УДК 37.091.26

Кадубовський О.А., Беседін Б.Б., Сторожилова Н.В.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[3] *учитель математики та інформатики, Артемівська загальноосвітня школа №12*

e-mail: kadubovs@ukr.net, besedin_boris@ukr.net, inmylifes@mail.ru

ДО ПИТАННЯ ПРО ЗАСТОСУВАННЯ АЛГОРИТМІЧНОГО ПІДХОДУ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ РАЦІОНАЛЬНИХ НЕРІВНОСТЕЙ МЕТОДОМ ІНТЕРВАЛІВ

В статті висвітлюється авторський досвід навчання способам розв'язування дробово-раціональних нерівностей на уроках математики в ЗОШ та під час формування необхідних компетентностей в процесі підготовки студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ та підвищення кваліфікації вчителів математики. Наведено по-кроковий алгоритм, ілюстративний приклад з деталізованими поясненнями та методичні поради щодо дидактичного забезпечення в процесі оволодіння запропонованим підходом.

Ключові слова: *дробово-раціональні нерівності, методи розв'язання, алгоритмічний підхід, метод інтервалів.*

Вступ

Змістова лінія «Нерівності» є невід'ємною складовою шкільного курсу алгебри та початків аналізу. Традиційно, «легко засвоюваними» для учнів нерівностями є *раціональні нерівності*, зокрема лінійні та квадратні, розв'язування яких **методом інтервалів** в достатній мірі висвітлено як в діючих підручниках (напр., [1]–[3]), так і численних навчально-методичних статтях (напр., [4, 5], [12]–[14], [21]) й посібниках (напр., [6]–[11], [15]–[19], [22]–[26]).

Однак, власний досвід роботи з учнями та студентами свідчить про те, що останнім часом певна частина учнів (та й студентів) припускає багато помилок під час розв'язування нерівностей, зокрема при застосуванні методу інтервалів. Останнє підтверджує й сумна статистика (останніх років) щодо результатів виконання учнями відповідних завдань під час ДПА та ЗНО.

Крім того, непоодинокими є випадки, коли навіть сумлінний учень (студент), розв'язуючи квадратну нерівність у графічний спосіб («за допомогою параболи»), усвідомлює його як єдиний можливий.

Звісно ж, що такий стан справ не може не викликати занепокоєння.

На нашу думку, причини сумної статистики (щодо розв'язування раціональних нерівностей методом інтервалів) можуть бути пов'язані з наступним:

по-перше — зі *значними обсягами роботи при виконанні підготовчих необхідних кроків та традиційними помилками через неуважність під час визначення і відбору шуканих проміжків розв'язку нерівності.*

по-друге — *за лаштунками традиційного алгоритму до методу інтервалів залишаються перетворення над самою нерівністю.* І як наслідок — неусвідомлення учнями (студентами) суті та змісту (необхідних) виконуваних перетворень. Зокрема, виконуючи послідовність перетворень над нерівністю, далеко не завжди очевидним для багатьох є момент втрати розв'язку чи, навпаки, виникнення зайвого.

по-третє — *незнання та/або ж нерозуміння теоретичних основ* «методу інтервалів» розв'язування нерівностей, з якими можна ознайомитися, наприклад, в [18]. (Маємо на увазі властивість неперервної функції зберігати знак на проміжку між сусідніми її нулями).

Оскільки при атестації та тестуванні важливим фактором є час, витрачений учнем на виконання завдань, то природно й доцільно було би опанувати ті прийоми, які б дозволили цей час заощадити. При розв'язуванні нерівностей методом інтервалів й з'являється можливість значно скоротити час за рахунок того, що знаходження-визначення знаків функції на кожному з одержаних інтервалів можна здійснити майже автоматично.

Ще одним аргументом (на нашу думку — найбільш значущим з усіх)

$\surd$ на користь особливого статусу теми «дробово-раціональні нерівності» та

$\surd$ на користь вибору саме методу інтервалів при їх розв'язуванні

є, так званий, *узагальнений метод інтервалів розв'язування нерівностей*, який дозволяє за допомогою *методу заміни множників* «звести» майже будь-яку нерівність зі шкільного курсу математики (за винятком, можливо, тригонометричних) до розв'язування відповідної дробово-раціональної нерівності.

Маємо своїм приємним обов'язком відзначити та повідомити, що зазначений *метод заміни множників*, як один з ефективних способів розв'язування цілого класу нерівностей (шкільного курсу математики), було фундаментально і достатньо детально описано В.І. Голубєвим та В.І. Тарасовим ще у 1992 р. в роботі [9], та пізніше у 2007 р. в роботах [10], [18], [27] та інших. Проте мусимо визнати й прикро констатувати, що для більшості учнів та вчителів цей метод залишається невідомим.

Метою ж самої статті є виклад основних методичних рекомендацій щодо опанування методом інтервалів розв'язання раціональних нерівностей.

Вирішенню, принаймні частково, зазначених проблем й присвячено дану статтю, яку можна вважати логічним продовженням матеріалу (самого деталізованого алгоритму), наведеного в [20] (С. 38–41).

Маючи на меті саме цілісний виклад матеріалу, який допоможе при комплексній підготовці випускників до ДПА та ЗНО, в першій та другій частині статті авторами цілком свідомо наведено «загальновідомий теоретичний мінімум», засвоєння та розуміння суті якого є необхідною складовою при формуванні не лише відповідних навичок, а й компетенцій взагалі.

