УДК 681.511.46

**Подольская О.Г., Безуглая А.Е.**

[1] *кандидат технических наук, доцент кафедры математики, физики и информатики, «Керченский государственный морской технологический университет»*

[2] *кандидат технических наук, доцент кафедры информационных систем, «Севастопольский государственный университет»*

e-mail: ogpodolskaya@i.ua, anna_bezuglaya@list.ru

# ТЕРМИНАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ С РАЗРЫВАМИ РЕШЕНИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЯ

Предложено обобщение метода конечного состояния для синтеза терминального управления многомерными нелинейными дискретными системами. Описана модель конечного состояния, а также алгоритм непрерывного и дискретного управления для систем с разрывами решений.

**Ключевые слова:** *терминальное управление, нелинейные системы с разрывами решений, метод конечного состояния.*

## Введение.

Многие управляемые динамические процессы адекватно описываются нормальными системами обыкновенных дифференциальных и конечно-разностных одноиндексных уравнений. Такая форма математического описания, называемая «непрерывно-дискретные» системы, используется в тех случаях, когда часть переменных изменяется непрерывно во времени (в общем случае по любой независимой переменной), а часть — в отдельных точках временной оси.

Существует направление, связанное с использованием переходных функций линейных непрерывно-дискретных систем [1], развитие которого на нелинейные задачи управления определенного класса предлагается в данной работе.

*Целью работы* является обобщение метода конечного состояния для терминального управления нелинейными системами с разрывами решений.

© Подольская О.Г., Безуглая А.Е., 2016

## Постановка и решение задачи.

В настоящей работе метод конечного состояния применен для решения более общей, чем непрерывно-дискретной по времени задачи терминального управления [2], — задачи терминального управления системой с разрывами решений в следующей постановке:

$$\begin{array}{l} J = J\left(x\left(t_f\right)\right) \to J^*, \\ \dfrac{dx\left(t\right)}{dt} = \Phi_1\left(t, x\left(t-0\right)\right) + B_1\left(t\right) \cdot u_1\left(t\right), \\ x\left(t_j\right) = \Phi_2\left(t_j - 0, x\left(t_j - 0\right)\right) + B_2\left(t_j\right) u_2\left(t_j\right), \\ t \in \left[t_0, t_f\right], \;\; x\left(t_0\right) = x^0, \;\; j = 1, 2, \ldots, N, \\ t_1 < t_2 < \ldots < t_N, \;\; t_N \leqslant t_f, \end{array} \tag{1}$$

где $u_1\left(t\right)$, $u_2\left(t_j\right)$ — $\left(r_1 \times 1\right)$, $\left(r_2 \times 1\right)$-мерные векторы управляющих воздействий на непрерывном и дискретном входах соответственно; $x^0$ — $\left(n \times 1\right)$-мерный вектор начальных условий, $J^*$ — желаемое значение терминального критерия. Известные на всем интервале детерминированные внешние воздействия, по предположению, входят в непрерывную и непрерывно дифференцируемую по всем своим аргументам $\left(n \times 1\right)$-мерную вектор-функцию $\Phi_1$ и определенную при всех своих аргументах $\left(n \times 1\right)$-мерную вектор-функцию $\Phi_2$.

Подобная форма записи [3] гибридных систем в виде уравнений с разрывами решений позволяет соответствующим выбором $\Phi_1$ и $\Phi_2$ описывать как чисто непрерывные (при $\Phi_2 \equiv 0$, $B_2 \equiv 0$), чисто дискретные с произвольным количеством переменных во времени тактов и соотношений между ними (при $\Phi_1 \equiv 0$, $B_1 \equiv 0$), так и смешанные системы. Использование в качестве аргументов функций $\Phi_1, \Phi_2$ значения состояния в точках $t - 0$, $t_j - 0$, т.е. при пределах слева соответствующих времен, позволяет учитывать влияние состояния в предшествующий скачку момент времени. При этом, очевидно, порядок записи уравнений в системе (1) может быть произвольный.

Рассмотрим последовательно дискретные интервалы времени и на каждом из них найдем непрерывное управление $u_1\left(t\right)$, приводящее состояние системы (1) в некоторое заданное промежуточное состояние, задаваемое значением $J_j = J\left(x\left(t_j\right)\right)$, где $j$ — номер дискретного интервала. Для этого, следуя основной схеме метода конечного состояния, определим так называемую «критериальную функцию» в виде целевой функции критерия, где аргумент $x\left(t_j\right)$ заменен переменной конечного состояния $\bar{x}\left(t_j, t, x\left(t\right)\right)$. Переменная конечного состояния вместе с нелинейной переходной матрицей определяется совместной системой

$$\frac{d\bar{x}\left(\vartheta,t,x\left(t\right)\right)}{d\vartheta}=\Phi_1\left(\vartheta,\bar{x}\left(\vartheta,t,x\left(t\right)\right)\right),$$

$$\frac{dW\left(\vartheta,t,x(t)\right)}{d\vartheta}=\left.\frac{\partial\Phi_1\left(\vartheta,x\right)}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}(\vartheta,t,x(t))}\cdot W\left(\vartheta,t,x(t)\right),$$
$$\vartheta\in\left[t_{j-1},t_j\right],\ W\left(t,t,(x(t)\right)=I,\ \bar{\mathrm{x}}\left(t_{j-1},t_{j-1},x\left(t_{j-1}\right)\right)=x\left(t_{j-1}\right),\ t\in\left[t_{j-1},t_j\right), \tag{2}$$

где $I$ — единичная матрица.

