УДК 517.5

Бодра В.І., Шулик Т.В., Рудь К.О., Чаплик А.М., Мірошніченко Г.І.

[1] *асистент каф. вищої математики, Київський національний університет технологій і дизайну*

[2] *секретар наукового відділу, асистент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[3–5] *студенти фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

НАБЛИЖЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ ПУАССОНА У РІВНОМІРНІЙ МЕТРИЦІ

Отримані розв'язки екстремальної задачі для відхилень потрійних операторів Фейєра на класі інтегралів Пуассона.

Ключові слова: *ряди Фур'є, суми, асимптотичні рівняння.*

Нехай
$$S_n(f;x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx)$$
— часткова сума ряду Фур'є сумовної 2π–періодичної функції f. Суми Валле Пуссена функції f задаються співвідношенням
$$V_{n,p}(f,x)=\frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}S_k(f,x).$$
У випадку $p=n$ такий оператор називають методом Фейєра. Нехай p_1, p_2, p_3 — довільні натуральні числа такі, що $p_1+p_2+p_3\leqslant n+2$. Потрійними сумами Валле Пуссена сумовної функції f будемо називати тригонометричні многочлени, які задаються наступним співвідношенням
$$V^{(3)}_{n,\overline{p}}(f;x)=\frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{p_2}\sum_{m=k-p_2+1}^{k}\frac{1}{p_3}\sum_{r=m-p_3+1}^{m}S_r(f;x).$$
У випадках $p_1+p_2+p_3=n$ такі тригонометричні поліноми будемо називати потрійними сумами Фейєра $\sigma^{(3,0)}_{n,\overline{p}}(f;x)$. У випадку $p_3=1$ потрійні оператори Фейєра співпадають з подвійними $\sigma^{(2,0)}_{n,\overline{p}}(f;x)$, які вивчалися у роботі [1].

Наслідуючи О.І. Степанця [1], позначимо через S^0_M множину функцій істотно обмежених і таких, що мають нульове середнє значення на періоді, і через $C^q_{\beta,\infty}$ – класи неперервних 2π–періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t)P^q_\beta(t)\,dt,$$

в якій $P^q_\beta(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k\cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})$ – ядро Пуассона, а $f^q_\beta \in S^0_M$.

Питанням наближення класів $C^q_{\beta,\infty}$ лінійними методами присвячено ряд робіт спеціалістів з теорії функцій. З бібліографією до цих питань можна ознайомитися у роботах [2]-[5]

В даній роботі отримані асимптотичні формули для верхніх граней відхилень тригонометричних поліномів $\sigma^{(3,0)}_{n,\overline{p}}$ на класах $C^q_{\beta,\infty}$ для $\beta = 1$

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty}, \sigma^{(3,0)}_n) = \sup_{f\in C^q_{1,\infty}} ||f(x) - \sigma^{(3,0)}_n(f,x)||_C.$$

Теорема 1. *Нехай* $q \in (0;1)$, *тоді для* $n \to \infty$, $p_i \to \infty$, $i = 1,2,3$ *має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty};\sigma^{(3,0)}_{n,\overline{p}}) = \frac{4q^3(1+q^2)}{\pi p_1p_2p_3(1-q^2)^3} + O(1)\frac{q^{p_1}+q^{p_2}+q^{p_3}}{p_1p_2p_3(1-q)^7}. \qquad (1)$$

Доведення. Застосовуючи формулу (6) роботи [6], отримуємо для $p_1+p_2+p_3 = n$, $q \in (0;1)$, $\beta = 1$

$$\delta^{(3,0)}_n(f,x) \stackrel{df}{=} f(x) - \sigma^{(3,0)}_n(f;x) = \frac{q^3}{\pi p_1p_2p_3}\times$$

$$\times\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f^q_\beta(x+t)(\sin 3t - 4q\sin 2t + 6q^2\sin t - q^4\sin t)}{(1-2q\cos t+q^2)^4}dt + O(1)R^{(3)}_n,$$

де $R^{(3)}_n = \frac{q^{p_1}+q^{p_2}+q^{p_3}}{p_1p_2p_3(1-q)^7}$.

Враховуючи нулі функції $\xi_q(t) = \sin 3t - 4q\sin 2t + 6q^2\sin t - q^4\sin t$, побудуємо екстремальну для даного інтегрального уявлення функцію

$$\varphi(t) = \mathrm{sign}(\sin 3t - 4q\sin 2t + 6q^2\sin t - q^4\sin t) =$$

$$\varphi(t) = \mathrm{sign}(\xi_q(t)) = \begin{cases} -1, & -\pi \leqslant t < -\arccos\frac{2q-(1-q^2)}{2};\\ +1, & -\arccos\frac{2q-(1-q^2)}{2} \leqslant t < -\arccos\frac{2q+(1-q^2)}{2};\\ -1, & -\arccos\frac{2q+(1-q^2)}{2} \leqslant t < 0;\\ +1, & 0 \leqslant t < \arccos\frac{2q+(1-q^2)}{2};\\ -1, & \arccos\frac{2q+(1-q^2)}{2} \leqslant t < \arccos\frac{2q-(1-q^2)}{2};\\ +1, & \arccos\frac{2q-(1-q^2)}{2} \leqslant t \leqslant \pi, \end{cases}$$