1. Основні поняття та визначення

1. Якщо два раціональні вирази зі змінною сполучити одним із знаків «$>$», «$<$», «$\geqslant$», «$\leqslant$», то одержуємо нерівність зі змінною. У загальному вигляді нерівність з однією змінною x (наприклад, для випадку «більше») записують так: $f(x) > g(x)$.

2. Розв'язком нерівності з однією змінною називають таке значення змінної, яке перетворює її в правильну числову нерівність. Усі розв'язки нерівності утворюють множину розв'язків нерівності.

3. Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки, або ж довести, що їх не існує. Якщо нерівність розв'язків не має, то прийнято говорити, що множиною її розв'язків є порожня множина ($\emptyset$). Тому розв'язати нерівність означає знайти множину її розв'язків.

4. Областю допустимих значень (або ж коротко, ОДЗ) змінної нерівності називають спільну область визначення для всіх функцій, що стоять у лівій і правій частинах нерівності.

5. Нерівності називають рівносильними (або ж *еквівалентними*), якщо множини їх розв'язків рівні (співпадають).

6. Якщо множина розв'язків першої нерівності є підмножиною множини розв'язків другої нерівності, то другу називають наслідком першої нерівності.

7. Нехай $\vee$ — один зі знаків нерівності: «$<$», «$\leqslant$», «$>$», «$\geqslant$», а $\wedge$ — (суть) обернений до $\vee$ знак (тобто, «$>$», «$\geqslant$», «$<$», «$\leqslant$» відповідно), а $c = const$. Тоді мають місце наступні рівносильні перетворення

1. $f(x) \vee g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \vee 0$;
2. $f(x) \vee g(x) \Leftrightarrow (f(x))^{2n-1} \vee (g(x))^{2n-1}$ для будь-якого натурального n;
3. $f(x) \vee g(x) \Leftrightarrow f(x) + c \vee g(x) + c$;
4. $f(x) \vee g(x) \Leftrightarrow c \cdot f(x) \vee c \cdot g(x)$, якщо $c > 0$;
5. $f(x) \vee g(x) \Leftrightarrow c \cdot f(x) \wedge c \cdot g(x)$, якщо $c < 0$.

8. У практичному застосуванні найбільш дієвими при виконанні перетворень є наступні теореми

Теорема 1. *Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на один і той самий вираз, що визначений і є додатним на ОДЗ змінної (для заданої нерівності), не змінюючи знака нерівності, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої нерівності).*

Теорема 2. *Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на один і той самий вираз, що визначений і є від'ємним на ОДЗ змінної (для заданої нерівності) і змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої нерівності).*

9. Якщо крім змінної та числових коефіцієнтів до запису нерівності входять також буквені коефіцієнти — **параметри**, то при розв'язуванні можна користуватися таким орієнтиром.

«Будь-яку нерівність з параметрами можна розв'язувати як звичайну нерівність до тих пір, поки всі перетворення або міркування, необхідні для розв'язування, можна виконати однозначно. Якщо якесь перетворення не можна виконати однозначно, то розв'язування необхідно розбити на кілька випадків, щоб у кожному з них відповідь через параметри записувалася однозначно.» Причому слід пам'ятати, що відповідь треба записати для всіх можливих значень параметра.

10. Нагадаємо, що дробово-раціональною (або ж, коротко, раціональною) нерівністю називають нерівність, яку можна привести до нерівності виду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \vee 0, \tag{1}$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени з дійсними коефіцієнтами.

11. Многочлен виду

$$P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x^1 + a_0, \tag{2}$$

де $a_i \in R$, $a_n \neq 0$, $n \in N$ називають многочленом n-го степеня, а числовий множник a_n — коефіцієнтом при старшому члені x^n многочлена $P_n(x)$.

12. Многочлен з дійсними коефіцієнтами називають незвідним, якщо його не можна розкласти у добуток многочленів менших степенів з дійсними коефіцієнтами.

Добре відомо (див., напр., [333]), що **незвідними многочленами з дійсними коефіцієнтами** можуть бути лише:

1) **лінійні** (1-го степеня) **двочлени** $ax + b$ та

2) **квадратичні** (2-го степеня) **тричлени** $ax^2 + bx + c$ **з від'ємним дискримінантом** $D = b^2 - 4ac$, зокрема виду $ax^2 + c$, для яких $a \cdot c > 0$.

2. Основна частина

Традиційний підхід до розв'язування нерівностей виду (1) полягає у розгляді рівносильної конструкції, а саме

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \Leftrightarrow P(x)\cdot Q(x) < 0; \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)\cdot Q(x) \leqslant 0 \\ Q(x) \neq 0; \end{cases} \tag{3}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x)\cdot Q(x) > 0; \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)\cdot Q(x) \geqslant 0 \\ Q(x) \neq 0. \end{cases} \tag{4}$$

