МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

Новіков О.О., Ровенська О.Г., Козаченко Ю.О., Попова К.Г., Сідаш А.О.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики, ДДМА*

[3–5] *студенти фізико-математичного факультету, ДДПУ*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ЕКСТРЕМАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПОТРІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ ФЕЙЄРА

Знайдені асимптотичні формули для верхніх граней відхилень потрійних операторів Фейєра на класі інтегралів Пуассона, які за природних умов забезпечують розв'язки відповідної задачі Колмогорова-Нікольського.

Ключові слова: *ряди Фур'є, повторні суми Фейєра, асимптотична формула.*

Нехай L — множина сумовних 2π–періодичних функцій і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x)$$

— ряд Фур'є функції $f \in L$. Позначимо через $S_n(f;x)$ часткові суми ряду Фур'є. Суми Валле Пуссена функції $f \in L$ задаються співвідношенням

$$V_{n,p}(f,x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f,x).$$

У випадку $p = n$ ці поліноми називають сумами Фейєра. Нехай p_1, p_2, p_3 — довільні натуральні числа такі, що $p_1 + p_2 + p_3 \leqslant n + 2$. Потрійними сумами Валле Пуссена будемо називати тригонометричні многочлени, які задаються наступним співвідношенням

$$V^{(3)}_{n,\overline{p}}(f;x) = \frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1} \frac{1}{p_2}\sum_{m=k-p_2+1}^{k} \frac{1}{p_3}\sum_{r=m-p_3+1}^{m} S_r(f;x).$$

У випадках $p_1 + p_2 + p_3 = n - r$ такі тригонометричні поліноми будемо називати відповідними потрійними сумами Фейєра $\sigma^{(3,r)}_{n,\overline{p}}$. У випадку $p_3 = 1$ потрійні оператори Фейєра співпадають з подвійними $\sigma^{(2,r)}_{n,\overline{p}}$, які вивчалися у роботі [7] та інших.

Наслідуючи О.І. Степанця [1], позначимо через S^0_M множину функцій істотно обмежених і таких, що мають нульове середнє значення на періоді, і через $C^q_{\beta,\infty}$ – класи неперервних 2π–періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P^q_\beta(t)\, dt,$$

в якій $P^q_\beta(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})$ – ядро Пуассона, а $\varphi \in S^0_M$.

Питанням наближення класів $C^q_{\beta,\infty}$ лінійними методами присвячено ряд робіт спеціалістів з теорії функцій.

С.М. Нікольський [2] показав, що для верхніх граней відхилень часткових сум Фур'є на цих класах має місце асимптотична формула

$$\mathcal{E}_n(C^q_{\beta,\infty}) = \sup_{f\in C^q_{\beta,\infty}} ||f(x) - S_{n-1}(f,x)||_C = \frac{8q^n}{\pi^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}} + O(1)\frac{q^n}{n},$$

де величина $O(1)$ не залежить від $n \in \mathbb{N}$. С.Б. Стечкин в роботі [3] показав, що залишковий член цієї формули можна подати у вигляді $O(1)\frac{q^n}{n(1-q)}$, де величина $O(1)$ рівномірно обмежена відносно $n \in \mathbb{N}$ та $q \in (0;1)$.

В роботі [1] О.І. Степанець отримав аналогічну асимптотичну формулу для класів $C^q_\beta H_\omega$. В.І. Рукасов та С.О. Чайченко [4] для верхніх граней відхилень сум Валле Пуссена на класах $C^q_{\beta,\infty}$ і $C^q_\beta H_\omega$ отримали аналогічні асимптотичні формули. Зокрема, у цій роботі показано, що

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \sup_{f\in C^q_{1,\infty}} ||f(x) - V_{n,p}(f,x)||_C =$$

$$= \frac{4q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} + O(1)\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{p(1-q^2)}\right). \qquad (1)$$

А.С. Сердюк [5] показав, що має місце більш загальна рівність ніж (1):

