{Pm}{2(2m+n)};$$
   (e) довжини відрізків m і n $(m\leqslant n)$, на які бісектриса гострого кута ділить діагональ рухаючись від вершини тупого кута, то
   $$a=\frac{Pn}{2(m+n)},\quad b=\frac{Pm}{2(m+n)};$$
   (f) довжини m і n $(m<n)$ відрізків, на які основа висоти, опущеної з вершини гострого кута, ділить (меншу) діагональ, то
   $$a=\frac{1}{P}\left(\frac{P^2}{4}+n^2-m^2\right),\quad b=\frac{1}{P}\left(\frac{P^2}{4}-n^2+m^2\right);$$
   (g) діагоналі d_1, d_2, то
   $$a=\frac{1}{4}\left(P+\sqrt{4(d_1^2+d_2^2)-P^2}\right),\quad b=\frac{1}{4}\left(P-\sqrt{4(d_1^2+d_2^2)-P^2}\right);$$
   (h) висоти h_a, h_b $(h_a\leqslant h_b)$, то
   $$a=\frac{P\cdot h_b}{2(h_a+h_b)},\ b=\frac{P\cdot h_a}{2(h_a+h_b)},\ S=\frac{Ph_ah_b}{2(h_a+h_b)},\ \sin\alpha=\frac{2(h_a+h_b)}{P};$$

(i) відношення висот $m:n$ $(m>n)$, то
$$a=\frac{P\cdot m}{2(m+n)}\,,\quad b=\frac{P\cdot n}{2(m+n)}\,;$$
(j) площа S і висота h_a (висота h_b), то
$$h_b=\frac{2Sh_a}{Ph_a-2S}\ \left(h_a=\frac{2Sh_b}{Ph_b-2S}\right);$$

9) **сторони a, b та ...**

(a) більша (менша) діагональ d_i $(i=1,2)$, то
$$d_j=\sqrt{2(a^2+b^2)-d_i},\ j\neq i\,;$$
(b) відношення діагоналей $m:n$ $(m>n)$, то
$$d_1=m\sqrt{\frac{2a^2+2b^2}{m^2+n^2}}\,,\quad d_2=n\sqrt{\frac{2a^2+2b^2}{m^2+n^2}}\,;$$
(c) різниця діагоналей q, то
$$d_1=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{4(a^2+b^2)-q^2}+q\right),\quad d_2=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{4(a^2+b^2)-q^2}-q\right);$$
(d) висота h_a (висота h_b), то
$$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{a^2-b^2}{2ah_a}\quad\left(\operatorname{ctg}\varphi=\frac{a^2-b^2}{2bh_b}\right);$$
(e) гострий кут φ між діагоналями $(\varphi<90^0\Leftrightarrow a\neq b)$, то:

i. $S=\frac{1}{2}\left(a^2-b^2\right)\operatorname{tg}\varphi\,;\quad h_a=\dfrac{a^2-b^2}{2a}\operatorname{tg}\varphi\,,\quad h_b=\dfrac{a^2-b^2}{2b}\operatorname{tg}\varphi\,;$

ii. $d_1^2=a^2+b^2+\frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{(a^2+b^2)^2\cos^2\varphi-(a^2-b^2)^2}\,,$
$d_2^2=a^2+b^2-\frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{(a^2+b^2)^2\cos^2\varphi-(a^2-b^2)^2}\,;$

iii. $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{(a^2+b^2)^2\cos^2\varphi-(a^2-b^2)^2}}{2ab\cos\varphi}\,,\quad \sin\alpha=\dfrac{a^2-b^2}{2ab}\cdot\operatorname{tg}\varphi\,;$

(f) гострий кут β_1, який менша діагональ утворює з більшою стороною між діагоналями, причому з меншою стороною вона утворює саме тупий кут, то
$$d_1^2=a^2+b^2+2a(\cos\beta_1\sqrt{b^2-a^2\sin^2\beta_1}+a\sin^2\beta_1)\,;$$
(g) непрямий кут ψ, під яким із середини більшої сторони a видно протилежну до неї сторону, то
$$S_{ABCD}=\tfrac{1}{2}(4b^2-a^2)\operatorname{tg}\psi\,;$$

10) менша сторона b та довжини m і n відрізків, на які основа висоти, опущеної з точки перетину діагоналей, ділить більшу сторону рухаючись від вершини гострого кута, то
$$h_a=\sqrt{b^2-(m-n)^2},\quad S=(m+n)\sqrt{b^2-(m-n)^2}\,;$$

11) різниця сторін q та довжини m і n $(m<n)$ відрізків, на які основа висоти, опущеної з вершини тупого кута, ділить (більшу) діагональ, то
$$a=\tfrac{1}{2q}\left(n^2-m^2+q^2\right),\quad b=\tfrac{1}{2q}\left(n^2-m^2-q^2\right);$$

12) **діагоналі** d_1**,** d_2 **та ...**
   (a) сторона a (сторона b), то
$$b=\sqrt{\tfrac{d_1^2+d_2^2-2a^2}{2}},\quad \left(a=\sqrt{\tfrac{d_1^2+d_2^2-2b^2}{2}}\right);$$
   (b) відношення сторін $m:n$ ($m>n$), то
$$a=m\sqrt{\frac{d_1^2+d_2^2}{2m^2+2n^2}},\quad b=n\sqrt{\frac{d_1^2+d_2^2}{2m^2+2n^2}};$$
   (c) різниця сторін q, то
$$a=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{d_1^2+d_2^2-q^2}+q\right),\quad b=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{d_1^2+d_2^2-q^2}-q\right);$$
   (d) перпендикуляр h_1 (перпендикуляр h_2), то
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{d_1^2-d_2^2}{4d_1h_1}\quad\left(\operatorname{ctg}\alpha=\frac{d_1^2-d_2^2}{4d_2h_2}\right);$$
   (e) гострий кут α між сторонами ($\alpha<90^0\Leftrightarrow d_1\neq d_2$), то:
      i. $S=\frac{1}{4}\left(d_1^2-d_2^2\right)\operatorname{tg}\alpha;\quad h_1=\dfrac{d_1^2-d_2^2}{4d_1}\operatorname{tg}\alpha,\quad h_2=\dfrac{d_1^2-d_2^2}{4d_2}\operatorname{tg}\alpha;$
      ii. $a^2=\frac{1}{4}(d_1^2+d_2^2)+\frac{1}{4\cos\alpha}\sqrt{(d_1^2+d_2^2)^2\cos^2\alpha-(d_1^2-d_2^2)^2},$
      $b^2=\frac{1}{4}(d_1^2+d_2^2)-\frac{1}{4\cos\alpha}\sqrt{(d_1^2+d_2^2)^2\cos^2\alpha-(d_1^2-d_2^2)^2};$
      iii. $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{(d_1^2+d_2^2)^2\cos^2\alpha-(d_1^2-d_2^2)^2}}{2d_1d_2\cos\alpha},\quad \sin\varphi=\dfrac{d_1^2-d_2^2}{2d_1d_2}\cdot\operatorname{tg}\alpha;$

