МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ В ЗОШ ТА ВНЗ

УДК 37.016:514.11

Плахотник М.В.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, науковий дослідник (пост-док) Інституту математики та статистики університету Сан-Пауло, м. Сан-Пауло, Бразилія*

e-mail: makar_plakhotnyk@ukr.net

ПРО ДОЦІЛЬНІСТЬ ВИВЧЕННЯ ТЕОРЕМИ ФАЛЕСА У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

Ми звертаємо увагу на те, що належне використання методу координат дозволить набагато спростити розуміння як природності, так і деталей доведення важливих тверджень, для яких при діючому підході використовується теорема Фалеса – теореми Піфагора, введення тригонометричних функцій гострого кута та доведення ознак подібності трикутників.

Ключові слова: *теорема Піфагора, теорема Фалеса, метод координат, подібність трикутників*

Вступ

При роботі зі школярами в різних формах, враховуючи викладання в школі, керування шкільними та позашкільними гуртками математичного спрямування, читання лекцій в літніх школах ми звернули увагу на досить неприємне явище – учні, котрі закінчили 8-й клас, не усвідомлюють важливості теореми Фалеса як такої, що без перебільшення можна назвати ключовою теоремою курсу геометрії 8-го класу. Так, з “наслідку з теореми Фалеса” в діючих підручниках геометрії виводять:

1. Ознаки подібності трикутників;
2. Можливість введення тригонометричних функцій гострого кута;
3. Теорему Піфагора.

Будь-який з перерахованих трьох пунктів гідний того, щоб учень оцінив теорему Фалеса як дуже важливу. Втім, за нашими спостереженнями учні, котрі закінчили 8-й клас, цю теорему навіть не згадують у відповідь на прохання назвати 5 найважливіших фактів з геометрії, котрі вони вивчили у 8-му класі. Теорема Фалеса, за нашими спостереженнями, губиться, на думку учнів, між властивостями паралелограма та ромба, теоремою Піфагора, властивостями дотичних та хорд, тощо.

При цьому доведення теореми Фалеса в сучасних підручниках є або завідомо неповним, або одним з найскладніших серед тверджень, котрі доводяться в курсі геометрії. Наявні в підручниках доведення явно чи неявно використовують граничний перехід та щільність множини додатних раціональних чисел в множині дійсних додатних чисел, але при цьому не надають належних означень і, відповідно, не наводять строгих викладок, що, зрештою, навряд чи доцільно робити, орієнтуючись на учнів 8-х класів середньої школи.

Як викладачам геометрії, так і школярам, котрі геометрію лише починають вивчати, відомо, що поняття теорем та аксіом як структурних елементів курсу геометрії походить з праці "Початки геометрії" давньогрецького математика Евкліда. Серед досягнень більш пізніх геометрів, порівняльних за своєю значущістю з роботою Евкліда, варто виділити:

– працю Рене Декарта, де він запропонував координатний метод;

– неевклідову геометрію відкриту Лобачевським, Больяї, Гаусом і розвинуту більш пізніми математиками, та

– розвиток Уільямом Гамільтоном в першій половині 19-го століття методів використання векторів при розв'язанні геометричних задач.

Розуміння неевклідової геометрії потребує від учнів нетривіального абстрактного мислення і або не згадується в шкільних курсах геометрії (що природно), або згадується лише на рівні зауваження, що неевклідова геометрія може бути побудована. Водночас, як векторний метод, так і метод координат так чи інакше відображений у всіх шкільних курсах геометрії.

Ми переконані в тому, що усвідомлення математиками - авторами підручників існування неевклідової геометрії схилило їх такого викладу матеріалу, щоб не використовувати в якості очевидних ті твердження, котрі рівносильні 5-му постулату Еквліда (аксіомі паралельних).

Радянський математик Андрій Миколайович Колмогоров писав в [12], що метод координат повинен використовуватися лише як допоміжний - так, щоб виклад геометрії не ставав від використання цього методу менш "геометричним". Наводячи огляд сучасних (та, зрештою, і радянських) підручників геометрії ми покажемо, що всі вони відповідають наведеному побажанню А. Колмогорова.

Ми покажемо, що теорему Фалеса набагато природніше доводити з використанням методу координат і, взагалі, використовувати цей метод не "як допоміжний" і не як "засіб ілюстрації геометричних міркувань", а саме як метод доведення геометричних тверджень, доведення яких без використання методу координат стає суттєво складнішим.

Ми пропонуємо переглянути шкільну програму з геометрії таким чином, щоб важливі теореми, такі як теорема Піфагора, теорема про графік лінійної функції, подібність трикутників вивчалися як такі, що є простими і природними. Щоб простота і природність доведення відповідних тверджень слугувала легкому розумінню матеріалу учнями, а не ставала заручником структури підручника, невдало вибраної його автором.

Ми покажемо, що теорему Піфагора можна довести такими способами, що їх може легко зрозуміти середній учень як 7-го, так і 6-го класу звичайної школи. Використовуючи теорему Піфагора, можна довести, що графік рівняння $y = ax$, де a – деяка стала, є прямою. Використовуючи рівняння прямої, легко як довести ознаки подібності прямокутних трикутників, так і ввести тригонометричні функції гострих кутів. Лише після цього, використовуючи введені тригонометричні функції, варто доводити ознаки подібності трикутників "загального вигляду".

Мотивація

Альберт Ейнштейн [8, с. 134] з приводу вивчення геометрії писав:

У віці 12 років я пережив одне диво: його джерелом була книжечка з евклідової геометрії на площині, котра потрапила мені до рук на початку навчального року. Там були твердження, наприклад, про перетин трьох висот трикутника в одній точці, які хоч і не були самі по собі очевидними, але могли бути доведені з впевненістю, що відкидала будь-які сумніви. Ця ясність і впевненість справили на мене велике враження. Мене не турбувало те, що аксіоми повинні бути прийняті без доведення. Взагалі, мені було цілком достатньо, якщо я міг в своїх доказах спиратися на такі положення, котрі здавалися мені безспірними. Я пам'ятаю, наприклад, що теорему Піфагора мені довів мій дядько ще до того, як ця книжечка потрапила мені до рук. Великих зусиль мені вартувало "довести" цю теорему з допомогою подібних трикутників; при цьому мені здавалося "очевидним", що відношення сторін прямокутного трикутника повинно визначатися одним з його гострих кутів. Взагалі мені здавалося, що доводити потрібно лише те, що не "очевидно" саме в такому сенсі.