Оскільки $\varphi \in S_M^0$, то

$$\mathcal{E}(C_{1,\infty}^q, \sigma_n^{(3,0)}) =$$

$$= \frac{q^3}{\pi p_1 p_2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(t)(\sin 3t - 4q\sin 2t + 6q^2 \sin t - q^4 \sin t)}{(1-2q\cos t + q^2)^4} dt + O(1) R_n^{(3)} =$$

$$= \frac{q^3}{\pi p_1 p_2 p_3} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin 3t - 4q\sin 2t + 6q^2 \sin t - q^4 \sin t|}{(1-2q\cos t + q^2)^4} dt + O(1) R_n^{(3)} =$$

$$= \frac{2q^3}{\pi p_1 p_2 p_3} \int\limits_{0}^{\arccos \frac{2q+(1-q^2)}{2}} \frac{\sin t(4\cos^2 t - 8q\cos t + (6q^2 - q^4 - 1))}{(1-2q\cos t + q^2)^4} dt +$$

$$+ \frac{-2q^3}{\pi p_1 p_2 p_3} \int\limits_{\arccos \frac{2q+(1-q^2)}{2}}^{\arccos \frac{2q-(1-q^2)}{2}} \frac{\sin t(4\cos^2 t - 8q\cos t + (6q^2 - q^4 - 1))}{(1-2q\cos + q^2)^4} dt -$$

$$+ \frac{2q^3}{\pi p_1 p_2 p_3} \int\limits_{\arccos \frac{2q-(1-q^2)}{2}}^{\pi} \frac{\sin t(4\cos^2 t - 8q\cos t + (6q^2 - q^4 - 1))}{(1-2q\cos t + q^2)^4} dt + O(1) R_n^{(3)}. \tag{2}$$

Виконуючи інтегрування, знаходимо

$$\int \frac{\sin t(4\cos^2 t - 8q\cos t + (6q^2 - q^4 - 1))}{(1-2q\cos t + q^2)^4} dt = -\frac{1}{2q^3}(1-2q\cos t + q^2)^{-1} +$$

$$+ \frac{1-q^2}{2q^3}(1-2q\cos t + q^2)^{-2} - \frac{(1-q^2)^3}{6q^3}(1-2q\cos t + q^2)^{-3}.$$

Виконуючи елементарні перетворення, маємо

$$\left(-\frac{1}{2q^3(1-2q\cos t + q^2)} + \frac{1-q^2}{2q^3(1-2q\cos t + q^2)^2} - \right.$$

$$\left. -\frac{(1-q^2)^3}{6q^3(1-2q\cos t + q^2)^3} \right) \Bigg|_0^{\arccos \frac{2q+(1-q^2)}{2}} - \Bigg|_{\arccos \frac{2q+(1-q^2)}{2}}^{\arccos \frac{2q-(1-q^2)}{2}} + \Bigg|_{\arccos \frac{2q-(1-q^2)}{2}}^{\pi} = \frac{2(1+q^2)}{(1-q^2)^3}.$$

Підставивши в (2), отримуємо рівність (1). Теорема доведена.

Література

1. *Новіков О.О.* Задача Колмогорова-Нікольського для подвійних операторів Фейєра на класах інтегралів Пуасона /Новіков О.О., Ровенська О.Г., Чабанова Є.О. [та ін.] // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2015. — № 5. — С. 15–19.
2. *Степанец А.И.* Решение задачи Колмогорова-Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сборник. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113—138.
3. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — Т. 10, № 3. — С. 207—256.
4. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1980. — Т. 145. — С. 126–151.
5. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 1. — С. 97–107.
6. *Степанец А.И.* Приближения суммами Валле Пуссена / Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О. — К. : Ін-т математики НАН України, — 2007. — 386 с. — (Праці Ін-ту математики НАН України ; т. 68).
7. *Новиков О.А.* Приближение классов интегралов Пуассона r-повторными суммами Валле Пуссена /*Новиков О.А., Ровенская О.Г.* // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. — 2014. — Т.19, вип. 3(23). – С.14–26.

Bodra V., Shulik T., Rud K., Chaplyk A., Miroshnichenko H.
Kyiv National University of Technologies and Design, Kyiv, Ukraine;
Donbas State Teachers' Training University, Slovians'k, Ukraine.

Approximation of Poisson integrals in the uniform metric

Found asymptotic formula for upper bounds of deviations of repeated by Fejer sums on the set of Poisson integrals. Under certain conditions, formula guarantee the solvability of the Kolmogorov–Nikol'skiy problem for repeated sums of Fejer and classes of Poisson integrals.

Keywords: *Fourier series, sums, the asymptotic equations.*