13) **відношення сторін** $m:n$ (більшої до меншої) **та відношення діагоналей** $p:q$ (більшої до меншої), то
$$\cos\alpha=\frac{(p^2-q^2)(m^2+n^2)}{2mn(p^2+q^2)},\quad \cos\varphi=\frac{(m^2-n^2)(p^2+q^2)}{2pq(m^2+n^2)};$$

14) **висоти** $h_a,\ h_b$ **та ...**
   (a) перпендикуляр h_1 (перпендикуляр h_2), то
$$\tfrac{1}{h_2}=\sqrt{\tfrac{2}{h_a^2}+\tfrac{2}{h_b^2}-\tfrac{1}{h_1^2}}\quad\left(\tfrac{1}{h_1}=\sqrt{\tfrac{2}{h_a^2}+\tfrac{2}{h_b^2}-\tfrac{1}{h_2^2}}\right);$$
   (b) гострий кут α між сторонами ($\alpha<90^0\Leftrightarrow d_1\neq d_2$), то:
      i. $a=\dfrac{h_b}{\sin\alpha},\quad b=\dfrac{h_a}{\sin\alpha};\quad S=\dfrac{h_ah_b}{\sin\alpha};$
      ii. $d_1=\dfrac{\sqrt{h_b^2+h_a^2+2h_bh_a\cos\alpha}}{\sin\alpha},\quad d_2=\dfrac{\sqrt{h_b^2+h_a^2-2h_bh_a\cos\alpha}}{\sin\alpha};$
      iii. $\cos\varphi=\dfrac{h_b^2-h_a^2}{\sqrt{h_a^4+h_b^4-2h_a^2b_a^2\cos2\alpha}},\sin\varphi=\dfrac{2h_bh_a\sin\alpha}{\sqrt{h_a^4+h_b^4-2h_a^2b_a^2\cos2\alpha}};$
   (c) площа S, то:
$$a=\frac{S}{h_a},\quad d_1^2=\frac{S^2}{h_a^2h_b^2}\left(h_a^2+h_b^2\right)+\frac{2S}{h_ah_b}\sqrt{S^2-h_a^2h_b^2};$$
$$b=\frac{S}{h_b},\quad d_2^2=\frac{S^2}{h_a^2h_b^2}\left(h_a^2+h_b^2\right)-\frac{2S}{h_ah_b}\sqrt{S^2-h_a^2h_b^2};$$

(d) гострий кут φ між діагоналями $(\varphi < 90^0 \Leftrightarrow a \neq b)$, то:

i. $S = \dfrac{2h_a^2h_b^2}{h_b^2 - h_a^2}\operatorname{ctg}\varphi$; $\quad a = \dfrac{2h_ah_b^2}{h_b^2 - h_a^2}\operatorname{ctg}\varphi$, $\quad b = \dfrac{2h_a^2h_b}{h_b^2 - h_a^2}\operatorname{ctg}\varphi$;

ii. $$d_1^2 = \frac{4h_a^2h_b^2}{(h_b^2 - h_a^2)^2}\cdot\operatorname{ctg}^2\varphi\cdot\left(h_a^2 + h_b^2 + \sqrt{(h_b^2 + h_a^2)^2 - \left(\tfrac{h_b^2 - h_a^2}{\cos\varphi}\right)^2}\right),$$
$$d_2^2 = \frac{4h_a^2h_b^2}{(h_b^2 - h_a^2)^2}\cdot\operatorname{ctg}^2\varphi\cdot\left(h_a^2 + h_b^2 - \sqrt{(h_b^2 + h_a^2)^2 - \left(\tfrac{h_b^2 - h_a^2}{\cos\varphi}\right)^2}\right);$$

iii. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{(h_b^2 + h_a^2)^2\cos^2\varphi - (h_b^2 - h_a^2)^2}}{2h_ah_b\cos\varphi}$, $\quad \sin\alpha = \dfrac{h_b^2 - h_a^2}{2h_ah_b}\cdot\operatorname{tg}\varphi$;

15) менша висота h_a та довжини m і n відрізків, на які основа висоти, опущеної з вершини тупого кута, ділить більшу сторону рухаючись від вершини гострого кута, то
$$b = \sqrt{m^2 + h_a^2}, \quad S = h_a(m+n), \quad h_b = \frac{h_a(m+n)}{\sqrt{m^2 + h_a^2}};$$

16) площа S та довжини m і n відрізків, на які основа висоти, опущеної з вершини тупого кута, ділить більшу сторону рухаючись від вершини гострого кута, то
$$h_a = \frac{S}{m+n}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{S}{m(m+n)}.$$

17) **перпендикуляри** h_1, h_2 **та ...**

(a) висота h_a (висота h_b), то
$$\tfrac{1}{h_b} = \sqrt{\tfrac{1}{2h_1^2} + \tfrac{1}{2h_2^2} - \tfrac{1}{h_a^2}} \quad \left(\tfrac{1}{h_a} = \sqrt{\tfrac{1}{2h_1^2} + \tfrac{1}{2h_2^2} - \tfrac{1}{h_b^2}}\right);$$

(b) гострий кут φ між діагоналями $(\varphi < 90^0 \Leftrightarrow a \neq b)$, то:

i. $d_1 = \dfrac{2h_2}{\sin\varphi}$, $\quad d_2 = \dfrac{2h_1}{\sin\varphi}$; $\quad S = \dfrac{2h_1h_2}{\sin\varphi}$.

ii. $a = \frac{1}{\sin\varphi}\sqrt{h_2^2 + h_1^2 + 2h_1h_2\cos\varphi}$,
$b = \frac{1}{\sin\varphi}\sqrt{h_2^2 + h_1^2 - 2h_1h_2\cos\varphi}$;

iii. $$\cos\alpha = \frac{h_2^2 - h_1^2}{\sqrt{h_1^4 + h_2^4 - 2h_1^2h_2^2\cos 2\varphi}},$$
$$\sin\alpha = \frac{2h_1h_2\sin\varphi}{\sqrt{h_1^4 + h_2^4 - 2h_1^2h_2^2\cos 2\varphi}};$$

