УДК 517.5

Новіков О.О., Стьопкін А.В., Волик С.В., Сипчук Є.Ю.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *старший викладач кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

[3–5] *студенти фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

НАБЛИЖЕННЯ ПОТРІЙНИМИ СУМАМИ ФЕЙЄРА

Отримані розв'язки екстремальної задачі для точних верхніх меж наближень потрійними операторами Фейєра на класі інтегралів Пуассона.

Ключові слова: *ряди Фур'є, повторні суми Фейєра, асимптотична формула.*

Нехай

$$S_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$

— часткова сума ряду Фур'є сумовної 2π–періодичної функції f. Нехай $p_1 + p_2 + p_3 = n - 1$. Потрійними сумами Фейєра функції f будемо називати тригонометричні многочлени, які задаються наступним співвідношенням [3]

$$\sigma^{(3,1)}_{n,\bar{p}}(f;x) = \frac{1}{p_1} \sum_{k=n-p_1}^{n-1} \frac{1}{p_2} \sum_{m=k-p_2+1}^{k} \frac{1}{p_3} \sum_{r=m-p_3+1}^{m} S_r(f;x).$$

Наслідуючи О.І. Степанця [1], через $C^q_{\beta,\infty}$ – класи неперервних 2π–періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P^q_\beta(t)\, dt,$$

де $P^q_\beta(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})$ – ядро Пуассона, а через $\varphi \in S^0_M$ позначається множина функцій істотно обмежених одиницею і таких, що мають нульове середнє значення на періоді.

Питанням наближення класів $C^q_{\beta,\infty}$ лінійними методами присвячені роботи відомих спеціалістів з теорії функцій. З бібліографією до цих питань можна ознайомитися у роботах [1]–[3].

В даній роботі отримані асимптотичні формули для величин

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty}, \sigma^{(3,0)}_n) = \sup_{f \in C^q_{1,\infty}} ||f(x) - \sigma^{(3,0)}_n(f,x)||_C.$$

Теорема 1. *Нехай* $q \in (0;1)$, *тоді для* $n \to \infty$, $p_i \to \infty$, $i = 1,2,3$ *має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty};\sigma^{(3,1)}_{n,\overline{p}}) = \frac{4q^4(1+q^2)}{\pi p_1p_2p_3(1-q^2)^3} + O(1)R^{(3)}_n, \qquad (1)$$

де $R^{(3)}_n = \frac{q^{p_1}+q^{p_2}+q^{p_3}}{p_1p_2p_3(1-q)^7}$.

Доведення. Застосовуючи формулу (6) роботи [3], отримуємо для $q \in (0;1)$, $\beta = 1$, $p_1+p_2+p_3 = n-1$

$$\delta^{(3,1)}_n(f,x) \overset{df}{=} f(x) - \sigma^{(3,1)}_n(f;x) = \frac{-q^4}{\pi p_1p_2p_3}\times$$

$$\times\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f^q_\beta(x+t)(\sin 4t - 4q\sin 3t + 6q^2\sin 2t - 4q^3\sin t)}{(1-2q\cos t+q^2)^4}dt + O(1)R^{(3)}_n, \qquad (2)$$

де $f^q_\beta(x)$ така, що

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t)P^q_\beta(t)\ dt.$$

Враховуючи, що функція

$$\xi_q(t) = 4\sin t[2\cos^3 t - 4q\cos^2 t + [3q^2-1]\cos t + q - q^3];$$

для будь-якого $q \in (0;1)$ змінює знак у точках $t = 0$, $t = \pm\pi$; $t = \pm\arccos q$; $t = \arccos\frac{q\pm\sqrt{2-q^2}}{2}$ і виконується умова

$$\arccos\frac{q+\sqrt{2-q^2}}{2} \leqslant \arccos q \leqslant \arccos\frac{q-\sqrt{2-q^2}}{2},$$

побудуємо функцію, яка замість $f^q_\beta(x)$ забезпечує найбільше значення головного члена інтегрального уявлення (2). Маємо

$$\varphi(t) = \mathrm{sign}(\xi_q(t)) = \begin{cases} +1, & -\pi \leqslant t < -\arccos\frac{q-\sqrt{2-q^2}}{2}; \\ -1, & -\arccos\frac{q-\sqrt{2-q^2}}{2} \leqslant t < -\arccos q; \\ +1, & -\arccos q \leqslant t < -\arccos\frac{q+\sqrt{2-q^2}}{2}; \\ -1, & -\arccos\frac{q+\sqrt{2-q^2}}{2} \leqslant t < 0; \\ +1, & 0 \leqslant t < \arccos\frac{q+\sqrt{2-q^2}}{2}; \\ -1, & \arccos\frac{q+\sqrt{2-q^2}}{2} \leqslant t < \arccos q; \\ +1, & \arccos q \leqslant t < \arccos\frac{q-\sqrt{2-q^2}}{2}; \\ -1, & \arccos\frac{q-\sqrt{2-q^2}}{2} \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

