МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

Новіков О.О., Ровенська О.Г., Чабанова Є.О., Бикова Н.І., Волік С.В.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, декан фізико-математичного факультету, ДДПУ*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики, ДДМА*

[3−4] *студенти 5 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ*

[5] *студентка 2 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ЗАДАЧА КОЛМОГОРОВА-НІКОЛЬСЬКОГО ДЛЯ ПОДВІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ ФЕЙЄРА НА КЛАСАХ ІНТЕГРАЛІВ ПУАСОНА

Отримані асимптотичні формули для верхніх граней відхилень подвійних операторів Фейєра на класах інтегралів Пуасона, які забезпечують розв'язки відповідної задачі Колмогорова-Нікольського.

Keywords: *Fourier series, sums*

Нехай L — множина сумовних 2π−періодичних функцій і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x)$$

— ряд Фур'є функції $f \in L$. Позначимо через $S_n(f;x)$ часткові суми ряду Фур'є порядку n. Суми Валле Пуссена функції $f \in L$ задаються співвідношенням

$$V_{n,p}(f,x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f,x).$$

Застосовуючи метод підсумовування Валле Пуссена двічі, отримуємо наступний метод побудови тригонометричних поліномів. Нехай p_1, p_2 — довільні натуральні числа такі, що $p_1 + p_2 \leqslant n+1$. Функції $f \in L$ поставимо у відповідність послідовність подвійних середніх Валле Пуссена

$$V_{n,p_1,p_2}(f,x) = V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f,x) = \frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1} V_{k+1,p_2}(f,x) =$$

$$= \frac{1}{p_1} \sum_{k=n-p_1}^{n-1} \frac{1}{p_2} \sum_{m=k-p_2+1}^{k} S_m(f,x).$$

Наслідуючи О.І. Степанця [1], позначимо через S_M^0 множину функцій істотно обмежених і таких, що мають нульове середнє значення на періоді, і через $C_{\beta,\infty}^q$ – класи неперервних 2π–періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P_\beta^q(t)\, dt,$$

в якій $P_\beta^q(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})$ – ядро Пуасона, а $\varphi \in S_M^0$.

Питанням наближення класів $C_{\beta,\infty}^q$ лінійними методами присвячено ряд робіт спеціалістів з теорії функцій.

С.М. Нікольський [2] показав, що для верхніх граней відхилень часткових сум Фур'є на цих класах має місце асимптотична формула

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^q; S_n\right) = \frac{8q^n}{\pi^2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}} + O(1)\frac{q^n}{n},$$

де величина $O(1)$ не залежить від $n \in \mathbb{N}$. С.Б. Стечкин в роботі [3] показав, що залишковий член цієї формули можна подати у вигляді $O(1)\frac{q^n}{n(1-q)}$, де величина $O(1)$ рівномірно обмежена відносно $n \in \mathbb{N}$ та $q \in (0;1)$.

В работі [1] О.І. Степанець отримав аналогічну асимптотичну формулу для класів $C_\beta^q H_\omega$. В.І. Рукасов та С.О. Чайченко [4] для верхніх граней відхилень сум Валле Пуссена на класах $C_{\beta,\infty}^q$ і $C_\beta^q H_\omega$ отримали аналогічні асимптотичні формули. Зокрема, у цій роботі показано, що

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^q; V_{n,p}\right) = \frac{4q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} + O(1)\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{p(1-q^2)}\right). \qquad (1)$$

А.С. Сердюк [5] показав, що має місце більш загальна рівність ніж (1):

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^q; V_{n,p}\right) = \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{p,q} + O(1)\left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^s}\right)\right),$$

де

$$K_{p,q} = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt + q^{2p}}}{1-2q\cos pt + q^2} dt, \;\; s = s(p) = \begin{cases} 1, & p=1 \\ 3, & p=2,3,\ldots. \end{cases}$$

Позначимо у випадку $p_1+p_2+r=n$, $r=-1;0;1;2;...;$ $p_1=p$, $p_2=n-p-r$,

$$V_{n,p_1,p_2}(f,x)=\sigma_{n,p}^{(2,r)}(f,x)=\sigma_n^{(2,r)}(f,x);\delta_n^{(2,r)}(f,x)=f(x)-\sigma_n^{(2,r)}(f,x).$$

Домовимося многочлени $\sigma_n^{(2,r)}(f,x)$ називати подвійними сумами Фейєра функції $f(x)$.

В даній роботі отримані асимптотичні формули для верхніх граней відхилень тригонометричних поліномів $\sigma_n^{(2,r)}(f,x)$ для $r=-1$ на класах $C^q_{\beta,\infty}$ для $\beta=1$

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty},\sigma_n^{(2,-1)})\overset{df}{=}\sup_{f\in C^q_{1,\infty}}||f(x)-\sigma_n^{(2,-1)}(f,x)||_C.$$

Теорема 1. *Нехай $q\in(0;1)$, $p_1+p_2=n+1$. Тоді для $n\to\infty$ має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty},\sigma_n^{(2,-1)})=\begin{cases}\frac{4q^2}{\pi p_1p_2(1-q^2)^2}+O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}, & \text{якщо } q\in(0;1/2);\\ \frac{(4q^2+1)q}{\pi p_1p_2(1-q^2)^2}+O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}, & \text{якщо } q\in[1/2;1).\end{cases}\tag{2}$$

Доведення. Застосовуючи міркування роботи [6, с.123], отримуємо для $q\in(0;1)$, $\beta=1$, $p_1+p_2=n+1$

$$\delta_n^{(2,-1)}(f,x)\overset{df}{=}f(x)-\sigma_n^{(2,-1)}(f;x)=$$

$$=\frac{-q}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f^q_\beta(x+t)}{(1-2q\cos t+q^2)^3}(\sin t-3q^2\sin t+q^3\sin 2t)dt+O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}.$$