Слід зазначити, що при розв'язуванні нерівностей виду $P(x)\cdot Q(x) \vee 0$ можна використовувати рівносильні конструкції

$$P(x)\cdot Q(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} P(x) > 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) < 0; \end{cases} \end{array}\right. \qquad P(x)\cdot Q(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} P(x) \geqslant 0 \\ Q(x) \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} P(x) \leqslant 0 \\ Q(x) \leqslant 0; \end{cases} \end{array}\right. \tag{5}$$

$$P(x)\cdot Q(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} P(x) > 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) > 0; \end{cases} \end{array}\right. \qquad P(x)\cdot Q(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} P(x) \geqslant 0 \\ Q(x) \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} P(x) \leqslant 0 \\ Q(x) \geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right. \tag{6}$$

Для розв'язування нерівностей виду $P(x) \vee 0$ доцільно використовувати метод інтервалів, традиційний алгоритм якого пропонують в більшості підручниках та навчально-методичних посібниках у наступному вигляді:

1. Знайти ОДЗ змінної нерівності.
2. Знайти нулі $P(x)$ (розв'язати рівняння $P(x) = 0$)
3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак функції (многочлену) $P(x)$ в кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ.
4. Записати відповідь, ураховуючи знак нерівності.

Проте, як вже зазначалося авторами у вступі, цей алгоритм є занадто *формалізований*. І в першу чергу, маємо на увазі формалізм, пов'язаний із знаходженням знаків функції на кожному з одержаних проміжків.

Тому авторами нижче пропонується більш деталізований по-кроковий алгоритм методу інтервалів розв'язування дробово-раціональних нерівностей, основна мета якого — спрямувати не на сам деталізований алгоритм, а саме на:

— процес розв'язування нерівностей з акцентом на рівносильність необхідних виконуваних перетворень;

— принципову можливість швидкого знаходження знаків функції на всіх одержаних проміжках.

2.1. Алгоритмічний підхід до розв'язування дробово-раціональних нерівностей методом «інтервалів»

1 етап. **Знайти «ОДЗ» дробово-раціональної нерівності**.
По суті — вилучити із множини дійсних чисел R (з інтервалу $(-\infty;+\infty)$) усі «нулі знаменників», тобто всі ті значення $h_1, h_2, ..., h_t$ змінної x, при яких обертається в нуль хоча б один із знаменників.

Зауваження 1. *Пріоритетність саме цього етапу є більш ніж виправданою. Для переконання в останньому достатньо розглянути приклад нерівності* $\dfrac{1}{x-1}+x\leqslant 2-\dfrac{1}{1-x}$, *розв'язком якої є* $x\in(-\infty;1)\cup(1;2]$.

2 етап. **Звести вихідну нерівність до її «канонічно-рівносильного» виду**.
2.1. «Перенести» (з дотриманням відповідного правила) всі члени з правої частини нерівності у ліву її частину. Тобто, привести нерівність до виду

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+...+\frac{P_k(x)}{Q_k(x)}\vee 0. \tag{7}$$

2.2. Звести всі доданки у лівій частині нерівності до спільного знаменника. Тобто, привести нерівність до нерівності виду

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\vee 0. \tag{8}$$

2.3. Розкласти чисельник $P(x)$ на незвідні множники (подати $P(x)$ у вигляді добутку незвідних многочленів).
2.4. Розкласти знаменник $Q(x)$ на незвідні множники.
2.5. Шляхом множення на число (-1)

або обох частин нерівності (не забуваючи при цьому знак нерівності змінювати на протилежний)

або ж чисельника і знаменника лівої частини нерівності

`досягнути того, щоб коефіцієнт при старшому члені в кожному з незвідних множників-многочленів був додатнім.`

Зауваження 2. *Слід взяти до уваги, що, наприклад:*
незвідні множники виду $(\alpha-x)^{2n}=(x-\alpha)^{2n}$, $(-3+2x)=(2x-3)$, $(2x^2-x+3)$ *не вимагають застосування до них зазначених процедур,*

тоді як

незвідні множники виду $(\alpha-x)^{2n+1}=-(x-\alpha)^{2n+1}$, $(-2x+3)=-(2x-3)$, $(-2x^2+x-3)=-(2x^2-x+3)$ *вимагають обов'язкове застосування до них зазначених процедур.*

2.6. Кожен з незвідних множників виду $(ax+b)^n$ (після кроку 2.5. $a>0$) привести до стандартного виду $a^n\cdot(x+\frac{b}{a})^n$.

Зауваження 3. *Слід взяти до уваги, що остаточний розклад на незвідні множники передбачає добуток степенів двочленів саме з різними основами.*

2.7. «Позбутися» (від додатних та від'ємних) числових множників в чисельнику і знаменнику лівої частини нерівності (наприклад, шляхом ділення або множення обох частин нерівності на такі числові множники).

Таким чином, результатом виконання кроків 2.1.–2.7. буде зведення вихідної нерівності до нерівності виду

$$\frac{(x-\alpha_1)^{m_1}\cdot(x-\alpha_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)^{m_k}\cdot\widetilde{P}(x)}{(x-\beta_1)^{n_1}\cdot(x-\beta_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-\beta_l)^{n_l}\cdot\widetilde{Q}(x)}\vee 0, \qquad (9)$$

де $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ — (різні) нулі чисельника; $\beta_1,\beta_2,...,\beta_l$ — нулі знаменника; $\widetilde{P}(x)$ ($\widetilde{Q}(x)$) — позначення для добутку (зокрема однократного) незвідних множників 2-го степеня (за умов наявності таких в розкладах $P(x)$ і $Q(x)$).
2.8. Більше того, завдяки виконанню кроку 2.5., кожен з добутків $\widetilde{P}(x)$ і $\widetilde{Q}(x)$ при будь-яких дійсних x (зокрема з ОДЗ вихідної нерівності) приймає виключно додатні значення (а тому взагалі не впливає на знак лівої частини нерівності). Таким чином нерівність (9) є рівносильною нерівності

$$f(x)\vee 0, \quad \text{де} \qquad (10)$$

$$f(x)=\frac{(x-\alpha_1)^{m_1}\cdot(x-\alpha_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)^{m_k}}{(x-\beta_1)^{n_1}\cdot(x-\beta_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-\beta_l)^{n_l}}, \qquad (11)$$

яку і будемо називати «**канонічним**» видом вихідної нерівності.