Звісно, наведена цитата при уважному її прочитанні викликає ряд неоднозначних питань. Не ясно, яким саме чином доводилася теорема Піфагора "з допомогою подібних трикутників", якщо Ейнштейну подібність прямокутних трикутників з однаковими кутами була очевидною, але при цьому довести теорему “вартувало великих зусиль”. Водночас, сама ідея всесвітньо відомого фізика про необхідність доведення лише тих тверджень, які не очевидні учневі, має бути, на нашу думку, якщо не прийнята беззаперечно, то, принаймні взята до уваги як така, що природна за своїм походженням.

В середині 1960-х років в Радянському Союзі відбувалася, говорячи сучасною мовою, модернізація шкільної системи математичної освіти, якою керував А.М. Колмогоров. В статті [12] він висловив таку програмну засаду побудови геометрії в старших класах: “Курс геометрії в старших класах будується на основі векторних уявлень (рос. - «векторных представлений»). При цьому є природним і звернення до координатного методу, однак в якості допоміжного, так, що виклад від цього не стає менш геометричним”.

В 1960-х роках мала місце відображена в цитаті А. Колмогорова переконаність, що векторна побудова геометрії за Вейлем є більш простою за традиційну побудову геометрії [6]. Тому суть реформи, котрою займався Колмогоров, багато в чому зводилася до питання про використання векторів в шкільному курсі геометрії, в першу чергу – стереометрії.

На початку 1980-х років були написані підручники планіметрії О.Д. Александровим. В підручнику [1], написаному за його мотивами, теорема Піфагора доводиться з використанням площ прямокутних трикутників, шляхом вписування прямокутного трикутника в квадрат, сторони якого дорівнюють сумі довжин катетів трикутника. Так само, за допомогою площі трикутника вводиться поняття тригонометричних функцій гострого кута.

Обгрунтування коректності введення тригонометричних функцій у найпоширеніших в Україні підручниках з геометрії вводиться з допомогою узагальненої теореми Фалеса. Тому наведемо доведення коректності тригонометричних функцій за [1, с. 95].

Розглянемо прямокутний трикутник ABC (див. рис. 1) та візьмемо довільну точку M на катеті AC. Виразимо двома способами площу трикутника ABM. З одного боку, $S = \frac{1}{2}ma$, де $a = BC$ та $m = AM$. З іншого маємо, що $S = \frac{1}{2}ch$, де $h = MD$ – висота трикутника ABM, c – довжина гіпотенузи первісного прямокутного трикутника. Прирівнявши дві різні формули для площі трикутника ABM отримуємо рівність

$$\frac{a}{c} = \frac{h}{m}.$$

Водночас, ні рівняння прямої, ні, навіть метод координат, не вводиться і не використовується при доведенні головних теорем планіметрії.

Цікаво, що в підручнику [1] взагалі відсутній розділ, присвячений подібності трикутників. Це підтверджує думку про те, що детальне вивчення подібності трикутників потрібне авторам діючих шкільних підручників лише з однією метою – введення тригонометричних функцій. Якщо тригонометричні функції ввести без використання подібності, то це поняття саме по собі не представляє інтересу.

Огляд шкільних підручників

Наведемо огляд шкільних підручників, протягом якого вивчимо такі питання:

1. Чи доводить автор підручника (і якими засобами) узагальнену теорему Фалеса (теорему «Про пропорційні відрізки» – про те, що якщо сторони кута перетнути паралельними прямими, то відрізки на сторонах кута виявляться пропорційними).

2. Яким чином (з використанням узагальненої теореми Фалеса чи ні) автор підручника вводить тригонометричні функції гострого кута.

3. Яким чином (з використанням узагальненої теореми Фалеса чи ні) автор підручника доводить ознаки подібності трикутників.

4. Яким чином (чи використовує подібність трикутників або теорему Фалеса і чи використовує поняття площі трикутника) автор підручника доводить теорему Піфагора.

5. Яким чином (на скільки формально і аксіоматизовано) автор підручника вводить поняття площі «взагалі», площі прямокутника та площі трикутника.

6. Яким чином в підручнику алгебри доводиться той факт, що графік рівняння $y = ax$ для фіксованого a є прямою.

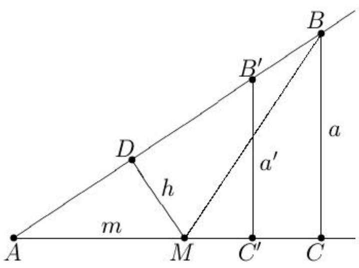
Огляд шкільних підручників геометрії для 8-го класу

Відповіді на описані питання щодо підручника [15] авторів А.Г. Мерзляк, В.Б. Пололонський, М.С. Якір виглядають так. Спершу автор доводить теорему Фалеса (стор. 99). Відразу після неї (стор. 100) дуже акуратно доводить теорему «Про пропорційні відрізки», фактично користуючись граничним переходом, тобто спершу доводить теорему для випадку, коли відношення відрізків є раціональним числом, а потім – у загальному вигляді, правда не використовує явно поняття ірраціонального числа та граничного переходу.

Аналогічним є виклад цими ж авторами питань, котрі нас цікавлять, в їх підручнику [16]. Так само, як і в [15], наведено ідею доведення, котре використовує граничний перехід. Відмінність між викладом в підручнику для загальноосвітніх шкіл зводиться лише до того, що доведення узагальненої теореми Фалеса обмежується випадком, коли відношення відрізків є цілим числом і пропонується розглянути “на математичному гуртку” повне доведення теореми (стор. 78).

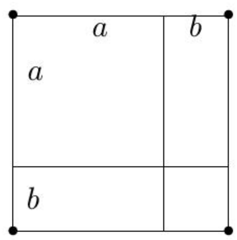
Ознаки подібності трикутників введено з використанням доведеної теореми про пропорційні відрізки. Теорема Піфагора доводиться з використанням подібності трикутників – того, що частини прямокутного трикутника, які утворюються при проведенні його висоти, подібні «великому» прямокутному трикутнику.

