УДК 512.552.3, 511.14

Пащенко З.Д., Вагнер Г.О.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*
[2] *студентка 3 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: pashchenko_zd@mail.ru; annetvagner@mail.ru

СКІНЧЕННІ ЛАНЦЮГОВІ ГАУСОВІ ДРОБИ

У статті розглядається можливість представлення довільного комплексного числа у вигляді ланцюгових гаусових дробів. Автори сформулювали твердження, що раціональні гаусові числа і тільки вони представляються у вигляді скінченного ланцюгового гаусового дробу.

Ключові слова: *гаусові числа, алгоритм Евкліда, ланцюгові дроби гаусових чисел.*

Вступ

В теорії чисел широке застосування знайшли ланцюгові дроби. Вони використовуються для представлення дійсних чисел, при розв'язуванні діофантових рівнянь, при наближених обчисленнях раціональних дробів, квадратних коренів та ін. [5]. Так як діофантові рівняння можна застосовувати для лінійного представлення найбільшого спільного дільника двох чисел, то можна говорити про застосування ланцюгових дробів при вирішенні таких задач. Основним підґрунтям для побудови ланцюгового дробу раціонального числа є існування алгоритму Евкліда в кільці цілих чисел. В свою чергу, алгоритм Евкліда існує в довільному евклідовому кільці [4].

Оскільки кільце цілих гаусових чисел $Z[i]$ є евклідовим [3], то природно виникають питання 1) про можливість аналогічного представлення елементів поля часток $Z[i]$, а, можливо, і довільних комплексних чисел, у вигляді ланцюгових дробів, 2) про властивості такого аналогу ланцюгових дробів, 3) про застосування таких дробів. В даній статті вводиться поняття ланцюгового гаусового дробу та розглядається питання про представлення елементів поля часток $Z[i]$ у вигляді таких дробів.

Основна частина

Зауважимо, що довільна частка цілих гаусових чисел є комплексне число з раціональними коефіцієнтами:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

З іншого боку довільне комплексне число з раціональними коефіцієнтами представляється у вигляді частки цілих гаусових чисел:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{b_1}{b_2} i = \frac{a_1 b_2 + b_1 a_2 i}{a_2 b_2}.$$

Тому полем часток $Z[i]$ буде поле $Q[i]$. Назвемо числа цього поля **гаусовими дробами або раціональними гаусовими числами.**

Нагадаємо означення евклідового кільця. Область цілісності K (комутативне кільце з одиницею без дільників нуля) називається **евклідовим кільцем**, якщо існує таке відображення $\delta : K_{-0} \to N_0$, (воно називається **нормою**) яке задовольняє умовам:

1. $\delta(ab) \geqslant \delta(a), \forall a, b \neq \theta \in K$
2. $\forall a, b \in K, b \neq \theta \ \exists q, r \in K$, що
   а) $a = bq + r$,
   б) $\delta(r) < \delta(b)$ або $r = \theta$.

Виконання умови 2) найчастіше називають теоремою про ділення з остачею.

Якщо в області цілісності $Z[i]$ обрати норму $\delta(a + bi) = a^2 + b^2$, то $Z[i]$ задовольняє означенню евклідового кільця [1]. Зауважимо, що для довільних комплексних чисел

$\delta(z) = |z|^2, \delta(z_1 z_2) = \delta(z_1)\delta(z_2), \delta(\frac{z_1}{z_2}) = \frac{\delta(z_1)}{\delta(z_2)}$,

$\delta(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0, \delta(z) < n \Longleftrightarrow |z| < \sqrt{n}, \delta(z) \leqslant 1 \Longleftrightarrow |z| \leqslant 1$.

Ціла $[z]$ та дробова $\{z\}$ частини комплексного числа $z = s + ti$ обчислюються таким чином, щоб $[z]$ було найближчим цілим гаусовим числом до числа z, а $\{z\} = z - [z]$. Тоді $z = [z] + \{z\}, [z] \in Z[i]$ і $\delta(\{z\}) \leqslant \frac{1}{2}$. В залежності від значень s і t, ціла частина $[z]$ може мати значення $[s]+[t]i$, $[s]+1+[t]i$, $[s] + ([t] + 1)i$, $[s] + 1 + ([t] + 1)i$.

Коротко опишемо алгоритм ділення числа $\alpha = a + bi$ на число $\beta = c + di$ з остачею в $Z[i]$. Він полягає в підборі q як цілої частини $\frac{\alpha}{\beta}$ та обчисленні $r = \alpha - \beta q$.

Тоді $\frac{r}{\beta}$ є дробовою частиною $\frac{\alpha}{\beta}$ і $\delta(\frac{r}{\beta}) \leqslant \frac{1}{2}$, звідки $\delta(r) \leqslant \frac{1}{2}\delta(\beta) < \delta(\beta)$.

Дріб вигляду $q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$,

де $q_k \in Z[i], k = 0, 1, 2, \ldots$, будемо називати **ланцюговим гаусовим дробом**. Такий дріб позначається $[q_0; q_1, q_2, q_3, \ldots]$.