Зауваження 4. *В загальному випадку множина* $B=\{\beta_1,...,\beta_l\}$ *є підмножиною множини* $H=\{h_1,...,h_t\}$. *Якщо ж множини* B *і* H *співпадають, то нерівність* (10) *є рівносильною вихідній нерівності. Таким чином, у випадку* $B\subsetneq H$ *вихідна нерівність є рівносильною системі*

$$\begin{cases} f(x)\vee 0, \\ x\notin H\setminus B. \end{cases}$$

***3 етап*. Виокремлення «подвійних точок».**

Під «**подвійною точкою**» слід розуміти таке значення змінної x, для якого виконується одна з трьох умов:
3.1) воно є нулем лише чисельника або лише знаменника, а показник степеня відповідного двочлена є парним числом — *подвійна точка «першого» типу*;

3.2) воно є нулем і чисельника і знаменника, а сума показників степенів відповідних двочленів є парним числом — *подвійна точка «другого» типу*;
3.3) воно належить множині H, але не належить множині B — *подвійна точка «третього» типу*.

Зауваження 5. *Кожна «подвійна точка» p_0 характеризується тим, що вона є одночасно кінцевою та початковою точкою двох «сусідніх» інтервалів знакосталості функції $f(x)$.*

***4 етап*. Визначення знаків $f(x)$ на інтервалах координатної осі**.
4.1. На координатній прямій незалежно від знаку нерівності «виколюємо» точки з координатами $h_1, h_2, ..., h_t$ — нулі знаменників вихідної нерівності.
4.2. На тій самій координатній прямій залежно від знаку нерівності «виколюємо» (якщо знак нерівності строгий) або «замальовуємо» (у випадку не строгого знаку нерівності) точки з координатами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ — нулі чисельника. Причому, якщо нуль чисельника співпадає із вже виколотим на кроці 4.1. нулем, то такий нуль не може бути замальованим.
4.3. Серед точок, відмічених на координатній прямій, помітити ті, які є «подвійними точками».
4.4. Завдяки крокам 2.5.–2.7. функція $f(x)$ на крайньому правому проміжку координатної осі (OX) завжди приймає додатні значення. Тому цей інтервал завжди помічаємо позначкою «$+$».

На інших інтервалах координатної осі розстановку позначок «$+$» або «$-$» доцільно здійснити рухаючись від правого крайнього інтервалу ліворуч (до $-\infty$) змінюючи позначки на альтернативні за винятком випадків переходу через подвійні точки. При переході через кожну з подвійних точок (рухаючись справа-наліво) позначка не змінюється.

***5 етап*. Запис шуканого розв'язку вихідної нерівності**.

Якщо знак нерівності (10) «$>$», то у відповідь слід записати об'єднання відкритих інтервалів, на яких стоїть позначка «$+$»;

якщо знак нерівності (10) «$\geqslant$», то у відповідь слід записати об'єднання інтервалів, на яких стоїть позначка «$+$» включивши кінці, яким відповідають замальовані точки та замальовані точки, що не увійшли у відмічені проміжки;

якщо знак нерівності (10) «$<$», то у відповідь слід записати об'єднання відкритих інтервалів, на яких стоїть позначка «$-$»;

якщо знак нерівності (10) «$\leqslant$», то у відповідь слід записати об'єднання інтервалів, на яких стоїть позначка «$-$» включивши кінці, яким відповідають замальовані точки та замальовані точки, що не увійшли у відмічені проміжки.

2.2. Ілюстративний приклад

Розв'язати нерівність

$$\frac{1}{x-3}+\frac{(x-3)x^7(x-2)^4(10+2x)^3(-x^2+6x-10)(2x-3)^4}{(x^4-4x^2+5)(x+5)^5(6-3x)(4-x)^6(x^4-1)} \geqslant -\frac{1}{3-x}. \quad (12)$$

1 етап. Знайдемо ОДЗ:

$$\begin{cases} x-3\neq 0 \\ x^4-4x^2+5\neq 0 \\ x+5\neq 0 \\ 6-3x\neq 0 \\ 4-x\neq 0 \\ x^4-1\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 3 \\ (x^2-2)^2\neq -1 \\ x\neq -5 \\ x\neq 2 \\ x\neq 4 \\ (x^2+1)(x-1)(x+1)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 3 \\ x\neq -5 \\ x\neq 2 \\ x\neq 4 \\ x\neq 1 \\ x\neq -1 \end{cases}$$

Звідки $x\in R\backslash\{-5;-1;1;2;3;4\}$.