Опираясь на непрерывный аналог определения переменной конечного состояния из (2) как решение неуправляемой системы, следующей из (1) при $u_1(t)=0$, $u_2(t_j)=0$, определим переменную конечного состояния для гибридной системы (1) как функцию первого аргумента:

$$\begin{aligned}&\frac{d\bar{x}\left(\vartheta,t,x\left(t\right)\right)}{d\vartheta}=\Phi_1\left(\vartheta,\bar{x}\left(\vartheta-0,t,x\left(t\right)\right)\right),\\&\bar{x}\left(t_j,t,x(t)\right)=\Phi_2\left(t_j-0,\bar{x}\left(t_j-0,t,x\left(t\right)\right)\right),\\&\vartheta\in\left[t,t_f\right],\ \bar{x}\left(t,t,x(t)\right)=x(t),\ \ j=1,2,\ldots,N,\\&t_1<t_2<\ldots<t_N,\ \ t_N\leqslant t_f,\ \ t\in\left[t_0,t_f\right].\end{aligned} \tag{3}$$

Определим желаемые значения критериальной функции в дискретных точках как решение конечно-разностного уравнения с некоторой правой частью $f_{J2}$:

$$\bar{J}_j=f_{J2}\left(\bar{J}_{j-1}\right). \tag{4}$$

Получим конечно-разностное уравнение для дискретной части задачи (1), введя для краткости записей обозначения:
$t_j-0\equiv j-0$, $\Phi_2\left(t_j-0,x\right)\equiv\Phi_2\left(j-0,x\right)$, $\bar{x}\left(t_j,t_k,x\left(t_k\right)\right)\equiv\bar{x}_{j,k}\left(x_k\right)$, $B_2\left(t_j\right)\equiv B_{2j}$, $u_2\left(t_j\right)\equiv u_{2j}$. Отсюда получаем:

$$\bar{x}_{j,j}\left(x_j\right)-\bar{x}_{j,j-0}\left(x_{j-0}\right)=B_{2j}u_{2j},\quad j=1,2,\ldots,N. \tag{5}$$

В полученном соотношении первый и второй индексы зависимы, управление определяется через переменные конечного состояния как функции второго аргумента (индекса).

В результате имеем в сокращенных обозначениях с учетом (1):

$$\begin{aligned}&\bar{x}_{j+1,j}\left(x_j\right)\equiv\bar{x}\left(t_{j+1},t_j,x\left(t_j\right)\right)=\\&\qquad=\Phi_2\left(t_{j+1-0},\bar{x}\left(t_{j+1-0},t_j,x\left(t_j\right)\right)\right)=\Phi_2\left(j+1-0,\bar{x}_{j+1-0,j}\left(x_j\right)\right).\end{aligned}$$

Переменная конечного состояния $\bar{x}_{j+1-0,j}\left(x_j\right)$ вычисляется по непрерывной части системы (3) при начальном условии

$$\bar{x}_{j,j}\left(x_j\right)\equiv x_j=\Phi_2\left(j-0,x_{j-0}\right)+B_{2j}u_{2j}\ \text{ и }\ \vartheta\in\left[t_j,t_{j+1}\right).$$

Получаем:

$$\bar{x}_{j+1,j}\left(x_j\right) - \bar{x}_{j+1,j-0}(x_{j-0}) =$$
$$= \Phi_2\left(j+1-0, \Phi_{21}\left(j-0, x_{j-0}\right) + B_{2j}u_{2j}\right) - \Phi_2\left(j+1-0, \Phi_{21}\left(j-0, x_{j-0}\right)\right). \tag{6}$$

Для сокращения последующих записей введем обозначение:

$$\Phi_{2}{}_{[j]}^{[k]}\left(x\right) \equiv \Phi_2\left(j, \Phi_{21}\left(j-1, \Phi_{21}\left(j-2, \ldots \Phi_{21}\left(j-k+1, x\right)\right)\right)\right), \tag{7}$$