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{p,q} + O(1)\left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^s}\right)\right),$$

де

$$K_{p,q}=\int\limits_0^{\pi}\frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt+q^{2p}}}{1-2q\cos pt+q^2}dt,\ \ s=s(p)=\begin{cases}1, & p=1\\ 3, & p=2,3,.....\end{cases}$$

В роботі [6] для верхніх граней відхилень сум Фейєра отримана така асимптотична формула

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty};\sigma_n)=\sup_{f\in C^q_{1,\infty}}||f(x)-\sigma_n(f,x)||_C=\frac{2}{\pi n}\left(\frac{2q}{1-q^2}+\ln\frac{1+q}{1-q}\right)+\frac{O(1)q^n}{n(1-q)^3}.$$

В роботі [7] отримана така асимптотична формула

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty},\sigma^{(2,-1)}_{n,\overline{p}})=\begin{cases}\frac{4q}{\pi p_1p_2(1-q^2)^2}+O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1p_2}, & q\in(0;1/2];\\ \frac{4q^2+1}{\pi p_1p_2(1-q^2)^2}+O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}, & q\in(1/2;1).\end{cases}$$

В даній роботі отримані асимптотичні формули для верхніх граней відхилень тригонометричних поліномів $\sigma^{(3,-1)}_{n,\overline{p}}$ на класах $C^q_{\beta,\infty}$ для $\beta=1$

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty},\sigma^{(3,-1)}_n)=\sup_{f\in C^q_{1,\infty}}||f(x)-\sigma^{(3,-1)}_n(f,x)||_C.$$

Теорема 1. *Нехай* $q\in(0;1)$, *Тоді для* $n\to\infty$, $p_i\to\infty$, $i=1,2,3$ *має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty};\sigma^{(3,-1)}_{n,\overline{p}})=\frac{4q^2(q^2+1)}{\pi p_1p_2p_3(1-q^2)^3}+O(1)\frac{q^{p_1}+q^{p_2}+q^{p_3}}{p_1p_2p_3(1-q)^7}. \qquad (2)$$

Доведення. Застосовуючи формулу (6) роботи [8], отримуємо для $q\in(0;1)$, $\beta=1$, $p_1+p_2+p_3=n+1$

$$\delta^{(3,-1)}_n(f,x)\overset{df}{=}f(x)-\sigma^{(3,-1)}_n(f;x)=$$

$$=\frac{-q^2}{\pi p_1p_2p_3}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f^q_\beta(x+t)[(1-q^4)\sin 2t+4q(q^2-1)\sin t]}{(1-2q\cos t+q^2)^4}dt+O(1)\frac{q^{p_1}+q^{p_2}+q^{p_3}}{p_1p_2p_3(1-q)^7},$$

де $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^q_\beta(x+t)P^q_\beta(t)\ dt.$

Враховуючи нулі функції $\xi_q(t)=(1-q^4)\sin 2t+4q(q^2-1)\sin t$, побудуємо екстремальну для такого уявлення функцію

$$\varphi(t)=\operatorname{sign}(2(1-q^2)\sin t[-2q+(1+q^2)\cos t])=$$

$$= \begin{cases} +1, & -\pi \leqslant t < -\arccos\frac{2q}{(1+q^2)}; \\ -1, & -\arccos\frac{2q}{(1+q^2)} \leqslant t < 0; \\ +1, & 0 \leqslant t < \arccos\frac{2q}{(1+q^2)}; \\ -1, & \arccos\frac{2q}{(1+q^2)} \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