(c) площа S, то:
$$d_1 = \frac{S}{h_1}, \quad a^2 = \frac{S^2}{4h_1^2h_2^2}\left(h_1^2 + h_2^2\right) + \frac{S}{2h_1h_2}\sqrt{S^2 - 4h_1^2h_2^2};$$
$$d_2 = \frac{S}{h_2}, \quad b^2 = \frac{S^2}{4h_1^2h_2^2}\left(h_1^2 + h_2^2\right) - \frac{S}{2h_1h_2}\sqrt{S^2 - 4h_1^2h_2^2};$$

(d) гострий кут α між сторонами $(\alpha < 90^0 \Leftrightarrow d_1 \neq d_2)$, то:

i. $S = \dfrac{4h_1^2h_2^2}{h_2^2 - h_1^2}\operatorname{ctg}\alpha$; $\quad d_1 = \dfrac{4h_1h_2^2}{h_2^2 - h_1^2}\operatorname{ctg}\alpha$, $\quad d_2 = \dfrac{4h_1^2h_2}{h_2^2 - h_1^2}\operatorname{ctg}\alpha$;

ii. $a^2 = \dfrac{4h_1^2h_2^2}{(h_2^2 - h_1^2)^2}\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\left(h_1^2 + h_2^2 + \sqrt{(h_1^2+h_2^2)^2 - \left(\frac{h_2^2-h_1^2}{\cos\alpha}\right)^2}\right)$,

$b^2 = \dfrac{4h_1^2h_2^2}{(h_2^2 - h_1^2)^2}\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\left(h_1^2 + h_2^2 - \sqrt{(h_1^2+h_2^2)^2 - \left(\frac{h_2^2-h_1^2}{\cos\alpha}\right)^2}\right)$;

iii. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{(h_1^2+h_2^2)^2\cos^2\alpha - (h_2^2-h_1^2)^2}}{2h_1h_2\cos\alpha}$, $\quad \sin\varphi = \dfrac{h_2^2 - h_1^2}{2h_1h_2}\cdot\operatorname{tg}\alpha$;

18) **бісектриси** $l_a,\ l_b$ $(l_a \neq l_b)$ —

(a) $\sin\alpha = \frac{2l_al_b}{l_a^2+l_b^2}$;
(b) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{l_a}{l_b}$;
(c) $\cos\alpha = \frac{l_a^2-l_b^2}{l_a^2+l_b^2}$;
(d) $h_a = \frac{l_al_b}{\sqrt{l_a^2+l_b^2}}$;
(e) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{l_a^2-l_b^2}{2l_al_b}$;
(f) $b = \frac{1}{2}\sqrt{l_a^2+l_b^2}$;

та ...

(g) сторона a, то:

i. $P = 2a + \sqrt{l_a^2+l_b^2}$, $\quad S = \dfrac{al_al_b}{\sqrt{l_a^2+l_b^2}}$,

ii. $d_1^2 = a^2 + \frac{1}{4}(l_a^2+l_b^2) + \dfrac{a(l_a^2-l_b^2)}{\sqrt{l_a^2+l_b^2}}$, $d_2^2 = a^2 + \frac{1}{4}(l_a^2+l_b^2) - \dfrac{a(l_a^2-l_b^2)}{\sqrt{l_a^2+l_b^2}}$;

iii. $\operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{4a^2 - l_a^2 - l_b^2}{8al_al_b}\sqrt{l_a^2+l_b^2}$;

(h) висота h_b, то:

i. $a = \dfrac{h_b(l_a^2+l_b^2)}{2l_al_b}$, $\quad P = \dfrac{h_b(l_a^2+l_b^2)}{l_al_b} + \sqrt{l_a^2+l_b^2}$, $\quad S = \frac{1}{2}h_b\sqrt{l_a^2+l_b^2}$;

ii. $d_1^2 = \dfrac{h_b^2(l_a^2+l_b^2)^2}{4l_a^2l_b^2} + \frac{1}{4}(l_a^2+l_b^2) + \dfrac{h_b(l_a^2-l_b^2)}{2l_al_b}\sqrt{l_a^2+l_b^2}$,

$d_2^2 = \dfrac{h_b^2(l_a^2+l_b^2)^2}{4l_a^2l_b^2} + \frac{1}{4}(l_a^2+l_b^2) - \dfrac{h_b(l_a^2-l_b^2)}{2l_al_b}\sqrt{l_a^2+l_b^2}$;

iii. $\operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{h_b^2(l_a^2+l_b^2)^2 - l_a^2l_b^2(l_a^2+l_b^2)}{4h_al_al_b\sqrt{l_a^2+l_b^2}}$.

(i) гострий кут φ між діагоналями $(\varphi < 90^0 \Leftrightarrow a \neq b)$, то:

i. $a = \dfrac{1}{2\sqrt{l_a^2+l_b^2}}\left(2l_al_b\operatorname{ctg}\varphi + \sqrt{4l_a^2l_b^2\operatorname{ctg}^2\varphi + (l_a^2+l_b^2)^2}\right)$;

ii. $S = \dfrac{l_al_b}{2(l_a^2+l_b^2)}\left(2l_al_b\operatorname{ctg}\varphi + \sqrt{4l_a^2l_b^2\operatorname{ctg}^2\varphi + (l_a^2+l_b^2)^2}\right)$;

iii. $h_b = \dfrac{l_al_b}{(l_a^2+l_b^2)^{\frac{3}{2}}}\left(2l_al_b\operatorname{ctg}\varphi + \sqrt{4l_a^2l_b^2\operatorname{ctg}^2\varphi + (l_a^2+l_b^2)^2}\right)$.

19) **нетупий кут α між сторонами, нетупий кут φ між діагоналями паралелограма та найбільша його сторона a (висота h_b), то**:

(a) $b = a\sin\alpha(\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\varphi}-\operatorname{ctg}\varphi) = a\sin\alpha\cdot\Delta = h_b\cdot\Delta$, де

$$\boxed{\Delta = \Delta(\alpha,\varphi) = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\varphi}-\operatorname{ctg}\varphi}$$

(b) $P = 2a(1+\Delta\sin\alpha)$;

(c) $S = a^2\sin^2\alpha\cdot\Delta = h_b^2\cdot\Delta$;

(d) $h_a = a\sin^2\alpha\cdot\Delta = h_b\sin\alpha\cdot\Delta$;

(e) $d_1 = a\sin\alpha\sqrt{1+[\Delta+\operatorname{ctg}\alpha]^2} = h_b\sqrt{1+[\Delta+\operatorname{ctg}\alpha]^2}$;

(f) $d_2 = a\sin\alpha\sqrt{1+[\Delta-\operatorname{ctg}\alpha]^2} = h_b\sqrt{1+[\Delta-\operatorname{ctg}\alpha]^2}$;