2 етап. Приведемо дану нерівність до її «канонічного» виду:

2.1. Після перенесення членів нерівності з правої у ліву її частину одержимо

$$\frac{1}{x-3}+\frac{(x-3)x^7(x-2)^4(10+2x)^3(-x^2+6x-10)(2x-3)^4}{(x^4-4x^2+5)(x+5)^5(6-3x)(4-x)^6(x^4-1)}+\frac{1}{3-x}\geqslant 0;$$

2.2. У зведенні доданків лівої частини нерівності

$$\frac{(x-3)x^7(x-2)^4(10+2x)^3(-x^2+6x-10)(2x-3)^4}{(x^4-4x^2+5)(x+5)^5(6-3x)(4-x)^6(x^4-1)}\geqslant 0 \quad (13)$$

до спільного знаменника *не має потреби*;

2.3. Розкладемо чисельник у добуток незвідних множників:

2.3.1. Оскільки дискримінант квадратичного тричлена $-x^2+6x-10$ становить $D=6^2-4\cdot(-1)\cdot(-10)=36-40=-4$ і є від'ємним, то квадратичний тричлен є незвідним. І тому чисельник лівої частини нерівності (13) *вже розкладено у добуток незвідних множників.*

2.4. Розкладемо знаменник у добуток незвідних множників:

2.4.1. $(x^4-1)=(x^2-1)(x^2+1)=(x^2+1)(x-1)(x+1)$;

2.4.2. $(x^4-4x^2+5)=(x^2-\sqrt{2\sqrt{5}+4}\cdot x+\sqrt{5})(x^2+\sqrt{2\sqrt{5}+4}\cdot x+\sqrt{5})$

Не важко перевірити, що кожен із одержаних квадратичних тричленів має від'ємний дискримінант, і тому вони є незвідними. А наведений розклад можна одержати, наприклад, за допомогою методу невизначених коефіцієнтів.

Зауваження 6. *Крок 2.4.2 далеко не завжди є доречним. Більш доцільним є розгляд (x^4-4x^2+5) як многочлена $P_1(x)=x^4-4x^2+5$, який при всіх дійсних x набуває додатних значень. Пояснимо останнє: якщо ввести заміну $x^2=t$ і розглянути квадратичну функцію $f(t)=t^2-4t+5$, то через від'ємність дискримінанта та додатність коефіцієнта при старшому її* *члені ця функція набуває додатних значень при всіх дійсних* t, *зокрема при невід'ємних* $t = x^2$.

2.5.–2.6. Досягнемо того, щоб коефіцієнт при старшому члені в кожному з незвідних множників-многочленів був додатнім:

2.5-6.1. $(10+2x)^3 = 8(x+5)^3$;

2.5-6.2. $(-x^2+6x-10) = -(x^2-6x+10)$;

2.5-6.2. $(2x-3)^4 = 16\left(x-\frac{3}{2}\right)^4$;

2.5-6.4. $(6-3x) = -3(x-2)$;

2.5-6.5. $(4-x)^6 = (x-4)^6$.

Тому нерівність (13) набуває вид

$$\frac{-8\cdot 16\cdot (x-3)x^7(x-2)^4(x+5)^3\left(x-\frac{3}{2}\right)^4}{-3\cdot (x+5)^5(x-2)(x-4)^6(x-1)(x+1)}\cdot\frac{(x^2-6x+10)}{(x^4-4x^2+5)(x^2+1)}\geqslant 0 \quad (14)$$

2.7. «Позбавлення» від додатних та від'ємних числових множників

$$\frac{(x-3)x^7(x-2)^4(x+5)^3\left(x-\frac{3}{2}\right)^4}{(x+5)^5(x-2)(x-4)^6(x-1)(x+1)}\cdot\frac{(x^2-6x+10)}{(x^4-4x^2+5)(x^2+1)}\geqslant 0 \quad (15)$$

2.8. Запис «канонічно-рівносильного» виду вихідної нерівності

$$\frac{(x-3)x^7(x-2)^4(x+5)^3\left(x-\frac{3}{2}\right)^4}{(x+5)^5(x-2)(x-4)^6(x-1)(x+1)}\geqslant 0, \quad x\neq 3. \quad (16)$$

3 етап. Виокремлення «подвійних точок»:

3.1. $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{3}{2}$ — подвійні точки («першого» типу);

3.2. $x_3 = -5$ — подвійна точка («другого» типу);

3.3. $x_4 = 3$ — подвійна точка («третього» типу);

4 етап. Визначення знаків лівої частини канонічної нерівності (16) на інтервалах координатної осі:

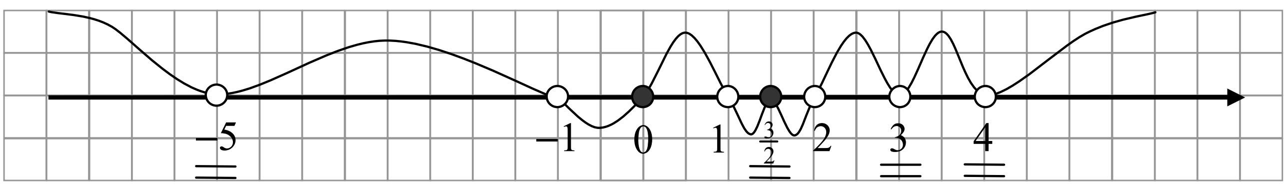

Рис. 1: до визначення знаків лівої частини канонічної нерівності (16) на відповідних інтервалах

5 етап. Запис шуканого розв'язку вихідної нерівності:
$x\in(-\infty;-5)\cup(-5;-1)\cup[0;1)\cup\{\frac{3}{2}\}\cup(2;3)\cup(3;4)\cup(4;+\infty)$.