Тоді в силу інвариантності класу $C^q_{1,\infty}$ відносно зсуву за аргументом

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty},\sigma_n^{(2,-1)})\leqslant$$

$$\leqslant\frac{q}{\pi p_1p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(t)(\sin t-3q^2\sin t+q^3\sin 2t)}{(1-2q\cos t+q^2)^3}dt+O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}.\tag{3}$$

де $\varphi(t)=\mathrm{sign}(\sin t-3q^2\sin t+q^3\sin 2t)$. Оскільки функція $\varphi(t)$ непарна, то $\varphi(t)\in S^0_M$.

Для $q\in(0;1/2)$ виконується $\sin t-3q^2\sin t+q^3\sin 2t=0$ лише для $t=0;\pm\pi$. Це означає, що у випадку $q\in(0;1/2)$ функція

$$\varphi(t)=\mathrm{sign}(\sin 2t-3q\sin t+q^3\sin t)=\begin{cases}1, & -\pi\leqslant t<0;\\ -1, & 0\leqslant t\leqslant\pi,\end{cases}$$

належить до S_M^0. Напроти, для $q \in [1/2;1)$ умова $\sin t - 3q^2 \sin t + q^3 \sin 2t = 0$ виконується для $t = 0; \pm\pi; t_q = \pm \arccos \frac{3q^2-1}{2q^3}$. Отже для $q \in [1/2;1)$ функція

$$\varphi(t) = \mathrm{sign}(\sin t - 3q^2 \sin t + q^3 \sin 2t) = \begin{cases} 1, & -\pi \leqslant t < -\arccos \frac{3q^2-1}{2q^3}; \\ -1, & -\arccos \frac{3q^2-1}{2q^3} \leqslant t < 0; \\ 1, & 0 \leqslant t < \arccos \frac{3q^2-1}{2q^3}; \\ -1, & \arccos \frac{(3q-q^3)}{2} \leqslant t \leqslant \pi, \end{cases}$$

належить до S_M^0. Це означає, що для зазначених функцій $\varphi(t)$ у співвідношенні (3) має місце рівність.

Тоді для $q \in (0;1/2)$ виконується

$$||\delta_n^{(2,-1)}(\varphi;0)||_C =$$
$$= \frac{4q^5}{\pi p_1 p_2}[J_1(\pi) - J_1(0)] + \frac{2q^2(1-3q^2)}{\pi p_1 p_2}[J_2(\pi) - J_2(0)] + O(1)\frac{q^{n-p_1} + q^{n-p_2}}{p_1 p_2 (1-q)^5},$$

де

$$J_1(t) = \int \frac{\cos t \sin t dt}{(1-2q\cos t + q^2)^3}; J_2(t) = \int \frac{\sin t dt}{(1-2q\cos t + q^2)^3},$$

а для $q \in [1/2;1)$ маємо

$$||\delta_n^{(2,-1)}(\varphi;0)||_C = \frac{4q^5}{\pi p_1 p_2}\left[2J_1(\arccos\frac{3q^2-1}{2q^3}) - J_1(0) - J_1(\pi)\right] +$$
$$+\frac{2q^2(1-3q^2)}{\pi p_1 p_2}\left[2J_2(\arccos\frac{3q^2-1}{2q^3}) - J_2(0) - J_2(\pi)\right] + O(1)\frac{q^{n-p_1} + q^{n-p_2}}{p_1 p_2 (1-q)^5}.$$

Оскільки

$$J_1(t) = \frac{1}{4q^2}(1-2q\cos t + q^2)^{-1} - \frac{1+q^2}{8q^2}(1-2q\cos t + q^2)^{-2} + C;$$
$$J_2(t) = -\frac{1}{4q}(1-2q\cos t + q^2)^{-2} + C,$$

то, виконуючи перетворення, отримуємо для $q \in (0;1/2)$

$$||\delta_n^{(2,-1)}(\varphi;0)||_C = \frac{4q^2}{\pi p_1 p_2 (1-q^2)^2} + O(1)\frac{q^{n-p_1} + q^{n-p_2}}{p_1 p_2 (1-q)^5},$$

а для $q \in [1/2;1)$

$$||\delta_n^{(2,-1)}(\varphi;0)||_C = \frac{(4q^2+1)q}{\pi p_1 p_2 (1-q^2)^2} + O(1)\frac{q^{n-p_1} + q^{n-p_2}}{p_1 p_2 (1-q)^5}.$$

Таким чином мають місце асимптотичні формули (2).

Зауважимо, що для $q = 1/2$ значення головних членів цих формул співпадають. Теорема доведена.

Література

1. *Степанец А.И.* Решение задачи Колмогорова-Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Математический сборник. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113–138.
2. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Известия АН СССР. Сер. математика. — 1946. — Т. 10, № 3. — С. 207–256.
3. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1980. — Т. 145. — С. 126–151.
4. *Рукасов В.І.* Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле-Пуссена / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко // Український математичний журнал. — 2002. — Т. 54, № 12. — С. 1653–1668.
5. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена / А.С. Сердюк // Український математичний журнал. — 2004. — Т. 56, № 1. — С. 97–107.
6. *Новіков О.О.* Наближення класів інтегралів Пуасона операторами Фейєра / О.О. Новіков, О.Г. Ровенська, Ю.М. Воронцова [та ін.] // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2014. — №4. — С. 17–22.
7. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.