Поняття площі в підручнику [15] вводиться аксіоматично (стор. 173) як число, котре ставлять у відповідність кожному многокутнику. Площа многокутника – це додатна величина, яка має перераховані в підручнику властивості (рівні многокутники мають рівні площі, вона адитивна та площа квадрату зі стороною 1 дорівнює 1). Після цього вводиться поняття числове значення площі як результат порівняння того, у скільки разів площа даного многокутника відрізняється від площі одиничного квадрату. Формули для площі квадрату (зі стороною, відмінною від 1) та площі прямокутнику перетворюються в теореми та доводяться з використанням, фактично, граничного переходу.



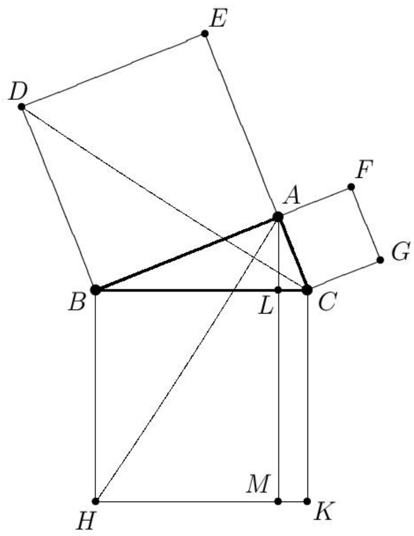
До обгрунтування коректності тригонометричних функцій за Александровим

Рис. 1:



До доведення формули площі прямокутника

Рис. 2:



До доведення теореми Піфагора "за Евклідом"

Рис. 3:

В підручнику [5] авторів М.І. Бурда та Н.А. Тарасенкова, узагальнена теорема Фалеса не доводиться (стор. 88), точніше наводиться схема доведення, котра використовує граничний перехід, і ця схема віднесена до рубрики "Дізнайся більше", тобто знання доведення від учнів фактично не вимагається. Ознаки подібності трикутників (стор. 96-97) автор доводить з використання теореми про пропорційні відрізки. Доведення теореми Піфагора (стор.

164) автор робить шляхом проведення з прямого кута висоти прямокутного трикутника та використанням подібності утворених трикутників. Дивно те, що відразу після доведення теореми Піфагора автор згадує те, що первинно ця теорема була сформульована як рівність суми площ двох квадратів площі третього квадрату та згадує про словосполучення “піфагорові штани” як ілюстрацію доведення теореми Піфагора, втім не наводить доведення цієї теореми з використанням площі. Щодо площі, то спершу постулюється (з припискою “з попередніх класів відомо”), що площа квадрата зі стороною a дорівнює a^2. Після цього доводиться теорема про площу прямокутника з використанням креслення, зображеного на малюнку 2 – прямокутник зі сторонами a та b добудовується до квадрату зі сторонами $a + b$, після цього виходить, що площа прямокутника може бути виражена формулою $S = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$.

В підручнику [2] автора Г.В. Апостолова, узагальнена теорема Фалеса доводиться, використовуючи граничний перехід – сторони кута, перетнутого паралельними прямими, щільно розбиваються великою кількістю паралельних прямих, а потім з аналізу цієї конструкції робляться потрібні висновки. Ознаки подібності трикутників в [2] вводяться з допомогою узагальненої теореми Фалеса (стор. 120). Теорема Піфагора доводиться з допомогою подібності трикутників (стор. 139). Тригонометричні функції гострих кутів вводяться з допомогою подібності трикутників (стор. 161).

В означенні площі фігури в підручнику [2] площа – це число, котре ставиться у відповідність кожній обмеженій фігурі та має властивості (невід’ємна, адитивна, площа квадрату зі стороною 1 дорівнює 1). Написано, що “можна довести”, що площа квадрату зі стороною a дорівнює a^2 (стор. 47). Теорема про площу прямокутника доводиться, використовуючи граничний перехід – спершу доводиться формула для квадрата з натуральними сторонами, потім – з раціональними, а потім – з ірраціональними.

В підручнику [3] авторів Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова, узагальнена теорема Фалеса доводиться лише для випадку, коли відношення відрізків на сторонах кута раціональне число (стор. 73). Далі написано, що “загальніше доведення можна здійснити лише методами вищої математики”. Подібність трикутників вводиться з допомогою узагальненої теореми Фалеса (стор. 80). Цікаво, що подібність прямокутних трикутників в [3] виділено в окремий параграф, але цей параграф іде після вивчення подібності трикутників в загальному випадку, а тому, фактично, параграф присвячений вивченню часткового випадку – підготовці до доведення теореми Піфагора через подібність трикутників, що далі (стор. 177) і робиться. Після доведення теореми Піфагора в підрозділі “для допитливих” (стор. 118) наводиться її доведення з використанням площі – те, яке ми для прикладу наведемо в цій статті. Тригонометричні функції гострих кутів вводяться з допомогою подібності прямокутних трикутників (стор. 190). Площа в підручнику [3] вводиться через площу одиничного квадрату та формула для площі прямокутника доводиться з використанням граничного переходу.

В підручнику [9] авторів А.П. Єршова, В.В. Голобородько, О.Ф. Крижановський та С.В. Єршов, як узагальнена теорема Фалеса, так і площа прямокутника доводиться в “додатках” (стор. 235-238), причому цікаво, що обидві теореми, котрі нас цікавлять, доводяться в одному додатку. Всього додатків два і другий з них – відомості про Золотий переріз. Подібні трикутники вивчаються з допомогою узагальненої теореми Фалеса (стор. 111). В підручнику [9] наявний окремий розділ, присвячений подібності прямокутних трикутників, в якому доводяться “метричні співвідношення в прямокутному трикутнику”, котрі стосуються відрізків трикутника, утворених після проведення висоти з прямого кута. Ці властивості є наслідком теорем про подібність трикутників “загального вигляду”. Виходячи з цих “метричних співвідношень” доводиться теорема Піфагора (стор. 128). Тригонометричні функції гострих кутів вводяться в останньому розділі підручника, використовуючи подібність трикутників.

В підручнику [9] площа вводиться практично без пояснень (не рахуючи додаток). Спершу дається формула для площі прямокутника, а потім — лише як наслідок з неї, формула для площі квадрата (стор. 166).