Розглянемо **скінченні ланцюгові гаусові дроби** $[q_0; q_1, q_2, q_3, \ldots, q_s]$ **s-го порядку**. Зрозуміло, що $q_s \neq 0$. Зауважимо, що кожний ланцюговий дріб $[q_0; q_1, q_2, q_3, \ldots]$ можна привести до рівнозначного, у якого нульовим може бути лише перший коефіцієнт. Для позбавлення від нульового коефіцієнту застосовуються деякі перетворення, які ми опишемо.

Якщо $\alpha = [q_0; q_1, q_2, ...]$, то $\alpha = [q_0; q_1, q_2, ..., q_{k-1}, \beta]$, де $\beta = [q_k, q_{k+1}, ...]$. Тоді $\forall k \geqslant 0$ маємо: $[q_k, 0, q_{k+2}, q_{k+3}, q_{k+4}, ...] = [q_k + q_{k+2}, q_{k+3}, q_{k+4}, ...]$; $[0, 0, q_{k+2}, q_{k+3}, q_{k+4}, ...] = [q_{k+2}, q_{k+3}, q_{k+4}, ...]$.

Тобто,

1) якщо ланцюговий дріб α містить один нульовий коефіцієнт $q_{k+1} = 0$ між ненульовими q_k, q_{k+2}, то три коефіцієнти замінюються одним $q_k + q_{k+2}$,
2) якщо ланцюговий дріб α містить два сусідніх нульових коефіцієнти, то ці коефіцієнти вилучаються.

Застосовуючи ці два перетворення, довільний ланцюговий дріб α може бути приведений до вигляду $\alpha = [t_0, t_1, t_2, ...]$, $t_j \neq 0$, $j = 1, 2, ...$.

Не можна позбутися нульового коефіцієнту $t_0 = 0$, якщо $t_1 \neq 0$, бо до цього випадку не можна застосувати жодного з описаних перетворень.

1) Скінченний ланцюговий гаусів дріб 0-го порядку $\alpha = [q_0] = q_0 \in Z[i]$. Якщо $\alpha = [q_0; q_1]$ — скінченний ланцюговий дріб 1-го порядку, то $\alpha = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1} \in Q[i]$.
2) Припустимо, що довільний скінченний гаусовий дріб $(s-1)$-го порядку представляється у вигляді гаусового дробу $\frac{a'}{b'} \in Q[i]$.

Нехай $\alpha = [q_0; q_1, q_2, q_3, ..., q_s], q_i \neq 0, i = 1, 2, 3, ...$ – скінченний ланцюговий гаусів дріб s-го порядку. Тоді, за припущенням, скінченний ланцюговий гаусів дріб $(s-1)$-го порядку $[q_1; q_2, q_3, ..., q_s]$ представляється у вигляді гаусового дробу $\frac{a'}{b'}$, причому його ціла частина $q_1 \neq 0$, тому $a' \neq 0$, а також

$$\alpha = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_s}}} = q_0 + \frac{1}{[q_1; q_2, ..., q_s]} = q_0 + \frac{1}{\frac{a'}{b'}} = q_0 + \frac{b'}{a'} = \frac{q_0 a' + b'}{a'} = \frac{a}{b} \in Q[i].$$

Отже, нами одержано

Твердження 1. *Довільний скінченний ланцюговий гаусовий дріб представляється у вигляді гаусового дробу* $\frac{a}{b}$.

Зауваження 1. *Ми також одержали залежність чисельника* a *і знаменника* b *скінченного ланцюгового гаусового дробу* s*-го порядку* $\alpha = [q_0; q_1, q_2, q_3, ..., q_s]$ *від чисельника* a' *і знаменника* b' *скінченного ланцюгового гаусового дробу* $\alpha = [q_1; q_2, q_3, ..., q_s]$ $(s-1)$*-го порядку, яка виражається формулами:* $a = q_0 a' + b'$, $b = a'$.

З іншого боку, *довільне раціональне гаусове число може бути представлене у вигляді скінченного ланцюгового гаусового дробу.* Це представлення може бути одержане за допомогою алгоритму Евкліда.

Нехай $\alpha = \frac{a}{b}$, $a, b \in Z[i], b \neq 0$. Застосуємо до a і b алгоритм Евкліда. Нехай він має остачі від послідовного ділення $r_0, r_1, r_2, ..., r_k, r_{k+1} = 0$, а його неповні частки $q_0, q_1, q_2, ..., q_k, q_{k+1}$. Тоді маємо наступне:

1. $a = bq_0 + r_0, \delta(r_0) \leqslant \frac{1}{2}\delta(b),$ $q_0 = [\frac{a}{b}]$	1. $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_0}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_0}}$, $\delta(\frac{b}{r_0}) \geqslant 2$
2. $b = r_0q_1 + r_1, \delta(r_1) \leqslant \frac{1}{2}\delta(r_0),$ $q_1 = [\frac{b}{r_0}]$	2. $\frac{b}{r_0} = q_1 + \frac{r_1}{r_0} = q_1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}}, \delta(\frac{r_0}{r_1}) \geqslant 2$
3. $r_0 = r_1q_2 + r_2, \delta(r_2) \leqslant \frac{1}{2}\delta(r_1),$ $q_2 = [\frac{r_0}{r_1}]$	3. $\frac{r_0}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}$, $\delta(\frac{r_1}{r_2}) \geqslant 2$
$k+1.$ $r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k,$ $\delta(r_k) \leqslant \frac{1}{2}\delta(r_{k-1}), q_k = [\frac{r_{k-2}}{r_{k-1}}]$	$k+1.$ $\frac{r_{k-2}}{r_{k-1}} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_{k-1}}{r_k}}, \delta(\frac{r_{k-1}}{r_k}) \geqslant 2$
$k.$ $r_{k-1} = r_kq_{k+1} + \theta$, $q_{k+1} = [\frac{r_{k-1}}{r_k}]$.	$k.$ $\frac{r_{k-1}}{r_k} = q_{k+1}.$

Зауважимо, що $\delta(\frac{b}{r_0}) \geqslant 2$, $\delta(\frac{r_{j-1}}{r_j}) \geqslant 2$, $j = 1, 2, ...$. Тобто модуль цих комплексних чисел не менше $\sqrt{2}$. Отже, вони знаходяться на комплексній площині за межами кола з центром в початку координат і радіусом $\sqrt{2}$, включаючи саме коло. Оскільки неповні частки $q_j, j = 1, 2, ...$ знаходяться як цілі частини від чисел, що знаходяться в цій області, то найменша норма цих неповних часток буде 1. Ця норма досягається на числах $1, i, -1, -i$. Взагалі, всі значення $q_j, j = 1, 2, ...$ знаходяться за межами квадрата цілих гаусових чисел з вершинами $\pm 1 \pm i$, тобто можуть приймати довільні, відмінні від нуля, значення ($q_j \neq 0, j = 1, 2, ...$) в кільці $Z[i]$.

Поступова підстановка виразів із правої частини (аналізу) алгоритму Евкліда дає наступний і теоретичний, і практичний результат:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_k + \cfrac{1}{q_{k+1}}}}} = [q_0; q_1, q_2, ..., q_{k+1}] -$$

довільне раціональне гаусове число $\alpha = \frac{a}{b}, a, b \in Z[i], b \neq 0$ *може бути представлене у вигляді скінченного ланцюгового гаусового дробу, який складається із неповних часток алгоритму Евкліда, застосованого до* a і b.

Таким чином маємо

Твердження 2. *Раціональні гаусові числа і тільки вони представляються у вигляді скінченного ланцюгового гаусового дробу.*

Для довільного комплексного числа z можна розглядати процес поступового виділення цілої частини цього числа та чисел, обернених до дробової частини попереднього: $q_0 = [z]; \{z\} \neq 0,$

$z_1 = \frac{1}{\{z\}}, q_1 = [z_1], \{z_1\} \neq 0\,, \quad z_2 = \frac{1}{\{z_1\}}, q_2 = [z_2], \{z_2\} \neq 0, ...$

Тоді $z = [q_0; q_1, q_2, ...]$.

Якщо $\exists z_s$, що $\{z_s\} = 0$, то $z = [q_0; q_1, q_2, ..., q_s] \in Q[i]$.

Твердження 3. *Довільне комплексне число можна представити у вигляді ланцюгового гаусового дробу.*

Висновки

Отримане твердження дає позитивну відповідь на поставлене в цій роботі питання. Аналізуючи перспективи продовження даного дослідження, цікаво одержати відповідь на питання про однозначність представлення довільного комплексного числа у вигляді ланцюгових гаусових дробів, про властивості підхідних дробів ланцюгових гаусових дробів, про застосування ланцюгових гаусових дробів. В межах даної статті не розглядалися підхідні дроби ланцюгових гаусових дробів та рекурентні формули для обчислення чисельників та знаменників цих дробів. Та зазначене зауваження 1 дає право сподіватись, що ці рекурентні формули будуть співпадати з такими формулами для ланцюгових дробів цілих чисел.

Література

1. *Безущак О.О., Ганюшкін О.Г.* Елементи теорії чисел: Навч. посібник. — К. : полігр. центр «Київський університет», 2003. — 202 с.
2. *Бородін О. І.* Теорія чисел. — К.: Вища шк., 1970. — 275 с.
3. *Карл Фридрих Гаусс* Труды по теории чисел. — М.: Издательство академии наук СССР., 1959. — 980 с.
4. *Куликов Л. Я.* Алгебра и теория чисел. — М.: Высшая шк., 1979. — 559 с.
5. Цепные дроби их применения: сб. научных трудов / под ред. В.Я. Скоробогатько. Институт математики АН УССР. — Киев, 1976. — С. 96–97.

Pashchenko Zoja D., Vagner Anna A.

Donbas State Teachers' Training University, Slovians'k, Ukraine.

Gaussian finite continued fraction

The article deals with the possibility of representing arbitrary complex numbers as Gaussian continued fractions. The authors formulated a statement that the Gaussian rational numbers, and only them are presented as a Gaussian finite continued fraction.

Keywords: *Gaussian numbers, Euclidean algorithm, continued fractions of Gaussian numbers.*