(g) $l_a = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot a\sin\alpha\cdot\Delta = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot h_b\cdot\Delta$;

(h) $l_b = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot a\sin\alpha\cdot\Delta = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot h_b\cdot\Delta$;

(i) $h_1 = \frac{1}{2}a\sin\alpha\sin\varphi\sqrt{1+[\Delta-\operatorname{ctg}\alpha]^2} = \frac{1}{2}h_b\sin\varphi\sqrt{1+[\Delta-\operatorname{ctg}\alpha]^2}$;

(j) $h_2 = \frac{1}{2}a\sin\alpha\sin\varphi\sqrt{1+[\Delta+\operatorname{ctg}\alpha]^2} = \frac{1}{2}h_b\sin\varphi\sqrt{1+[\Delta+\operatorname{ctg}\alpha]^2}$;

(k) $m_a = \frac{1}{2}a\sin\alpha\sqrt{1+[2\Delta+\operatorname{ctg}\alpha]^2} = \frac{1}{2}h_b\sqrt{1+[2\Delta+\operatorname{ctg}\alpha]^2}$,

(l) $m'_a = \frac{1}{2}a\sin\alpha\sqrt{1+[2\Delta-\operatorname{ctg}\alpha]^2} = \frac{1}{2}h_b\sqrt{1+[2\Delta-\operatorname{ctg}\alpha]^2}$;

(m) $m_b = \frac{1}{2}a\sin\alpha\sqrt{4+[\Delta+2\operatorname{ctg}\alpha]^2} = \frac{1}{2}h_b\sqrt{4+[\Delta+2\operatorname{ctg}\alpha]^2}$,

(n) $m'_b = \frac{1}{2}a\sin\alpha\sqrt{4+[\Delta-2\operatorname{ctg}\alpha]^2} = \frac{1}{2}h_b\sqrt{4+[\Delta-2\operatorname{ctg}\alpha]^2}$;

Зауваження 3. *Наведеними формулами зручно користуватися в обох напрямках, бо за трійкою a $(h_b), \alpha, \varphi$ легко знайти довжини решти лінійних елементів; з іншого боку – за кутами α, φ та одним з лінійних елементів можна знайти довжину сторони a, а потім довжини решти лінійних елементів.*

20) **нетупий кут α між сторонами та нетупий кут φ між діагоналями, то**:

(a) $\operatorname{ctg}\alpha_1 = \Delta + 2\operatorname{ctg}\varphi + \operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\varphi}+\operatorname{ctg}\varphi+\operatorname{ctg}\alpha$,

(b) $\operatorname{ctg}\alpha_2 = \Delta + \operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\varphi}-\operatorname{ctg}\varphi+\operatorname{ctg}\alpha$;

(c) $\operatorname{ctg}\beta_1 = \Delta + 2\operatorname{ctg}\varphi - \operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\varphi}+\operatorname{ctg}\varphi-\operatorname{ctg}\alpha$,

(d) $\operatorname{ctg}\beta_2 = \Delta - \operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\varphi}-\operatorname{ctg}\varphi-\operatorname{ctg}\alpha$.

Зауваження 4. *Безпосереднім наслідком з чотирьох останніх співвідношень є досить яскравий факт геометрії паралелограмів, а саме —* ознака подібності двох паралелограмів за рівністю нетупих кутів між їх сторонами та діагоналями.

2.8. Паралелограм: задачі на доведення.

2.8.1. «Навколо бісектрис» в паралелограмі

Доведіть, що:

1) бісектриси внутрішніх та зовнішніх кутів, прилеглих до певної сторони, утворюють прямокутник, діагоналі якого паралельні сторонам паралелограма і довжини яких дорівнюють довжині зазначеної сторони;
2) бісектриси внутрішніх кутів паралелограма (що не є ромбом) при перетині утворюють прямокутник, діагоналі якого паралельні сторонам паралелограма і довжина яких дорівнює модулю різниці двох нерівних його сторін;
3) якщо Q — площа прямокутника, утвореного бісектрисами внутрішніх кутів паралелограма, а S — площа паралелограма, то відношення сторін $(a \geqslant b)$ паралелограма становить
$a : b = (S + Q + \sqrt{Q^2 + 2SQ}) : S$, $\quad b : a = (S + Q - \sqrt{Q^2 + 2SQ}) : S$;
4) бісектриси зовнішніх кутів паралелограма при перетині утворюють прямокутник, діагоналі якого паралельні сторонам паралелограма і довжини яких дорівнюють сумі довжин двох нерівних сторін;
5) якщо точка перетину бісектрис двох сусідніх кутів паралелограма належить його стороні, то відношення довжин його сторін становить $2 : 1$;
6) якщо більша сторона паралелограма вдвічі більша за меншу сторону, то бісектриси протилежних кутів ділять діагональ на три рівні відрізки.
7) Бісектриса зовнішнього кута при вершині A гострого кута паралелограма $ABCD$ перетинає продовження сторін CB і CD у точках B' і D' відповідно, а периметр паралелограма становить P. Доведіть що сума довжин відрізків CB' і CD' також становить P.
8) Бісектриси кутів A і D при більшій стороні $AD = a$ паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці I та перетинають протилежну сторону BC у точках M і N відповідно, $b \neq \frac{a}{2}$ — менша сторона. Доведіть, що:
   (a) довжина відрізка $MN = |a - 2b|$;
   (b) має місце відношення $AI : IM = DI : IN = a : |a - 2b|$.
9) Бісектриса $\angle A$ паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC в точці K, а продовження сторони DC – в точці M. Відомо, що $BK = n$, $CM = m$. Доведіть, що $AB = n$, $AD = m + n$.
10) Дано паралелограм $ABCD$. Пряма l, яка паралельна до прямої AB, перетинає бісектриси кутів A і C в точках P і Q відповідно. Доведіть, що $\angle ADP = \angle ABQ$.
11) На сторонах BC і DC паралелограма $ABCD$ обрано точки D_1 и B_1 так, що $BD_1 = DB_1$. Відрізки BB_1 і DD_1 перетинаються в точці Q. Доведіть, що AQ — бісектриса кута BAD.

12) Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC в точці A', а діагональ BD – в точці Q. Відомо, що $AB : AD = m : n < 1$. Доведіть, що $S_{BQA'} : S_{ABCD} = m^2 : 2n(m+n)$.