Підручник [17] автора О.В. Погорєлов виглядає як прототип всіх підручників з геометрії, розглянутих нами в цьому розділі. Зрештою, це і не дивно, адже, навідміну від авторів розглянутих підручників, Олексій Погорєлов — видатний харківський математик, чиї досягнення в геометрії були визнані на найвищому рівні в той час, коли він почав займатися шкільним підручником геометрії.

Для прикладу, підручник [11] автора А.П. Кисельов, за своєю структурою суттєво відрізняється від підручника за редакцією О.В. Погорєлова, втім, так само метод координат не використовується в ньому для доведення важливих теорем. Більше того – в розділі під назвою “Застосування алгебри до розв’язання геометричних задач” розглядаються побудови з циркулем і лінійкою та використання подібності трикутників чи інших методів для того, щоб будувати відрізки, чиї довжини задані формулами через довжини даних відрізків, заданих на малюнку безпосередньо (тобто побудови вигляду $\frac{ab}{c}$, $\sqrt{ab}$, $\sqrt{a^2 \pm b^2}$).

Першим нетривіальним розділом підручника [11] є подібність трикутників. Цей розділ починається з леми про те, що трикутник, котрий відсікається від трикутника прямою, паралельною до його сторони, подібний до вихідного. Така теорема є у підручниках [2, 3, 5, 9, 16], Втім там вона доводиться з допомогою наслідку з теореми Фалеса, котра, в свою чергу, доводиться з допомогою або граничного переходу, або чиє доведення не є повним. Ця Лема в підручнику [11] доводиться шляхом розбиття трикутника на велику кількість "маленьких" трикутників, проведенням багатьох прямих, паралельних "основі" та одній з "бокових сторін" трикутника.

Тригонометричні функції гострого кута вводяться в [11], використовуючи подібність трикутників і розділ, присвячений введенню тригонометричних функцій, є останнім в главі, присвяченій подібним фігурам.

Теорема про формулу площі прямокутника доводиться (стор. 97-100) з використанням, фактично, граничного переходу та означення площі через площу одиничного квадрату.

Теорема Піфагора доводиться в підручнику [11] двічі. Один раз – відразу після введення подібності трикутників (стор. 44-45) і доводиться приблизно так, як в [2, 3, 5, 9, 16]. Втім, після введення поняття площі, зокрема, площі трикутника, теорема Піфагора доводиться вдруге (стор. 106-107) – з допомогою площ і методом, названим "Доведення Евкліда", оскільки саме в такий спосіб теорема Піфагора доводиться в першій книзі його Начал [7, стор. 58] (книга 1, твердження 47). Наведемо це доведення.

Нехай маємо довільний трикутник ABC з прямим кутом A. Розглянемо квадрати $BDEA$, $AFGC$ та $BCKH$, побудовані як на малюнку 3. Проведемо пряму AM перпендикулярну до BC. Тоді квадрат $BCKH$ поділиться на два прямокутники. Доведемо, що площа прямокутника $BLMH$ та квадрату $BDEA$ збігаються, а площа прямокутника $LCKM$ дорівнює площі квадрату $AFGC$.

Проведемо допоміжні відрізки DC та AH. Розглянемо трикутники DCB та ABH. Площа трикутника DCB дорівнює половині площі квадрату $BDEA$, оскільки площу цього трикутника можна записати як півдобуток відрізка BD (як основи трикутника) та AB (як висоти трикутника, проведеної до основи BD). Аналогічно, площа трикутника DCB дорівнює половині площі прямокутника $BLMH$.

З іншого боку, трикутники ABH та BDC рівні, оскільки $BD = DA$ та $BC = BH$ і $\angle DBC = \angle BDC$, оскільки кожен з цих кутів отримується додаванням прямого кута до кута $\angle CBA$. Таким чином, з рівності зазначених трикутників та міркувань про їх площу маємо, що площа квадрата $BDEA$

дорівнює площі прямокутника $BLMH$.

Рівність площ квадрату $AFGC$ та прямокутника $LCKM$ доводиться аналогічно.

Огляд шкільних підручників алгебри для 7-го класу

Наведемо огляд останнього - шостого з поставлених нами питань з приводу підручників, котрі зараз використовуються в навчальному процесі в Україні – про те, яким чином в підручнику алгебри доводиться той факт, що графік рівняння $y = ax$ для фіксованого a є прямою.

Розмаїття підходів в підручниках алгебри, які нам довелося опрацювати, набагато вужча, ніж підручників геометрії для 8-го класу.

Так, в усіх чотирьох підручниках [4, 10, 13, 14] є розділ, присвячений функціям, підрозділ, присвячений графікам функцій та, після нього – розділ, що стосується лінійних функцій та їх графіків. Означення лінійної функції майже дослівно однакове і виглядає приблизно так : Функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де k і b — деякі числа, а x — незалежна змінна, називають лінійною.

В підручнику [14] колективу авторів А.Г. Мерзляк, Б.В. Полонський та М.С. Якір, на стор. 179 написано: "у старших класах ви доведете, що графік лінійної функції, область визначення якої – всі дійсні числа, є пряма". Після цього, фактично на прикладах, показано, як нахил прямої, що є графіком функції вигляду $y = ax$, залежить від a.

В підручнику [10] написано (стор. 145): "У старших класах ви переконаєтеся, що графіком лінійної функції є пряма".

У підручнику [4] авторів Бевз Г.П. та Бевз В.Г. відразу після означення лінійної функції накреслено графіки двох лінійних функцій і написано, що ці приклади можна узагальнити, сформулювавши правило: "Графік кожної лінійної функції – пряма. І кожна пряма на координатній площині, не перпендикулярна до осі абсцис, – графік деякої лінійної функції".

В підручнику [13] авторів В. Кравчук та Г. Янченко твердження про те, що графік лінійної функції є прямою, не формулюється явним чином в жодній формі – розглядається деяка кількість прикладів, на кожному з яких будується пряма. Потім вводиться поняття кутового коефіцієнту прямої (лінійної функції), окремим випадком розглядається функція $y = kx$ та без доведення "отримується" залежність чвертей координатної площини, в яких знаходиться графік, від знаку k (стор. 147).