3. Методичні поради щодо дидактичного забезпечення

Під час проведення відповідних уроків (занять) **однією з цілей є**: домогтися засвоєння учнями (студентами) схеми розв'язування раціональних нерівностей з однією змінною методом інтервалів;

а **одним із завдань** — виробити вміння виконувати дії відповідно до схеми розв'язування раціональних нерівностей методом інтервалів.

Серед публікацій, присвячених дидактичному (супроводу) забезпеченню теми «Розв'язання нерівностей методом інтервалів», мусимо відмітити статтю [14], в якій запропоновано значну кількість різнорівневих карток-варіантів з відповідями, та посібники [8], [18], [22], [25], [26].

I. Розв'язати нерівність

1. (a) $\dfrac{1}{x-2}<0$; (b) $\dfrac{2}{x-2}\leqslant 0$; (c) $\dfrac{3}{x-2}>0$; (d) $\dfrac{4}{x-2}\geqslant 0$.
2. (a) $\dfrac{(x+1)(x-2)}{x-3}<0$; (b) $\dfrac{(x+1)(x-2)}{x-3}\geqslant 0$.
3. (a) $\dfrac{x-2}{2-x}<0$; (b) $\dfrac{x-2}{2-x}\leqslant 0$; (c) $\dfrac{x-2}{2-x}>0$; (d) $\dfrac{x-2}{2-x}\geqslant 0$.
4. (a) $\dfrac{x+2}{x^2}<0$; (b) $\dfrac{x+2}{x^2-4}\geqslant 0$; (c) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x+2}{x^2+4}\geqslant -\dfrac{1}{2-x}$.
5. (a) $\dfrac{(x+1)(2-x)}{2x-6}<0$;(b) $\dfrac{(x+1)(2-x)}{6-2x}\geqslant 0$;(c) $\dfrac{(x+1)(2-x)^4}{6-2x}\geqslant 0$.
6. (a) $\dfrac{1}{x^2-4x+5}<0$; (b) $\dfrac{2}{x^4-4x^2+5}\leqslant 0$; (c) $\dfrac{-x^8+4x^4-5}{x^2+9}<0$.
7. (a) $\dfrac{x-2}{x^2-4x+5}<0$; (b) $\dfrac{x-2}{x^4-4x^2+5}\leqslant 0$; (c) $\dfrac{-x^8+4x^4-5}{x-2}<0$.
8. (a) $\dfrac{4x^2-4x+1}{x^2+x-12}<0$; (b) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8}\leqslant 0$; (c) $\dfrac{(x-1)(x+3)^3}{x^2+6x+9}<0$.
9. (a) $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x+8}\leqslant 0$; (b) $\dfrac{x^3-3x+2}{6-x}\leqslant 0$.
10. (a) $\dfrac{1}{x}\leqslant -x$; (b) $\dfrac{1}{x}\geqslant -x$; (c) $\dfrac{1}{x}\leqslant x$; (d) $\dfrac{1}{x}\geqslant x$.
11. (a) $\dfrac{x+5}{x+3}>1$; (b) $\dfrac{3x+4}{x+1}\leqslant 2$; (c) $\dfrac{3}{x}\leqslant\dfrac{2}{x+1}$; (d) $\dfrac{3}{x-3}>\dfrac{1}{x+2}$.

II. Навести приклад раціональної нерівності, розв'язками якої була би множина

1. (a) $x \in R$; (c) $x = 5$; (e) $x \in (-5; 5)$; (g) $x \in [-5; 5)$;
   (b) $\emptyset$; (d) $x \in \{-5; 5\}$; (f) $x \in (-5; 5]$; (h) $x \in [-5; 5]$.

2. (a) $x \in (2; +\infty)$; (d) $x \in (2; +\infty) \cup \{-2\}$;
   (b) $x \in [2; +\infty)$; (e) $x \in [2; +\infty) \cup \{-2\}$;
   (c) $x \in (-\infty; 2)$; (f) $x \in (-\infty; -2) \cup \{2\}$.

3. (a) $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; (e) $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \cup \{0\}$;
   (b) $x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; (f) $x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty) \cup \{0\}$;
   (c) $x \in (-\infty; -2) \cup [2; +\infty)$; (g) $x \in (-\infty; -2) \cup [2; +\infty) \cup \{0\}$;
   (d) $x \in (-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$; (h) $x \in (-\infty; -2] \cup (2; +\infty) \cup \{0\}$.

III. Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність

1. (a) $\dfrac{x-a}{x-1} > 0$; (b) $\dfrac{x-a}{x-1} \geqslant 0$; (c) $\dfrac{x-1}{x-a} < 0$; (d) $\dfrac{x-1}{x-a} \leqslant 0$.

2. (a) $\dfrac{ax-2}{x-1} > 0$; (b) $\dfrac{ax-2}{x-1} \geqslant 0$; (c) $\dfrac{x-1}{ax+2} < 0$; (d) $\dfrac{x-1}{ax+2} \leqslant 0$.