2.8.2. «Навколо перпендикулярів» в паралелограмі

1) Доведіть, що якщо висоти BB_1 і DD_1, опущені із вершин тупих кутів паралелограма, перетинаються в точці H, то $BH \cdot HB_1 = DH \cdot HD_1$.
2) Доведіть, що якщо на сторони BC і CD паралелограма $ABCD$ (або ж на їх продовження) опустити висоти AM і AN відповідно, то $\triangle MAN \backsim \triangle ABC$.
3) Через вершини A, B і D паралелограма $ABCD$ проведено прямі перпендикулярно до прямих BD, BC і CD відповідно. Доведіть, що проведені прямі перетинаються в одній точці.
4) З вершини B паралелограма $ABCD$ опустили перпендикуляр BE на діагональ AC. Через точку A проведено пряму m перпендикулярно до прямої AD, а через точку C — пряму n перпендикулярно до прямої CD. Доведіть, що точка перетину прямих m і n належить прямій BE.
5) Через кожну вершину паралелограма проведено пряму, перпендикулярну до діагоналі, яка не проходить через цю вершину. Доведіть, що діагоналі чотирикутника, утвореного перетинами чотирьох проведених прямих, перпендикулярні до сторін паралелограма.
6) Нехай AC — більша з діагоналей паралелограма $ABCD$. З довільної точки P променя AC на прямі, що містять сторони AB та AD, опущено перпендикуляри PE і PF відповідно. Доведіть, що $AB \cdot PE = AD \cdot PF$.
7) Нехай AC — більша з діагоналей паралелограма $ABCD$. З точки C на продовження сторін AB та AD опущено перпендикуляри CE і CF відповідно. Доведіть, що виконується рівність
$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2.$$
8) Довести, що відстані від довільної точки діагоналі паралелограма до непаралельних сторін обернено пропорційні довжинам цих сторін.
9) Точка Q належить прямій, що містить діагональ AC паралелограма $ABCD$. Доведіть, що площі трикутників AQB і AQD є рівними.
10) З вершини B паралелограма $ABCD$ проведено його висоти BK і BH. Відомо, що $KH = t$ і $BD = d$. Доведіть, що відстань від точки B до точки перетину висот трикутника BKH становить $\sqrt{d^2 - t^2}$.
11) У паралелограмі $ABCD$ CC_1 – перпендикуляр, опущений на діагональ BD. Доведіть, що перпендикуляри до сторін BC і CD, проведені з вершин D і B відповідно, перетинаються на прямій CC_1.

12) Діагоналі AC і BD паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O. Точка M належить прямій AB, причому $\angle AMO = \angle MAD$. Доведіть, що точка M є рівновіддаленою від точок C і D.
13) Всередині паралелограма $ABCD$ обрали таку точку E, що $CD = CE$. Доведіть, що пряма DE перпендикулярна до прямої, яка проходить через середини відрізків AE і BC.
14) Пряма l має з паралелограмом $ABCD$ єдину спільну точку B. Вершини A і C віддалені від прямої l на відстанях a і c відповідно. Доведіть, що вершина D відстоїть від цієї прямої на відстані $d = a + c$.
15) Дано паралелограм $ABCD$ з гострим $\angle A = \alpha$ та сторонами $AD = a$, $AB = b$; BK – висота, а KM – перпендикуляр, опущений на продовження сторони CD. Доведіть, що
$$S_{BKM} = \tfrac{1}{2}b(a - b\cos\alpha)\sin^3\alpha\,.$$
16) Доведіть, що якщо прямі, які містять вершини тупих кутів і є перпендикулярними до сторін паралелограма (зі сторонами a, b та гострим кутом α), утворюють паралелограм подібний до даного, то $\cos\alpha = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$.

2.8.3. «Мішаного» типу

1) В паралелограмі відношення сторін та відношення діагоналей співпадають і становлять $m : n$ $(m \geqslant n)$. З вершини тупого кута B опущено висоту BB' на більшу сторону AD. Доведіть, що
$$AA' : A'D = (m^2 - n^2)(m^2 + n^2)\,.$$
2) Дано паралелограм $ABCD$ з гострим кутом α при вершині A. На променях AB і CB відмічено точки H і K відповідно так, що $CH = BC$ і $AK = AB$. Доведіть, що:

   (a) $DH = DK$; (b) $\triangle\, DKH \backsim \triangle\, ABK$.
3) Сторона BC паралелограма $ABCD$ вдвічі більша за сторону CD, P — проекція вершини C на прямую AB, M — середина сторони AD. Доведіть, що $\angle DMP = 3\angle APM$.
4) Всередині паралелограма $ABCD$ обрано таку точку O, що $\angle OAD = \angle OCD$. Доведіть, що $\angle OBC = \angle ODC$.
5) На сторонах AB і AD паралелограма $ABCD$ обрано точки M і N так, що прямі CM і CN ділять паралелограм на три фігури рівних площ. Знайдіть MN, якщо $BD = d$.
6) Через довільно обрану точку на одній зі сторін паралелограма та кінці протилежної сторони зроблено два розрізи. Площі «відрізаних» трикутників становлять S_1 та S_2. Доведіть, що площа паралелограма становить
$$2 \cdot (S_1 + S_2)\,.$$

7) Нехай $ABCD$ — паралелограм, точка E належить прямій AB, F — прямій AD (B – на відрізку AE, D – на відрізку AF), K — точка перетину прямих ED і FB. Доведіть, що $S_{ABKD} = S_{CEKF}$.
8) На стороні AB паралелограма $ABCD$ обрано таку т. M, що $AD = DM$, а на AD — точку N, таку що $AB = BN$. Доведіть, що $CM = CN$.
9) S — площа чотирикутника. Доведіть, що площа паралелограма, сторони якого паралельні та рівні діагоналям цього чотирикутника, становить $2S$.
10) Через вершину C паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає продовження сторін (промені) AB і AD в точках B' і D' відповідно. Доведіть, що

    (a) $BB' \cdot DD' = BC \cdot CD$; (b) $S^2_{ABCD} = 4S_{\triangle BB'C} \cdot S_{\triangle DD'C}$.