Теорема Піфагора

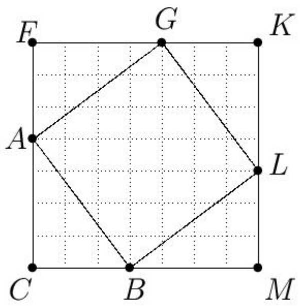
Як ми бачили, доведення теореми Піфагора з допомогою площ трикутників відоме з часів давньої Греції і один з варіантів доведення наведено навіть в “Началах” Евкліда. По-при те, що в багатьох сучасних підручниках геометрії поняття площі вводиться складно, і навіть формула площі квадрата на думку деяких авторів потребує, фактично, використання граничного переходу. Втім, навіть в підручниках, виданих в 20-му столітті (наприкл. [1, 3, 11]), можна знайти доведення теореми Піфагора з допомогою площі трикутників.

Таким чином, можливість доведення теореми Піфагора з використанням поняття площі, чи відмова від цього доведення – справа традиції та уподобань конкретних авторів підручників, а зовсім не справа припустимості такого доведення самого по собі.

Наведемо один з варіантів доведення теореми Піфагора, котре використовує поняття площі прямокутника трикутника і взяте з [3, стор. 118]. Цей спосіб доведення теореми Піфагора кращий за метод доведення, поданий в Началах Евкліда.

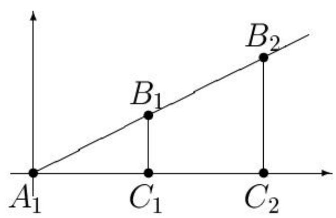
Розглянемо прямокутний трикутник ABC з прямим кутом C (див. рис. 4). На променях CA та CB відкладемо точки F та M так, щоб відрізки CF та CM дорівнювали сумі катетів трикутника ABC.

Розглянемо квадрат $CFKM$, та на його сторонах візьмемо точки G та L так, щоб $FG = KL = AB$. Тоді утворені чотири трикутники будуть рівними, а чотирикутник $AGLB$ буде квадратом.



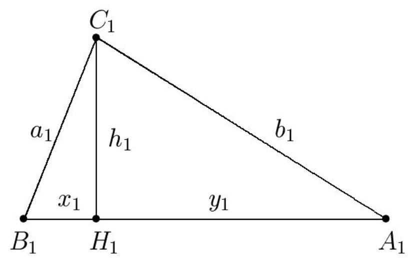
До доведення теореми Піфагора “через площі”

Рис. 4:



До введення тригонометричних функцій

Рис. 5:



До обгрунтування подібності трикутників

Рис. 6:

Теорему Піфагора отримаємо, якщо віднімемо від площі “великого” квадрата площі чотирьох прямокутних трикутників.

Легко бачити, що наведене доведення теореми Піфагора набагато простіше за те, що є в “Началах” Евкліда. Це, найімовірніше, пояснюється тим, що давні Греки не вважали коректними операції з довжинами відрізків так, як це робимо ми, сучасні європейці, користуючись не лише Грецькою традицією, але і традицією середньовічних арабів, розвинутою пізніше Франсуа Вієтом на його послідовниками.

Поняття площі

По-при те, що доведення теореми Піфагора відоме ще з "Начал" Евкліда, уявлення про математичну строгість суттєво змінилися після відкриття диференціального числення та, головне – пізніше, після відкриття геометрії Лобачевського.

Ця зміна уявлень про математичну строгість полягає в тому, що деякі з тверджень, котрі вважалися очевидними для Евкліда, в 20-му – 21-му століттях вже вважаються такими, що потребують або обгрунтування, або аксіоматизації, або зауваження на зразок того, що "це твердження ми не будемо доводити, а воно буде доведено в більш старших класах, на гуртках, і т.д.". Тобто в будь-якому разі, навіть в разі, коли автор підручника в 20-21 столітті формулює деяке очевидне для давнього грека (Евкліда) твердження, він повинен робити зауваження про неочевидність цього твердження, а потім "викручуватися" на власний розсуд.

Для доведення теореми Піфагора нам потрібне не стільки поняття площі многокутника, як поняття про площу прямокутного трикутника. З формули для площі прямокутного трикутника легко можна отримати формулу для площі непрямокутного трикутника як півдобуток сторони на висоту, проведену до неї. В такому разі, для трикутника зі сторонами a, b, c та проведеними до них висотами h_a, h_b, h_c маємо рівності

$$ah_a = bh_b = ch_c.$$

Фактично, наявність поняття площі дозволяє зробити висновок, що перераховані рівності відношення відрізків правильні, оскільки кожне з них відношень дорівнює подвоєній площі трикутника.

Якщо стати на позицію, що відсилання до поняття площі при доведенні таких рівностей є неприпустимим, тобто "не переконливим", то це означає, що дещо, стосовне поняття площі, має бути доведеним. Цим "дечим" може бути лише формула для площі прямокутника як така, якою обгрунтовується формула для площі трикутника.

Якщо акцентувати увагу на потребі доводити формулу для площі прямокутника, то пропонуємо взяти за аксіому те, що площа квадрата за стороною 1 дорівнює 1, після чого довести, що площа квадрата зі стороною a дорівнює a^2. Після цього довести формулу для площі прямокутника так, як це зроблено в підручнику [5] (див вище мал.2). Звісно, ми вважаємо недоцільним доведення з використанням граничного переходу формули для площі прямокутника після того, як граничний перехід вже було використано для доведення формули для площі квадрата.

Додатково зауважимо, що доведення площі прямокутника як таке, потреба якого виникає з нетривіальних формул, що мають бути правильні для будь-якого трикутника, може бути ілюстрацією геометричних міркувань, коли, на перший погляд, неочевидний факт (з рівностями добутків відрізків у трикутнику) доводиться простими міркуваннями як наслідок очевидних припущень (про те, що поняття площі може бути використане в математиці і про те, що площа квадрату дорівнює квадрату його сторони).

Рівняння прямої

За існуючими програмами з математики, з рівнянням прямої, так само як з прямокутною системою координат, учні знайомляться в 7-му класі – в той рік, коли починають вивчати геометрію, котра, в свою чергу починається з аксіоматики, яка в кінцевому рахунку, походить від Евкліда. Питання про те, чому множина точок декартової площини, які задовольняють рівняння $y = ax$, де $a = const$ є прямою не доводиться взагалі – на момент вивчення цього рівняння учні ще не готові розуміти доведення геометричних фактів та усвідомлювати доведеність, чи недоведеність конкретної, фактично, теореми.