3. (a) $\dfrac{ax-4a+5}{x-3} \geqslant 0$; (c) $\dfrac{x+2a}{(a-2)(x-4)} \geqslant 0$;
   (b) $\dfrac{(a-1)x-(2a+1)}{(a-1)(x-3)} > 0$; (d) $\dfrac{x(a+3)-2a}{(a+3)(x-3)} \leqslant 0$.

4. (a) $\dfrac{(x-a)^2}{x-1} > 0$; (b) $\dfrac{x^2-a^2}{x-1} \geqslant 0$; (c) $\dfrac{x-a}{(x-1)^2} < 0$; (d) $\dfrac{x^2-a^2}{(x-1)^2} \leqslant 0$.

5. (a) $\dfrac{(x-1)(x^2-ax)}{x} > 0$; (c) $\dfrac{(x-3)(x+4)}{(x-a)^2} < 0$;
   (b) $\dfrac{x^2+x(3a-1)-3a}{x-1} \geqslant 0$; (d) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+ax} > 0$.

IV. При яких значеннях параметра a друга нерівність є наслідком першої нерівності

(1) $\dfrac{2a-10}{x^2-a^2} \geqslant 0$; (2) $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

V. Дано дві нерівності

(1) $x^2 > 4$; (2) $1 + \frac{2a}{x-a} > 0$.

При яких значеннях параметра a:
– нерівності (1) і (2) є рівносильними?
– нерівність (1) є наслідком нерівності (2)?
– нерівність (2) є наслідком нерівності (1)?

VI. Доцільно розглянути й приклади нерівносильних перетворень, коли перетворення призводять до *появи* зайвих розв'язків нерівності, або ж *втрати* розв'язків нерівності.

Зауважимо, що наведена вище система задач, звісно ж, носить орієнтовно-суб'єктивний характер та не претендує на роль взірця та загальне визнання.

Прикінцеві висновки та зауваження

Не можна не погодитися з авторами роботи [17], які стверджують, що нерівності (так само як і рівняння) необхідно розглядати цілісно та з єдиної точки зору, єдиної позиції — процесу розв'язування нерівностей, як процесу їх послідовних перетворень. Теж вважаємо, що саме такий підхід дозволить інтегрувати всі типи нерівностей в єдину сукупність та допоможе:

з одного боку — сформувати в учнів (студентів) необхідні навички, а

з іншого боку — сформувати уявлення не лише про існуючі проблеми, а й про принципові можливості розв'язування нерівностей.

Цілком також погоджуємося і з авторами [18], які зазначають, що «... розв'язувати всі нерівності *методом інтервалів* і тим більше *методом заміни множників* зовсім не обов'язково. У той же час метод інтервалів досить універсальний, а метод заміни множників дозволяє звести складні нерівності до раціональних ... .»

Підводячи підсумки, можна констатувати, що:

1) і метод інтервалів, і узагальнений метод інтервалів є застосовними до нерівностей, права частина яких дорівнює нулеві, а ліва частина — добуток, або ж частка декількох алгебраїчних множників;

2) зазначений у вступі *узагальнений метод інтервалів* (за допомогою заміни множників) заснований на (так званій) раціоналізації нерівності, суть якої полягає у заміні множників більш простими, які мають такі самі проміжки знакосталості (що й вихідні множники) [10], [18], [27];

3) особливістю цього методу є принципова можливість зведення ірраціональних, логарифмічних та показникових нерівностей до рівносильної раціональної нерівності, яку не важко розв'язати методом інтервалів.

4) проте слід відмітити, що узагальнений метод інтервалів може спричинити й прикрі неприємності (наприклад: буває складним знайти «пробну» точку, або ж при з'ясуванні знаку складної функції в «пробній» точці обчислення можуть виявитися громіздкими та в результаті арифметичної помилки знак може виявитися невірним).

З урахуванням зазначеного, мусимо зізнатися, що супровідною метою представленої статті є пропаганда саме цього (на превеликий жаль маловідомого) методу.

Вважаємо, що ключову роль відіграє поміркована методична та дидактична доповнюваність зазначених аспектів, що в свою чергу поглибить знання учнів, розширить їх кругозір, буде спонукати до творчості навіть при розв'язуванні типових нерівностей. Особливу увагу при цьому слід приділяти задачам з параметром. Бо розв'язування нерівностей (рівнянь) з параметрами відкриває перед учнем (студентом) значне число евристичних прийомів загального характеру, цінних для математичного розвитку дослідників-початківців.

Гадаємо, що наведений матеріал допоможе випускникам старших класів під час комплексної підготовки до державної підсумкової атестації та зовнішнього незалежного оцінювання.

Також маємо надію, що наведений матеріал допоможе молодим вчителям математики під час цілісного усвідомлення змістової лінії «Нерівності» в шкільному курсі математики та може бути використаний (принаймні фрагментарно) під час проведення курсів підвищення кваліфікації вчителів математики.