11) На діагоналі BD паралелограма $ABCD$ обрано точку K. Пряма AK перетинає прямі BC і CD в точках L і M відповідно. Доведіть, що
$$AK^2 = LK \cdot KM.$$
12) Пряма l перетинає сторони AB і AD в точках E і F відповідно. Нехай G — точка перетину прямої l з діагоналлю AC. Доведіть, що
$$\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AG}.$$

«Класичні задачі на доведення»:

13) Нехай X — довільна точка в площині паралелограма $ABCD$. Доведіть справедливість наступних тверджень:

    (a) має місце рівність $AX^2 + CX^2 - BX^2 - DX^2 = AC^2 - BD^2$;

    (b) якщо X є внутрішньою відносно паралелограма, то має місце рівність
$$S_{ABX} + S_{CDX} = S_{BCX} + S_{ADX}.$$

14) Нехай M — довільна точка площини паралелограма $ABCD$. Доведіть справедливість наступних тверджень:

    (a) якщо M є внутрішньою відносно паралелограма, то має місце рівність
$$S_{ACM} = |S_{ABM} - S_{ADM}|;$$

    (b) якщо M є зовнішньою відносно паралелограма, то має місце рівність
$$S_{ACM} = |S_{ABM} + S_{ADM}|.$$

15) [2 теорема Тебо] На сторонах BC і CD паралелограма $ABCD$ зовнішнім чином побудовано правильні трикутники BCK і CDL. Доведіть, що трикутник ALK є правильним.
16) На сторонах AB і BC паралелограма $ABCD$ зовнішнім чином побудовано квадрати $ABFE$ і $BCKM$. Доведіть, що $\angle EDK = 90^0$.
17) [1 теорема Тебо] На сторонах паралелограма зовнішнім чином побудовано квадрати. Доведіть, що їх центри утворюють квадрат.

18) Доведіть, що якщо два паралелограма рівних площ мають спільну сторону, то один з них можна розрізати на частини та «скласти» з них інший.

2.9. Задачі на: «паралельність», «інцидентність» та «відношення»

1) Через вершину A паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає пряму BD та промені CD і CB у точках M, N і P відповідно. Доведіть, що відрізок AM є середнім геометричним для відрізків MN і MP.
2) Доведіть, що прямі, які містять сторони паралелограма, відтинають на прямій, яка є паралельною до однієї з його діагоналей, рівні відрізки.
3) В паралелограмі $ABCD$ проведено пряму l паралельно до AB; l перетинає сторону BC і діагональ AC у точках N і K відповідно. Доведіть, що трикутники ADK і ABN мають рівні площі.
4) На кожній стороні паралелограма взято по одній точці. Одна з діагоналей чотирикутника з вершинами в цих точках є паралельною до сторони паралелограма. Доведіть, що площа одержаного чотирикутника дорівнює половині площі паралелограма.
5) Через точку Q на діагоналі AC паралелограма $ABCD$ проведено дві прямі l і m паралельно до його сторін; пряма l перетинає сторони AB і CD у точках A' і C' відповідно, а пряма m перетинає сторони BC і DA — у точках B' і D' відповідно. Доведіть, що:

   (a) $S_{A'BB'Q} = S_{C'DD'Q}$,
   (b) $S_{A'BCC'} = S_{D'DCB'}$,
   (c) $S_{A'BB'D'} = S_{ADC'A'}$,
   (d) $S_{AA'QD'} : S_{QB'CC'} = AQ^2 : QC^2$;

6) Сторону AB паралелограма $ABCD$ продовжено на відрізок BE, а сторону AD — на відрізок DK, причому точка C не належить прямій KE. Прямі ED і BK перетинаються в точці Q. Доведіть, що
$$S_{ABQD} = S_{CEQK}.$$
7) Через середину M сторони BC паралелограма $ABCD$ та вершину A проведено пряму, яка перетинає діагональ BD в точці Q. Доведіть, що
$$S_{QMCD} : S_{ABCD} = 5 : 12.$$
8) В паралелограмі $ABCD$ точки P і K ділять діагональ BD на три рівні частини, а M і E — середини сторін CD і BC відповідно. Доведіть, що
$$S_{MEPK} : S_{ABCD} = 5 : 24.$$
9) В паралелограмі $ABCD$ точки M і K — середини сторін CD і AD відповідно, P — точка перетину відрізків AM і BK. Доведіть, що
$$S_{APK} : S_{ABCD} = 1 : 20.$$
10) Доведіть, що якщо через вершини опуклого чотирикутника провести прямі паралельно до його діагоналей, то площа паралелограма, який визначається цими прямими, вдвічі більша за площу даного чотирикутника.

11) На сторонах AD і CD паралелограма $ABCD$ обрано точки M і N так, що $MN||AC$. Доведіть, що має місце рівність $S_{ABM} = S_{CBN}$.
12) На діагоналі AC паралелограма $ABCD$ обрано точки P і Q так, що $AP = CQ$. Точка M така, що $PM||AD$ и $QM||AB$. Доведіть, що точка M належить діагоналі BD.
13) На сторонах AB, BC і CD паралелограма $ABCD$ обрано точки K, L і M, які ділять ці сторони в однакових відношеннях. Прямі b, c, d проходять через точки B, C, D паралельно до прямих KL, KM і ML відповідно. Доведіть, що прямі b, c, d проходять через одну точку.
14) Дано паралелограм $ABCD$ і точка M. Через точки A, B, C і D проведено прямі паралельно до прямих MC, MD, MA і MB відповідно. Доведіть, що вони перетинаються в одній точці.
15) В паралелограмі $ABCD$ точка M ділить сторону AD у відношенні $m:n$ ($AM:MD = m:n$) а точка N ділить сторону DC у відношенні $p:q$ ($DN:NC = p:q$). Відрізки BM і AN перетинаються у точці Q. Доведіть, що мають місце відношення
$$AQ:QN = \frac{m(p+q)}{mp+n(p+q)}, \quad BQ:QM = \frac{nq(m+n)(p+q)}{mp}.$$
16) В паралелограмі $ABCD$ точки P і K ділять сторони BC і CD у відношенні $m:n$, рухаючись від вершин B і C відповідно. Знайдіть відношення, у якому відрізки PD і AK діляться точкою їх перетину.
17) Через точку M, яка належить стороні AB паралелограма $ABCD$, проведено пряму MP паралельно до AC ($P \in (BC)$), а через точку B — пряму BN паралельно до MD ($N \in (DC)$). Доведіть, що точки D, P і $Q = (AC) \cap (BN)$, належать одній прямій.
18) Дано паралелограм $ABCD$. Точки K, L, M і N належать сторонам AB, BC, CD і DA відповідно, причому відрізки KM і LN паралельні до сторін паралелограма та перетинаються в точці Q. Доведіть, що:
    (a) прямі BN, DK і CQ перетинаються в одній точці;
    (b) NK, DB і ML перетинаються в одній точці або ж є паралельними;
    (c) площі паралелограмів $KBLQ$ і $MDNQ$ рівні тоді і лише тоді, коли точка Q належить діагоналі AC.
19) Дано паралелограм $ABCD$. На прямій AB обрано точку M. Пряма, що проходить через M і середину BC, перетинає пряму AC в точці K. Пряма, що проходить через K і середину AD, перетинає пряму CD в точці P. Доведіть, що прямі BC та MP є паралельними.
20) Точка M центрально-симетрично відображається послідовно відносно вершин паралелограма $ABCD$ в точки M_1, M_2, M_3, M_4. Доведіть, що точка M_4 співпадає з точкою M.