Питання про те, чому графіком конкретного рівняння, наприклад, $y = 3x$ є пряма, більшість авторів українських підручників не доводять, а “пояснюють”. При цьому “пояснення” виглядає приблизно так (див. огляд підручників 7 класу з алгебри, поданий вище): розглянемо точку з координатами $(0, 0)$. Вона належить графіку. Розглянемо, наприклад, точки з координатами $(1, 3)$, $(2, 6)$, $(-1, -3)$, $(-2, -6)$. Всі вони є точками шуканого графіку. Нанесемо ці точки на координатну площину, прикладемо лінійку та побачимо, що всі вони лежать на одній прямій. Так от, якщо взяти точку з координатами $(x, 3x)$ для довільного іншого числа, то вона опиниться на цій саме прямій.

Можливо, не всі вчителі усвідомлюють, що той факт, що графік функції $y = 3x$ є прямою – це теорема, і її потрібно не “пояснювати”, а або оголошувати аксіомою (що доволі дивно), або формально доводити, або, принаймні самому собі пояснювати, чому цей факт не доводиться. Втім, те, що вказаний факт є саме теоремою, сподіваємося, добре розуміють автори підручників з алгебри та геометрії, рекомендованих в різні роки міністерством освіти (в різних варіантах його назви) для використання в навчальному процесі. Тому в підручниках геометрії в перші два роки (7-8 класи) вивчення геометрії метод координат не використовується, а в 9-му класі цьому методу присвячено рівно один параграф, після чого до нього автори не повертаються.

Для доведення того, що зазначений графік дійсно є прямою, потрібно формалізувати поняття прямої – зробити те, чого не робиться в діючих підручниках геометрії. Нам буде достатньо такого означення.

Різні точки A, B та C **лежать на прямій**, якщо виконується одна з трьох рівностей:

1. $AB+BC=AC$;
2. $AC+BC=AB$;
3. $BA+AC=BC$.

Після цього **пряма** – це нескінченна в обидва боки фігура без розривів, кожні три точки якої є такими, що лежать на одній прямій. Звісно, словосполучення "без розривів" в цьому "означенні" приховує в собі граничний перехід (бо якщо будемо за двома точками будувати середини відрізів та нові "краї" за кінцем відрізку і його серединою, то отримаємо лише зліченну, хоч і щільну, множину точок прямої). Втім, цей граничний перехід набагато зрозуміліший школярам, ніж доведення узагальненої теореми Фалеса в тих підручниках, де ця теорема строго доводиться.

Зауважимо, що наслідком теореми Піфагора є формула для довжини відрізка, кінці якого задані декартовими координатами. Візьмемо довільні три точки $A(x_1, ax_1)$, $B(x_2, ax_2)$ та $C(x_3, ax_3)$ графіку рівняння $y=ax$. Не обмежуючи загальності міркувань, можемо вважати, що $x_1<x_2<x_3$. Тоді рівність $AB+BC=AC$ є тривіальним наслідком формули довжини відрізку.

Тригонометричні функції гострих кутів

Нехай маємо два прямокутні трикутники $A_1B_1C_1$ та $A_2B_2C_2$ з прямими кутами $\angle C_1=\angle C_2=90^0$ та такі, що $\angle A_1=\angle A_2$.

Сумістимо точки A_1 та A_2 цих трикутників та зробимо так, щоб точки C_1 та C_2 лежали на одному промені. Введемо декартову систему координат з початком в точці $A=A_1$ віссю абсцис, направленою вздовж сторони A_1C_1 та такою, щоб точки B_1 та B_2 опинилися в першій чверті.

В цьому разі промені AB та A_1B_1 збігатимуться. Пряма, котра їх міститиме, матиме рівняння $y=ax$, де число a залежить від величини кута $\angle A=\angle A_1$.

Рисунок 5 виконано для випадку, коли $A_1C_1<A_2C_2$. Нехай $A_1C_1=x_1$ та $A_2C_2=x_2$. Тоді можемо знайти координати точок наших двох трикутників, отримавши таке: $A_1(0, 0)$, $A_2(0, 0)$, $B_1(x_1, ax_1)$, $B_2(x_2, ax_2)$, $C_1(x_1, 0)$ та

$C_2(x_2, 0)$.

З формули для довжини відрізка отримуємо довжини сторін трикутників, а саме $A_1C_1 = x_1$, $A_2C_2 = x_2$, $B_1C_1 = ax_1$, $B_2C_2 = ax_2$, $A_1B_1 = x_1\sqrt{1+a^2}$ та $A_2B_2 = x_2\sqrt{1+a^2}$.

Враховуючи отримані формули для довжин сторін трикутників, рівності відношень, котрі необхідні для введення тригонометричних функцій, є очевидними.

Подібність прямокутних трикутників

Після введення системи координат та обґрунтувавши коректність використання рівняння прямої, ознаки подібності трикутників виявляються тривіальними твердженнями, котрі випливають з методу координат. Наведемо ці твердження.

Нагадаємо, що трикутники називаються подібними, якщо їх відповідні кути рівні, а відповідні сторони пропорційні.

Сформулюємо ознаки подібності прямокутних трикутників.

1. За двома кутами (якщо два відповідні кути прямокутних трикутників рівні, то ці трикутники подібні);
2. За двома відповідно пропорційними сторонами (якщо дві сторони одного прямокутного трикутника пропорційні двом відповідним сторонам іншого прямокутного трикутника, то ці прямокутні трикутними подібні).

Перша зі сформульованих ознак подібності прямокутних трикутників випливає з міркувань, цілком аналогічних до введення тригонометричних функцій. Потрібно ввести систему координат, сумістивши два рівні гострі кути в початку координат, розмістивши прямі кути на одній з осей координат та сумістивши гіпотенузи на одному промені, що виходить з початку координат. Після цього пропорційність відповідних сторін прямокутних трикутників буде випливати з формули довжини відрізка та рівняння прямої, яка проходить через початок координат.

