УДК 517.5

Бодра В.І., Безсмертна К.В., Єгорова О.В., Лашина О.С., Рудь А.М.

[1] *асистент каф. вищої математики, Київський національний університет технологій і дизайну*
[2–5] *студенти 5 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ЕКСТРЕМАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПОДВІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ ФЕЙЄРА НА КЛАСАХ ІНТЕГРАЛІВ ПУАСОНА

Отримані розв'язки екстремальної задачі для верхніх граней відхилень подвійних операторів Фейєра на класах інтегралів Пуасона.
Keywords: *Fourier series, sums, the asymptotic equations*

Нехай L — множина сумовних 2π–періодичних функцій і

$$S[f]=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx)$$

— ряд Фур'є функції $f\in L$. Позначимо через $S_n(f;x)$ часткові суми ряду Фур'є функції $f\in L$. Нехай p_1, p_2 — довільні натуральні числа такі, що $p_1{+}p_2=n$. Функції $f\in L$ поставимо у відповідність послідовність подвійних сум Фейєра

$$\sigma^{(2,0)}_{n,p_1,p_2}(f,x)=\sigma^{(2,0)}_{n}(f,x)=\frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{p_2}\sum_{m=k-p_2+1}^{k}S_m(f,x).$$

Наслідуючи О.І. Степанця [1], позначимо через S^0_M множину функцій істотно обмежених і таких, що мають нульове середнє значення на періоді, а через $C^q_{\beta,\infty}$ – класи неперервних 2π–періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x)=A_0+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)P^q_\beta(t)\;dt,$$

в якій $P^q_\beta(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}q^k\cos(kt+\frac{\beta\pi}{2})$ – ядро Пуасона, а $\varphi\in S^0_M$.

Питанням наближення класів $C^q_{\beta,\infty}$ лінійними методами присвячено ряд робіт спеціалістів з теорії функцій. З бібліографією до цих питань можна ознайомитися у роботах [1]-[3]

В даній роботі отримані асимптотичні формули для верхніх граней відхилень тригонометричних поліномів $\sigma^{(2,0)}_{n,p_1,p_2}(f,x)$ на класах $C^q_{\beta,\infty}$

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty},\sigma^{(2,0)}_n) \overset{df}{=} \sup_{f\in C^q_{1,\infty}} ||f(x)-\sigma^{(2,0)}_n(f,x)||_C.$$

Теорема 1. *Нехай* $q\in(0;1)$, $p_1+p_2=n$. *Тоді для* $n\to\infty$ *має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty};\sigma^{(2,0)}_{n,p}) = \frac{q^4+4q^2}{\pi p_1p_2(1-q^2)^2} + O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}. \tag{2}$$

Доведення. Застосовуючи міркування робіт [4], [5, с.123], отримуємо для $\beta=1$,

$$\delta^{(2,0)}_n(f,x) \overset{df}{=} f(x)-\sigma^{(2,0)}_n(f;x) =$$

$$= \frac{-q}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f^q_1(x+t)}{(1-2q\cos t+q^2)^3}((3q-q^3)\sin t-\sin 2t)dt + O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}.$$

Тоді

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty},\sigma^{(2,0)}_n) \leqslant \frac{q}{\pi p_1p_2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(t)((3q-q^3)\sin t-\sin 2t)}{(1-2q\cos t+q^2)^3}dt + O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}. \tag{3}$$

де $\varphi(t)=\mathrm{sign}((3q-q^3)\sin t-\sin 2t)$.

Оскільки для будь-якого $q\in(0;1)$ умова $(3q-q^3)\sin t-\sin 2t=0$ виконується тільки для $t=0;\pm\pi;t_q=\pm\arccos\frac{3q-q^3}{2}$, то функція

$$\varphi(t)=\mathrm{sign}((3q-q^3)\sin t-\sin 2t)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant t<-\arccos\frac{3q-q^3}{2};\\ 1, & -\arccos\frac{3q-q^3}{2}\leqslant t<0;\\ -1, & 0\leqslant t<\arccos\frac{3q-q^3}{2};\\ 1, & \arccos\frac{(3q-q^3)}{2}\leqslant t\leqslant\pi,\end{cases}$$

міститься у множині S^0_M. Це означає, що у співвідношенні (3) має місце асимптотична рівність.

Тоді для $q\in(0;1)$ виконується

$$||\delta^{(2,-1)}_n(\varphi;0)||_C = \frac{2q^2(3q-q^3)}{\pi p_1p_2}[J_2(0)+J_2(\pi)-2J_2(\arccos\frac{3q-q^3}{2})+$$

$$+\frac{4q^2}{\pi p_1p_2}[2J_1(\arccos\frac{3q-q^3}{2})-J_1(0)+J_1(\pi)],$$

де

$$J_1(t) = \int \frac{\cos t \sin t dt}{(1-2q\cos t+q^2)^3}; J_2(t) = \int \frac{\sin t dt}{(1-2q\cos t+q^2)^3}.$$

Оскільки

$$J_1(t) = \frac{1}{4q^2}(1-2q\cos t+q^2)^{-1} - \frac{1+q^2}{8q^2}(1-2q\cos t+q^2)^{-2} + C;$$

$$J_2(t) = -\frac{1}{4q}(1-2q\cos t+q^2)^{-2} + C,$$

то, виконуючи перетворення, отримуємо для $q \in (0;1)$

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty}; \sigma^{(2,0)}_{n,p}) = \frac{q^4+4q^2}{\pi p_1 p_2 (1-q^2)^2} + O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1 p_2 (1-q)^5}.$$

Теорема доведена.

Література

1. *Степанец А.И.* Решение задачи Колмогорова-Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Математический сборник. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113—138.
2. *Степанец А.И.* Приближения суммами Валле Пуссена / Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О. — К. : Ін-т математики НАН України, — 2007. — 386 с. — (Праці Ін-ту математики НАН України ; т. 68).
3. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. / Степанец А.И. — К. : Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 1. — 427 с. — (Праці Ін-ту математики НАН України ; т. 40).
4. *Новіков О.О.* Наближення класів інтегралів Пуасона операторами Фейєра / О.О. Новіков, О.Г. Ровенська, Ю.М. Воронцова [та ін.] // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2014. — №4. — С. 17–22.
5. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.