2.10. Ознаки паралелограма

2.10.1. «Паралелограми в паралелограмі та навколо нього»

1) Через точку O перетину діагоналей паралелограма $ABCD$ проведено дві прямі, які перетинають сторони AB, CD і BC, DA у точках A', C' і B', D' відповідно. Доведіть, що:
   (a) чотирикутник $A'B'C'D'$ є паралелограмом, а його центр симетрії співпадає з точкою O;
   (b) чотирикутник, утворений прямими AB', BC', CD' і DA', є паралелограмом, а його центр симетрії співпадає з точкою O.
2) На сторонах AB, BC, CD і DA паралелограма $ABCD$ відмічено відповідно точки E, F, K і L так, що $AE : EB = CK : KD$, $BF : FC = DL : LA$. Доведіть, що $EFKL$ є паралелограмом.
   (a) На сторонах AB, BC, CD і DA паралелограма $ABCD$ відклали рівні відрізки AE, BF, CK і DL. Доведіть, що чотирикутники $BKDE$ та $EFKL$ є паралелограмами.
3) На діагоналі AC паралелограма $ABCD$ відклали відрізки $AM = CK$ ($2AM < AC$). Доведіть, що чотирикутник $MBKD$ є паралелограмом.
4) З вершин тупих кутів B і D паралелограма $ABCD$ опущено перпендикуляри BM і DK до діагоналі AC. Доведіть, що чотирикутник $BKDM$ є паралелограмом.
5) З вершин тупих кутів паралелограма опущено висоти на його сторони. Доведіть, що основи зазначених висот є вершинами паралелограма.
6) Бісектриси кутів A і C паралелограма $ABCD$ перетинають сторони BC і AD в точках A' і C', а діагональ BD — в точках A'' і C'' відповідно. Доведіть, що $AA'CC'$ та $AA''CC''$ є паралелограмами.
7) Через вершини A і C паралелограма $ABCD$ проведено дві паралельні прямі, які перетинають діагональ BD в точках A' і C', а сторони CD і AB — в точках A'' і C'' відповідно. Доведіть, що чотирикутники $AC'CA'$ та $AC''CA''$ є паралелограмами.
8) З точки перетину діагоналей паралелограма опущено перпендикуляри на всі його сторони. Доведіть, що чотирикутник, вершинами якого є основи зазначених перепендикулярів, є паралелограмом та обидва вони мають спільний центр симетрії.
9) На продовженнях сторін AB, BC, CD, DA паралелограма $ABCD$ відклали відрізки $BM = AB$, $CN = BC$, $DK = CD$, $AL = DA$. Доведіть, що чотирикутник $MNKL$ є паралелограмом.
10) Чотирикутники $ABCD$, $AEFG$, $ADFH$, $FIJE$ і $BIJC$ є паралелограмами. Доведіть, що чотирикутник $AFHG$ також є паралелограмом.

2.10.2. Основні та найбільш поширені ознаки паралелограма

Теореми-ознаки паралелограма (та ті, що до них зводяться).

Якщо для опуклого чотирикутника виконана одна з наступних з умов

1) `протилежні кути попарно рівні`,
   (a) сума кутів, прилеглих до кожної з двох сусідніх сторін, — 180^0,
   (b) бісектриси двох протилежних кутів перпендикулярні бісектрисі третього кута,
2) `протилежні сторони попарно рівні`,
   (a) кожна з діагоналей ділить його периметр навпіл,
3) `діагоналі точкою перетину діляться навпіл`,
   (a) дві протилежні сторони паралельні, а одна з діагоналей ділить іншу діагональ навпіл,
   (b) вершини протилежних кутів однаково віддалені від відповідних діагоналей,
   (c) дві сторони паралельні та однаково віддалені від точки перетину діагоналей,
   (d) діагоналі ділять його на чотири трикутники рівних площ,
   (e) два протилежні кути рівні, а діагональ з кінцями в їх вершинах ділить іншу діагональ навпіл,
   (f) кожна з діагоналей ділить його на два трикутники рівних площ,
4) `дві протилежні сторони паралельні і рівні`,
   (a) дві протилежні сторони паралельні, а одна з діагоналей ділить його периметр навпіл,
   (b) дві протилежні сторони паралельні та два протилежні кути рівні,
   (c) середина середньої лінії співпадає з точкою перетину діагоналей,
5) `має центр симетрії`,
6) `сума квадратів сторін дорівнює сумі квадратів діагоналей`,
7) `сума довжин середніх ліній дорівнює напівпериметру`,
8) `сума відстаней від вершини до сторін є однаковою` для всіх його вершин,

то такий чотирикутник є паралелограмом.

? В опуклому чотирикутнику $ABCD$ сторони AB і CD рівні, кути A і C також рівні. Чи обов'язково такий чотирикутник буде паралелограмом? (Відповідь: ні, не обов'язково.)

? Чи обов'язково чотирикутник, у якого дві сторони паралельні а дві інші рівні, буде паралелограмом? (Відповідь: ні, не обов'язково.)

? Чи обов'язково чотирикутник $ABCD$, у якого $\angle ABC = \angle ADC$ та $\angle BAD = \angle BCD$, буде паралелограмом? (Відповідь: ні, не обов'язково.)

Теорема 1. (Варіньона) *Середини сторін довільного (в тому числі неопуклого та просторового) чотирикутника є вершинами паралелограма (який називають паралелограмом Варіньона).*

Наслідок 1. *Якщо чотирикутник $ABCD$ не є просторовим, $A_0B_0C_0D_0$ — його паралелограм Варіньона, то:*

1) *сторони паралелограма $A_0B_0C_0D_0$ є паралельними до відповідних діагоналей чотирикутника $ABCD$;*
2) *периметр паралелограма $A_0B_0C_0D_0$ дорівнює сумі довжин діагоналей чотирикутника $ABCD$;*
3) *площа паралелограма $A_0B_0C_0D_0$ дорівнює половині площі чотирикутника $ABCD$.*

Наслідок 2. *Якщо чотирикутник є* прямокутником, ромбом *або ж* квадратом*, то його паралелограм Варіньона є* ромбом, прямокутником *та* квадратом *відповідно.*

Наслідок 3. *Якщо чотирикутник не є паралелограмом, то середини двох протилежних сторін та середини діагоналей є вершинами паралелограма.*

2.10.3. Додаткові ознаки паралелограма

1) В опуклому чотирикутнику $ABCD$ AE і CF – перпендикуляри, опущені на діагональ BD. Доведіть, що якщо $AE = CF$ і $\angle BAC = \angle ACD$, то $ABCD$ є паралелограмом.
2) Чотирикутник розрізано діагоналями на чотири трикутника. Доведіть, що їх точки перетину медіан утворюють паралелограм.
3) В опуклому чотирикутнику $ABCD$ $BC||AD$, C_0 і D_0 – середини сторін CD і DA відповідно. Доведіть, що якщо точка перетину відрізків AC_0 і CD_0 належить діагоналі BD, та $ABCD$ є паралелограмом.