Оскільки $\varphi \in S_M^0$, то

$$\mathcal{E}(C_{1,\infty}^q, \sigma_n^{(3,-1)}) =$$

$$= \frac{q^2}{\pi p_1 p_2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(t)((1-q^4)\sin 2t + 4q(q^2-1)\sin t)}{(1-2q\cos t + q^2)^4} dt + O(1)\frac{q^{p_1}+q^{p_2}+q^{p_3}}{p_1p_2p_3(1-q)^7} =$$

$$= \frac{q^2}{\pi p_1 p_2 p_3} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{|(1-q^4)\sin 2t + 4q(q^2-1)\sin t|}{(1-2q\cos t + q^2)^4} dt + O(1)\frac{q^{p_1}+q^{p_2}+q^{p_3}}{p_1p_2p_3(1-q)^7} =$$

$$= \frac{4q^2(1-q^2)}{\pi p_1p_2p_3} \int\limits_0^{\arccos\frac{2q}{(1+q^2)}} \frac{\sin t[-2q+(1+q^2)\cos t]}{(1-2q\cos t+q^2)^4} dt -$$

$$- \frac{4q^2(1-q^2)}{\pi p_1p_2p_3} \int\limits_{\arccos\frac{2q}{(1+q^2)}}^{\pi} \frac{\sin t[-2q+(1+q^2)\cos t]}{(1-2q\cos t+q^2)^4} dt + O(1)\frac{q^{p_1}+q^{p_2}+q^{p_3}}{p_1p_2p_3(1-q)^7}. \quad (3)$$

Виконавши інтегрування, знаходимо

$$\int \frac{\sin t[-2q+(1+q^2)\cos t]}{(1-2q\cos t+q^2)^4} dt =$$

$$= \frac{(1+q^2)}{8q^2}(1-2q\cos t+q^2)^{-2} - \frac{(1-q^2)^2}{12q^2}(1-2q\cos t+q^2)^{-3}.$$

Виконавши обчислення, отримуємо

$$\int\limits_0^{\arccos\frac{2q}{(1+q^2)}} \frac{\sin t[(1+q^2)\cos t - 2q]}{(1-2q\cos t+q^2)^4} dt - \int\limits_{\arccos\frac{2q}{(1+q^2)}}^{\pi} \frac{\sin t[(1+q^2)\cos t - 2q]}{(1-2q\cos t+q^2)^4} dt =$$

$$= \frac{q^2+1}{(1-q^2)^4}.$$

Отже, на підставі формули (3) приходимо до асимптотичної формули (2). Теорема доведена.

Література

1. *Степанец А.И.* Решение задачи Колмогорова-Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сборник. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113–138.
2. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — Т. 10, № 3. — С. 207–256.
3. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1980. — Т. 145. — С. 126–151.
4. *Рукасов В.І.* Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле-Пуссена /*Рукасов В.І., Чайченко С.О.* // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 12. — С. 1653–1668.
5. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 1. — С. 97–107.
6. *Новіков О.О.* Наближення класів інтегралів Пуасона операторами Фейєра / Новіков О.О., Ровенська О.Г. [та ін.] // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2014. — № 4. — С. 17–22.
7. *Новіков О.О.* Задача Колмогорова-Нікольського для подвійних операторів Фейєра на класах інтегралів Пуасона /Новіков О.О., Ровенська О.Г., Чабанова Є.О. [та ін.] // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2015. — № 5. — С. 15–19.
8. *Новиков О.А.* Приближение классов интегралов Пуассона r-повторными суммами Валле Пуссена /*Новиков О.А., Ровенская О.Г.* // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. — 2014. — Т.19, вип. 3(23). — С.14–26.
9. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.

Novikov O., Rovenska O., Kozachenko Yu., Popova K., Sidash A.
Donbas State Teachers' Training University, Slovians'k, Ukraine;
Donbas State Engineering Academy, Kramators'k, Ukraine.

Extreme problem for a triple of operators of Fejer

We obtain asymptotic formula for upper bounds of deviations of repeated by Fejer sums on classes of Poisson integrals. Under certain conditions, formula guarantee the solvability of the Kolmogorov–Nikol'skiy problem for repeated sums of Fejer and classes of Poisson integrals.

Keywords: *Fourier series, repeated sums of Fejer, asymptotic formula.*