Друга ознака подібності прямокутних трикутників доводиться аналогічно. Нехай у трикутників $A_1B_1C_1$ та $A_2B_2C_2$ сторони пропорційні та кути $\angle C_1$ та $\angle C_2$ прямі. Так само, як і раніше, сумістимо вершини A_1 та A_2, розмістимо вершини C_1 та C_2 на осі координат, а точки B_1 та B_2 розмістимо в першій чверті. Нехай рівняння прямої A_1B_1 буде $y = ax$, а рівняння прямої A_2B_2 буде $y = bx$. Втім,

$$a = \frac{B_1C_1}{A_1C_1} = \frac{B_2C_2}{A_2C_2} = b,$$

звідки маємо рівність всіх відповідних кутів наших трикутників.

Подібність трикутників загального вигляду

Питання про подібність трикутників "загального вигляду", тобто таких, про які не дано, що вони є прямокутними, пропонуємо зводити до подібності прямокутних трикутників.

Наведемо ідею доведення ознак подібності трикутників "загального вигляду".

Подібність за трьома кутами. Нехай про трикутники $A_1B_1C_1$ та $A_2B_2C_2$ відомо, що їх відповіді кути рівні. Доведемо пропорційність сторін цих трикутників.

Опустимо висоту найбільшого кута кожного з цих трикутників (див. рис. 6). Будемо вважати, що найбільший кут – це кут $\angle C_1 = \angle C_2$. Те, що кут є найбільшим означає, що основа висоти буде лежати на стороні трикутника, а не на її продовженні.

З подібності прямокутних трикутників за трьома кутами маємо, що $\triangle B_1C_1H_1 \sim \triangle B_2C_2H_2$ та $\triangle A_1C_1H_1 \sim \triangle A_2C_2H_2$, звідки

$$\underbrace{\frac{a_1}{a_2} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{h_1}{h_2}}_{\triangle B_1C_1H_1 \sim \triangle B_2C_2H_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Тому $x_1 = \frac{h_1x_2}{h_2}$ та $y_1 = \frac{h_1y_2}{h_2}$, звідки $\frac{x_1+y_1}{x_2+y_2} = \frac{h_1}{h_2}$, що означає, що відповідні сторони трикутників $A_1B_1C_1$ та $A_2B_2C_2$ пропорційні.

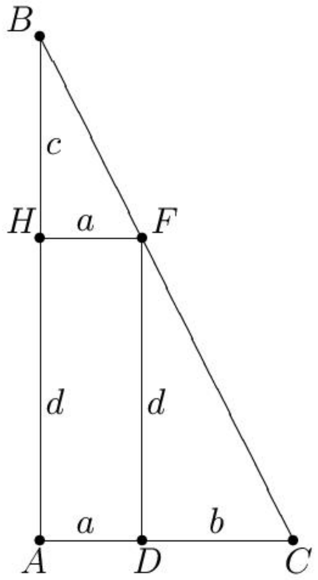
Подібність за кутом та двома пропорційними сторонами. Нехай про трикутники $A_1B_1C_1$ та $A_2B_2C_2$ відомо, що $\angle B_1 = \angle B_2$ та що сторони кута B_1 пропорційні відповідно сторонам кута B_2. Опустимо висоту з вершини C_1 та C_2 відповідних трикутників на протилежну сторону чи її продовження.

Трикутники $\triangle B_1C_1H_1 \sim \triangle B_2C_2H_2$ подібні за трьома кутами. Звідси, та з пропорційності сторін кутів B_1 та B_2 вихідних трикутників, отримуємо такі рівності:

$$\begin{cases} \dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{a_1}{a_2}, \\ \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{x_1 + y_1}{x_2 + y_2}. \end{cases}$$

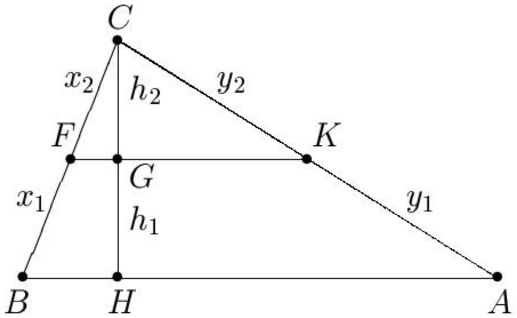
З цих рівностей маємо, що катети трикутників $C_1H_1A_1$ та $C_2H_2A_2$ пропорційні, що означає, що ці трикутники подібні.

З подібності відповідних пар прямокутних трикутників маємо, що відповідні кути трикутників $A_1B_1C_1$ та $A_2B_2C_2$ рівні і трикутники подібні за попередньою ознакою.



а) До доведення часткового випадку узагальненої теореми Фалеса

Рис. 7:



б) До доведення узагальненої теореми Фалеса для загального випадку

Рис. 8:

Подібність за пропорційними сторонами. Нехай у трикутників $A_1B_1C_1$ та $A_2B_2C_2$ відповідні сторони пропорційні. Доведемо, що відповідні кути цих трикутників рівні.

Побудуємо трикутник $\widetilde{A}_2\widetilde{B}_2\widetilde{C}_2$, який буде подібним до трикутника $A_1B_1C_1$ з одного боку подібним до трикутника $A_1B_1C_1$, а з іншого – рівним трикутнику $A_2B_2C_2$.

Для цього візьмемо довільні точки $\widetilde{A}_2$ та $\widetilde{B}_2$, такі щоб $\widetilde{A}_2\widetilde{B}_2 = A_2B_2$ та відкладемо в одні півплощину від прямої $\widetilde{A}_2\widetilde{B}_2$ промені під кутами $\angle A_1$ та $\angle B_1$. Отримаємо точку перетину, котру позначимо $\widetilde{C}_2$.

Трикутник $\widetilde{A}_2\widetilde{B}_2\widetilde{C}_2$ подібний трикутнику $A_1B_1C_1$ за трьома кутами, звідки маємо, що відповідні сторони цих трикутників пропорційні. З іншого боку, трикутники $\widetilde{A}_2\widetilde{B}_2\widetilde{C}_2$ та $A_2B_2C_2$ рівні за трьома сторонами, оскільки $\widetilde{A}_2\widetilde{B}_2 = A_2B_2$ за побудовою і відповідні сторони цих трикутників пропорційні сторонами трикутника $A_1B_1C_1$.

Доведення узагальненої теореми Фалеса

Покажемо як, користуючись лише теоремою Піфагора, можна довести узагальнену теорему Фалеса.