Прикінцеві висновки та зауваження

Наведена система фактів геометрії паралелограмів, звісно ж, носить орієнтовно-суб'єктивний характер. Проте автори мають щиру надію, що запропонований матеріал допоможе майбутнім та молодим вчителям математики під час цілісного усвідомлення змістової лінії «Паралелограми» в курсі елементарної геометрії та сприятиме формуванню необхідних фахових компетентностей взагалі.

Також слід зазначити, що подальша робота в цьому напрямку потребує: *по-перше* — доповнення наведеної системи фактів задачами на побудову паралелограма за його елементами, відповідними задачами з векторної алгебри та задачами на комбінації кіл та паралелограма;
по-друге — перегляду та виокремлення нової низки (опорних) ключових задач;

по-третє — класифікацій поповненої системи задач за: темами, методами розв'язання, ступенем складності.

Також вважаємо, що наведену систему фактів доцільно не лише пропагувати як (в певному розумінні) цілісний матеріал, а й пропонувати (принаймні фрагментарно) для ознайомлення під час проведення курсів підвищення кваліфікації вчителів математики.

Література

1. *Апостолова Г.В.* Геометрія : 8 : дворівневий підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. — К. : Генеза, 2008. — 272 с.
2. *Бурда М.І., Тарасенкова Н.А.* Геометрія : підручник для 8 класів загальноосвітніх навчальних закладів. — К. : «Зодіак ЕКО», 2010. — 239 с.
3. *Бутузов В.Ф.* Планиметрия. Пособие для углубленного изучения математики / В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Позняк, С.А. Шестаков, И.И. Юдина. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 488 с.
4. *Габович И.Г.* Алгоритмический подход к решению геометрических задач : Кн. для учащихся. — М. : Просвещение, 1996. — 192 с.
5. *Гордин Р.К.* Геометрия. Планиметрия. 7—9 классы. — 3-е изд., испр. — М. : МЦНМО, 2006. — 416 с.
6. *Дзундза А.І.* Особистісний підхід до систематизації навчальних задач / А.І. Дзундза, С.Г. Цапова // Дидактика математики: проблеми і дослідження. — Міжнародний збірник наукових робіт. — Донецьк: Вид-во ДонНУ. — 2012. — Вип. 38. — С. 150–164.
7. *Жаров В.А., Марголите П.С., Скопец З.А.* Вопросы и задачи по геометрии. Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1965. — 113 с.
8. *Кадубовський О.А.* До питання про формування навичок при систематизації та класифікації метричних задач шкільного курсу геометрії / О.А. Кадубовський, О.Л. Кадубовська // Проблеми трудової і професійної підготовки: Науково-методичний збірник. — 2009. — Вип. 14. — С. 46–54.
9. *Кадубовський О.А.* До питань про систематизацію фактів геометрії трапецій та їх класифікацію / О.А. Кадубовський, О.І. Цвєткова, М.І. Полюга // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2015. — Випуск 5. — С. 114–140.
10. *Капіносов А., Кондратьєва Л.* Геометрія: Пробний підручник для 8 кл. — Тернопіль: Підручники і посібники, 2008. — 240 с.
11. *Кушнір І.А.* Методи розв'язання задач з геометрії : кн. для вчителя / І.А. Кушнір. — К. : Абрис, 1994. — 464 с.
12. *Кушнир И.А.* Геометрия: теоремы и задачи : учебное пособие. Т. 1. Планиметрия / И. А. Кушнир. — Киев : Астарта, 1996. — 475 с.

13. *Кушнир И., Финкельштейн Л.* Геометрия 7–9. Школа боевого искусства. Сборник задач. — Киев: Факт, 2000. — 384 с.
14. *Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.* Геометрія : підруч. для 8 кл. з поглибл. вивченням математики. — Х.: Гімназія, 2009. — 240 с.
15. *Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С.* Сборник задач и контр. работ по геометрии для 8 кл. – Х.: Гимназия, 2008. – 112 с.
16. *Понарин Я.П.* Элементарная геометрия: В 2 т. — Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости. — М.: МЦНМО, 2004. — 312 с.
17. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии: Учебное пособие. — 5-е изд., испр. и доп. — М. : МЦНМО, 2006. — 640 с.
18. Сборник задач по математике для поступающих во втузы (с решениями). В 2-х книгах. Кн. 2. Геометрия / Егерев В.К., Кордемский Б.А., Зайцев В.В. и др. Под ред. М.И. Сканави. — 7-е изд., перераб. и доп. — М. : Высшая школа, 1995. — 368 с.
19. *Федченко Л.Я.* Збірник завдань для тематичних і підсумкових атестацій з геометрії для 7–9 класів : Мет. пос. — Донецьк: «Каштан», 2009. — 304 с.
20. *Шарыгин И.Ф.* Геометрия: 9—11 кл. : От учебной задачи к творческой: Учебное пособие. — М. : Дрофа, 1996. — 400 с.
21. *Шарыгин И.Ф.* Геометрия. 7–9 кл. : учеб. для общеобразовательных учреждений / И.Ф. Шарыгин. — М. : Дрофа, 2012. — 462 с.
22. *Шарыгни И.Ф.* Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами / И.Ф. Шарыгин, Р.К. Гордин. — М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2001. — 400 с.
23. *Юзбашев А.В.* Свойства геометрических фигур — ключ к решению любых задач по планиметрии. М.: МАТИ, 2005. — 210 с.

Kadubovs'ka V.M., Kadubovs'kyi O.A.
Donbas State Teachers' Training University, Slovijans'k, Ukraine.

Systematization and generalization of facts of parallelograms' geometry.

The article highlights the author's experience to a possible approach of systematization and generalization of facts of parallelograms' geometry. Series of well known and little-known metric relations in a parallelogram, properties and statements, in particular affine, signs of equality and similarity and signs of parallelogram, etc is stated in the work through consolidation of didactic units and extension of basic linear elements of a parallelogram.

Keywords: *convex quadrangle, parallelogram, properties, signs, well known and little-known statements, systematization and generalization.*