где $\Phi_2$ имеет $k$ рекурсивных вхождений, дополненных операциями интегрирования непрерывной части системы (3). Связь между глубиной рекурсии $k$ и индексом $j$, как и в дискретном случае, задается условием $k \leqslant j$. Начальным условием рекурсии является $\Phi_{2}{}_{[j]}^{[1]}\left(x\right) \equiv \Phi_2\left(j, x\right)$. В новых обозначениях вместо (6) запишем:

$$\bar{x}_{j+1,j}\left(x_j\right) - \bar{x}_{j+1,j-0}(x_{j-0}) =$$
$$= \Phi_{2}{}_{[j+1-0]}^{[1]}\left(\Phi_{21}\left(j-0, x_{j-0}\right) + B_{2j}u_{2j}\right) - \Phi_{2}{}_{[j+1-0]}^{[1]}\left(\Phi_{21}\left(j-0, x_{j-0}\right)\right).$$

После преобразований получаем:

$$\begin{gathered} f_{J2}\left(\bar{J}_{j-1}\right) = J\Big(\bar{x}_{N,j-1}\left(x_{j-1}\right) + \\ +\Phi_{2}{}_{[N-0]}^{[N-j]}\left(\Phi_{21}\left(j-0, x_{j-0}\right) + B_{2j}u_{2j}\right) - \Phi_{2}{}_{[N-0]}^{[N-j]}\left(\Phi_{21}\left(j-0, x_{j-0}\right)\right)\Big), \end{gathered} \tag{8}$$

$$\bar{J}_{j-1} \equiv J\left(\bar{x}_{N,j-1}\left(x_{j-1}\right)\right). \quad f_{j2}\left(\bar{J}_{j-1}\right) = \bar{J}_{j-1} + \tfrac{1}{T_{u2}}\left(J^* - \bar{J}_{j-1}\right).$$

Нелинейное конечное уравнение относительно управления $u_{2j}$ уравнение (8) и является тем соотношением, из которого определяется искомое управление в дискретные моменты времени методом конечного состояния для определения управления в каждый дискретный момент $j$ необходимо решать скалярное нелинейное уравнение с $r_2$ неизвестными (по числу компонент вектора $u_2$), т.е. фактически — $r_2$-мерную задачу нелинейного программирования.

Таким образом, расчет непрерывного и дискретного управлений для задачи (1) состоит из следующих шагов:

1) задаются исходные данные в виде переменных во времени (в общем случае) вектор-функций $\Phi_1$, $B_1$, $\Phi_2$, $B_2$, начальное состояние $x^0$, время $t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < t_N$, время функционирования системы $t_f \geqslant t_N$; полагается $j = 1$;

2) проверяется условие $j \leqslant N$; если условие выполнено, переход к шагу 3, в противном случае производится расчет непрерывного управления на оставшемся интервале $(t_N, t_f]$;

3) производится расчет непрерывного управления на интервале $[t_{j-1}, t_j]$;

4) производится расчет дискретного управления по алгоритму (8); в процессе расчета используется процедура, реализующая рекурсивное вложение правых частей $\Phi_2$ дискретной части (3) и интегрирование непрерывной части (3) на интервале $[t_{j-1}, t_j]$; после формирования всех данных для уравнения (8) производится его численное решение относительно $u_{2j}$; полагается $j = j + 1$ и осуществляется переход к шагу 2.

## Выводы.

1. Разработано обобщение метода конечных состояний для синтеза управлений нелинейными дискретными по времени терминальными системами вида (1) — дискретное МКС-управление.
2. Получена модель конечного состояния для систем с разрывами решений вида (1).

## Литература


1. *Барабанов А.Т., Катковник В.Я., Нелепин Р.А., Хлыпало Е.И., Якубович В.А.* Методы исследования нелинейных систем автоматического управления / Под ред. Р.А. Нелепина. — М.: Наука, 1975. — 448 с.
2. *Шушляпин Е.А., Подольская О.Г.* Управление нелинейными непрерывно-дискретными системами методом конечного состояния // Труды IV Международной конференция «Идентификация систем и задачи управления SICPRO'05», г. Москва, 25–28 января 2005 г. — М.: ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, С. 1495–1513.
3. *Барабанов А.Т., Агранович Г.А.* Линейные модели и оптимизация непрерывно-дискретных динамических систем // Динамические системы: Респ. междувед. науч. сб. — Киев: Вища школа, 1983. — №2. — С. 17–24.


---


**Podolskaya O.G., Bezuglaya A.E.**

Kerch State Marine Technological University, Kerch;

Sevastopol State University, Sevastopol.


**Terminal management the nonlinear systems with the breaks of decisions based on discrete terminal state method**


Generalization of method of the terminal states offered for the synthesis of managements multidimensional nonlinear discrete terminal systems. The model of the terminal state, and algorithm of continuous and discrete management, is described for the systems with the breaks of decisions.



**Keywords:** *a terminal management, nonlinear systems with the breaks of decisions, discrete terminal state method.*