Використаємо рис. 7, де малими латинськими буквами a, b, c, d позначено, відповідно, відрізки $AD = HF$, DC, HB та $AH = DF$. Почнемо з випадку, коли прямі BA та FD, які перетинають сторони кута $\angle BCA$, перпендикулярні до однієї з його сторін, на малюнку – до сторони AC.

Якщо, користуючись теоремою Піфагора, виразимо через катети FC з прямокутного трикутника DFC, FB з прямокутного трикутника HFB та BC з прямокутного трикутника ABC, то рівність

$$FC + FB = BC$$

може бути переписана як

$$\sqrt{d^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{(a + b)^2 + (d + c)^2}.$$

Після очевидних спрощень ця рівність набуває вигляду $(ad - bc)^2 = 0$.

Отримана рівність, очевидно, після повторного застосування теореми Піфагора, рівносильна узагальненій теоремі Фалеса:

$$\frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{a} = \frac{\sqrt{b^2 + d^2}}{b}.$$

Доведення узагальненої теореми Фалеса без припущення про те, що паралельні прямі перетинають одну зі сторін кута під прямими кутами.

Скористаємося позначеннями, як на малюнку 8, котрий накреслений для випадку, коли перпендикуляр з вершини кута до прямих, що його перетинають, знаходиться всередині кута. Для випадку, коли не це так, доведення цілком аналогічне.

Застосувавши узагальнену теорему Фалеса до кута BCH та до кута HCA маємо рівності:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{y_2}{y_1},$$

котрі і є формулюванням теореми узагальненої Фалеса.

Висновки

В огляді підручників математики за 7-8 класи загальноосвітніх шкіл ми дійшли до висновку, що виклад алгебри в 7-му класі та геометрії у 8-му містить ряд важливих теорем, котрі не доводяться. Так, в курсі алгебри за 7 клас відсутнє доведення того, що графіком лінійної функції є пряма, а в геометрії 8-го класу на належному рівні строгості на доводиться узагальнена теорема Фалеса при тому, що вона є основою для доведення теореми Піфагора, обгрунтування подібності трикутників та введення тригонометричних функцій гострих кутів.

Причиною такого стану речей, як ми побачили, є те, що автори шкільних підручників математики, включаючи таких «класиків» як А.М. Колмогоров, П.С. Александров, О.В. Погорєлов з одного боку не могли замовчати метод координат як такий, що потягом століть отримав світове визнання, а з іншого — не вважали за потрібне використовувати цей метод у всій його повноті і на всю його потужність. Через це метод координат в радянських, а пізніше — сучасних українських підручниках використовують винятково як засіб ілюструвати «чисто геометричні» міркування.

Ми намагалися переконати читачів в тому, що використання методу координат для введення ключових фактів шкільної геометрії робить її на багато простішою для інтуїтивного розуміння. Втім, для цілковитого усвідомлення цього необхідна також цілковита переробка шкільного курсу алгебри та геометрії в частині послідовності тих понять і тверджень, яких стосується наша робота – площа, теорема Піфагора, рівняння прямої, подібність.

Література

1. *Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжкин В.И.*, Геометрия, уч. пособие для 8 кл. с углубл. изучением математики – Москва, Просвещение, 2002, 240 с.
2. *Апостолова Г.В.* Геометрія 8: дворівн. підручн. для загальноосвіт. навч. закл. — Київ, Генеза, 272 с., 2008 р.
3. *Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г.*, Геометрія: Підручник для 8 кл. середніх загальноосвітніх закладів. — Київ, Вежа, 256 с., 2008 р.
4. *Бевз Г.П., Бевз В.Г.*, Алгебра: Підр. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. — Київ, Зодіак-Еко, 301 с., 2007 р.
5. *Бурда М.І., Тарасенкова Н.А.*, Геометрія: Підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. — Київ, Освіта, 240 с., 2011 р.
6. *Вернер А.Л., Александров А.Д.* Школьный курс геометрии. // Математические структуры и моделирование. 2012. вып. 25., с. 18–38.
7. «Начала» Евклида, книги 1–4, — гос. изд.-во техн.-теорет. литер.-ры., Москва-Ленинград, 448с., 1950 г.
8. А. Ейнштейн, Творческая автобиография – в сборнике «Физика и реальность», — Москва, Наука, 1954 г., 360 с.
9. *Єршов С.В., Єршова А.П., Голобородько В.В., Крижановський О.Ф.*, Геометрія 8 клас, Підруч. для загальноосвіт. навч. закл. — Харків, Веста, 256 с., 2011 р.
10. *Істер О.С.*, Алгебра: Підруч. для 7 кл., загальноосвіт. навч. закл. — Київ, Освіта, 223 с., 2007 р.
11. *Киселёв А.П.*, Геометрия, Учебник для 9 класса, — Киев, Радянська школа, 196 с., 1963 р.

12. *Колмогоров А.Н.*, Новые программы и некоторые основные вопросы усовершенствования курса математики в средней школе // Математика в школе. 1967. № 2. С. 4–13.
13. *Кравчук В., Янченко Г.*, Алгебра. Підр. для 7 кл. — Тернопіль, ред. газети «Підручники та посібники» 240 с., 2007 р.
14. *Мерзляк А.Г., Пололонський В.Б., Якір М.С.*, Алгебра: Підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів. — Харків, Гімназія, 287 с., 2008 р.
15. *Мерзляк А.Г., Пололонський В.Б., Якір М.С.*, Геометрія: Підруч. для 8 кл. з поглибл. вивченням математики. — Харків, Гімназія, 208 с., 2008 р.
16. *Мерзляк А.Г., Пололонський В.Б., Якір М.С.*, Геометрія: Підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів. — Харків, Гімназія, 208 с., 2009 р.
17. *Погорєлов О.В.*, Геометрія. Підручник для 7-9 кл. серед. шк. — Київ, Освіта, 223 с., 1998 р.

Plakhotnyk Makar
Departamento de Matemática de Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil.

On the expediency of studying of Thales' Theorem in the schol course of Geometry

We claim that the proper use of the Cartesian method admits to simplify a lot as understanding of the naturalness, as the details of the proof of the important statements, which in nowadays approach use the Thale's Theorem: Pythagorean rule, trigonometric functions of the acute angle, and similarity of triangles.

Keywords: *Pythagorean rule, Thale's Theorem, Cartesian method, similarity of triangles.*