Оскільки $\varphi \in S_M^0$, то

$$\mathcal{E}(C_{1,\infty}^q;\sigma_{n,\overline{p}}^{(3,1)}) = \sup_{f\in C_{1,\infty}^q} ||\delta_{n,\overline{p}}^{(3,1)}(f;x)|| =$$

$$= \frac{8q^4}{\pi p_1 p_2 p_3}\int\limits_0^{\pi} \frac{|\sin t[2\cos^3 t - 4q\cos^2 t + [3q^2-1]\cos t + q - q^3]|}{(1-2q\cos t+q^2)^4}dt + O(1)R_n^{(3)} =$$

$$= \frac{8q^4}{\pi p_1 p_2 p_3}\int\limits_0^{\arccos\frac{q+\sqrt{2-q^2}}{2}} \frac{\sin t[2\cos^3 t - 4q\cos^2 t + [3q^2-1]\cos t + q - q^3]}{(1-2q\cos t+q^2)^4}dt-$$

$$-\frac{8q^4}{\pi p_1 p_2 p_3}\int\limits_{\arccos\frac{q+\sqrt{2-q^2}}{2}}^{\arccos q} \frac{\sin t[2\cos^3 t - 4q\cos^2 t + [3q^2-1]\cos t + q - q^3]}{(1-2q\cos t+q^2)^4}dt-$$

$$+\frac{8q^4}{\pi p_1 p_2 p_3}\int\limits_{\arccos q}^{\arccos\frac{q-\sqrt{2-q^2}}{2}} \frac{\sin t[2\cos^3 t - 4q\cos^2 t + [3q^2-1]\cos t + q - q^3]}{(1-2q\cos t+q^2)^4}dt-$$

$$-\frac{8q^4}{\pi p_1 p_2 p_3}\int\limits_{\arccos\frac{q-\sqrt{2-q^2}}{2}}^{\pi} \frac{\sin t[2\cos^3 t - 4q\cos^2 t + [3q^2-1]\cos t + q - q^3]}{(1-2q\cos t+q^2)^4}dt+$$

$$+O(1)R_n^{(3)}. \tag{3}$$

Виконуючи інтегрування, знаходимо

$$J(t;q) = \int \frac{\sin t[2\cos^3 t - 4q\cos^2 t + [3q^2-1]\cos t + q - q^3]}{(1-2q\cos t+q^2)^4}dt =$$

$$= \frac{-1}{8q^4}\ln(1-2q\cos t+q^2) - \frac{3-q^2}{8q^4(1-2q\cos t+q^2)} +$$

$$+\frac{(1-q^2)(3-q^2)}{16q^4}(1-2q\cos t+q^2)^{-2} + \frac{(q^2-1)^3}{24q^4}(1-2q\cos t+q^2)^{-3}.$$

Тоді на підставі (3)

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^q;\sigma_{n,\overline{p}}^{(3,1)}) = \frac{8q^4}{\pi p_1 p_2 p_3}[2J(\arccos\frac{q+\sqrt{2-q^2}}{2})+$$

$$+2J(\arccos\frac{q+\sqrt{2-q^2}}{2}) - J(0) - 2J(q) - J(\pi)] + O(1)R_n^{(3)}. \tag{4}$$

Виконуючи обчислення, маємо

$$J(t;q)\Big|_{0}^{\arccos\frac{q+\sqrt{2-q^2}}{2}}+\Big|_{\arccos\frac{q+\sqrt{2-q^2}}{2}}^{\arccos q}+\Big|_{\arccos q}^{\arccos\frac{q-\sqrt{2-q^2}}{2}}+\Big|_{\arccos\frac{q-\sqrt{2-q^2}}{2}}^{\pi}=\frac{1+q^2}{2(1-q^2)^3}.$$

Тоді на підставі (4) отримуємо рівність (1). Теорема доведена.

Література

1. *Степанец А.И.* Решение задачи Колмогорова-Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сборник. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113—138.
2. *Степанец А.И.* Приближения суммами Валле Пуссена / Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О. — К. : Ін-т математики НАН України, — 2007. — 386 с. — (Праці Ін-ту математики НАН України ; т. 68).
3. *Новиков О.А.* Приближение классов интегралов Пуассона r-повторными суммами Валле Пуссена /*Новиков О.А., Ровенская О.Г.* // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. — 2014. — Т.19, вип. 3(23). — С.14–26.

Novikov O., Stepkin A., Volyk S., Sypchuk Ye.
Donbas State Teachers' Training University, Slovians'k, Ukraine.

The approach of triple sums Fejer

The solutions of the extremum problem for exact upper bounds of approximations by the triple operators of Fejer on the class of Poisson integrals has been obtained.

Keywords: *Fourier series, repeated sums of Fejer, the asymptotic equations.*