Литература

1. Алгебра. 8 клас. Підручник для класів з поглибленим вивченням математики // А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. — Х. : Гімназія, 2008. — 368 с.
2. Алгебра. 9 клас. Підручник для класів з поглибленим вивченням математики // А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. — Х. : Гімназія, 2009. — 379 с.
3. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів : академ. рівень / Є. П. Нелін. — Х. : Гімназія, 2010. — 416 с.
4. *Арендар Т.Б.* Многочлени. Розв'язування рівнянь і нерівностей вищого степеня // Математика в школах України. — 2006. — №27/28. — С. 25–27.
5. *Арендар Т.Б.* Ще раз про раціональні рівняння і нерівності // Математика в школах України. — 2007. — №10 (166). — С. 25–27.

6. *Башмаков М.И.* Уравнения и неравенства // Библиотечка физико-математической школы. Выпуск 5. — М.: Наука, 1971. — 96 с.
7. *Бевз Г.П.* Методика навчання математики: Навчальний посібник для інститутів / Г.П. Бевз. — К. : Вища школа, 1989. — 367 с.
8. *Беляева Э.С.* Уравнения и неравенства с параметром. В 2 ч., Ч. 1 / Э.С. Беляева, А.С. Потапов, С.А. Титоренко. — М. : Дрофа, 2009. — 480 с.
9. *Голубев В.И., Тарасов В.И.* Эффективные пути решения неравенств // Пособие по математике для учителей средней школы и абитуриентов. — Львов: Научно-методический журнал «Квантор», вып. 10, 1991. — 94 с. — (Всесоюзная ассоциация учителей математики).
10. *Голубев В.И.* Решение сложных и нестандартных задач по математике. — М. : ИЛЕКСА, 2007. — 252 с.
11. *Гомонов С.А.* Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения // Методические рекомендации к элективному курсу С.А. Гомонова. — 3-е изд., стереотип. — М.: Дрофа, 2007. — 160 с.
12. *Ионин Ю.* Метод интервалов / Ю. Ионин, В. Некрасов // Квант. — 1985. — №12 — С. 18–20.
13. *Затакавай В.* Решение неравенств методом интервалов // Квант. — 1990. — №5. — С. 63–66.
14. *Івахова Л.Я.* Раціональні нерівності. Метод інтервалів / Л.Я. Івахова // Математика в школах України. — 2009. — Травень (№ 13/14). — С. 30–34.
15. *Ізюмченко Л.В.* Раціональні рівняння та нерівності: Методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10-11 класів / Л.В. Ізюмченко, В.В. Нічишина, Р.Я. Ріжняк // Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи. — Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2009. — 84 с.
16. *Канунников А.Л.* Уравнения и неравенства: Методическая разработка для учащихся заочного отделения Малого механико-математического факультета. — М.: Изд. ЦПИ при мех.-мат. фак. МГУ, 2008. — 64 с.
17. *Кушнір В.А.* Рівносильність рівнянь та нерівностей: Методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10-11 класів / В.А. Кушнір, Г.А. Кушнір, Р.Я. Ріжняк // Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи. — Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2009. — 51 с.
18. *Лукаш О.В., Прес Е.М.* Метод інтервалів. – Х.: Вид. гр. «Основа», 2007. – 144 с. — (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 6(54)).
19. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств // С.Н. Олехник, М.К. Потапов, П.И. Пасиченко. — М.: Изд-во МГУ, 1991. — 217 с.

20. Олімпіадні задачі: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2014 / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко. — Слов'янськ, 2015. — 64 с. — (Навчальний посібник, Серія: «Викладачі ДДПУ — учням, студентам, вчителям»; Випуск 13).
21. *Сиротина И.К.* Метод интервалов в системном подходе к обучению школьников математике // Народная асвета. – 2011. — №2. — С. 21–26.
22. *Фенько Л.М.* Метод интервалов в решении неравенств и исследовании функций. 8-11 классы учебное пособие / Л.М. Фенько. — 2-е изд., стер. — Москва : Дрофа, 2008. — 125 с.
23. *Цыпкин А.Г.* Справочник по математике для средних учебных заведений / А.Г. Цыпкин. — 4-е изд., пер. и доп. — М.: Наука, 1988. — 431 с.
24. *Шарыгин И.Ф.* Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. сред. шк. — М.: Просвещение, 1989. — 252 с.
25. *Шахмейстер А.Х.* Дробно-рациональные неравенства. Пособие для школьников, абитуриентов и преподавателей. — 3-е изд., исправ. и доп. — М.: МЦНМО; СПб.: Петроглиф: Виктория плюс, 2008. — 248 с.: ил.
26. Задачи по математике. Уравнения и неравенства: Справочное пособие / Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. — М.: Книга по Требованию, 2013. — 237 с.
27. *Мухина Г.Г.* Метод замены множителей — эффективный путь решения неравенств [Електронный ресурс] / Г. Г. Мухина. — Режим доступа http://festival.1september.ru/articles/521767/

Kadubovs'kyi O.A., Besedin B.B., Storozhilova N.V.
Donbas State Teachers' Training University, Slovians'k, Ukraine.

To the question about the application of algorithmic approach while solving of shot-rational inequalities with the method of intervals

In the article the authorial experience of teaching the decision methods of shot-rational inequalities at the mathematics lessons at school and during the forming of necessary competencies during the process of preparation of students of mathematical specialities of pedagogical institutions of higher education and in-plant training of teachers of mathematics is considered. An incremental algorithm, an illustrative example with detailed explanations and methodical advices concerning the didactic providing during the process of mastering the offered approach are brought.

Keywords: *shot-rational inequities, method of intervals, methods of solving, algorithmic approach.*