УДК 517.5

Новіков О.О., Шумякіна А.В., Ліпкіна В.Ю., Давиденко М.А., Вагнер Г.В.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, декан фізико-математичного факультету, ДДПУ*

[2–4] *студенти 5 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ*

[5] *студентка 2 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

АСИМПТОТИЧНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ ВІДХИЛЕНЬ ПОДВІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ ФЕЙЄРА

Отримані асимптотичні формули для верхніх граней відхилень подвійних операторів Фейєра на класах періодичних функцій.

Keywords: *Fourier series, sums, the asymptotic equations*

В роботі [1] подвійні оператори наближення запроваджені наступним чином. Нехай L — множина сумовних 2π–періодичних функцій і

$$S_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$

– часткові суми ряду Фур'є функції $f \in L$. Нехай p_1, p_2 — довільні натуральні числа такі, що $p_1 + p_2 = n - 1$. Функції $f \in L$ поставимо у відповідність послідовність тригонометричних поліномів

$$\sigma^{(2,1)}_{n,p_1,p_2}(f,x) = \sigma^{(2,1)}_{n}(f,x) = \frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{p_2}\sum_{m=k-p_2+1}^{k}S_m(f,x),$$

які домовимося називати подвійними сумами Фейєра. Наслідуючи [2], позначимо через S^0_M множину функцій істотно обмежених і таких, що мають нульове середнє значення на періоді, і через $C^q_{\beta,\infty}$ – класи неперервних 2π–періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)P^q_\beta(t)\,dt,$$

в якій $P^q_\beta(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k\cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})$ – ядро Пуасона, а $\varphi \in S^0_M$.

Питанням наближення класів $C^q_{\beta,\infty}$ лінійними методами присвячено ряд робіт С.М. Нікольського [3], С.Б. Стечкина [4], О.І. Степанця [2], В.І. Рукасова, С.О. Чайченко [5], А.С. Сердюка [6].

В даній роботі отримані асимптотичні формули для верхніх граней відхилень тригонометричних поліномів $\sigma_n^{(2,1)}(f,x)$ на класах $C^q_{\beta,\infty}$

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty},\sigma_n^{(2,1)}) \overset{df}{=} \sup_{f\in C^q_{1,\infty}} ||f(x)-\sigma_n^{(2,1)}(f,x)||_C.$$

Теорема 1. *Нехай* $q\in(0;1)$, $p_1+p_2=n-1$. *Тоді для* $n\to\infty$ *має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty};\sigma_n^{(2,1)}) = \frac{2\pi^{-1}}{p_1p_2}\left[\ln\frac{16(1-q)(1+q)^3}{(q+\sqrt{4-3q^2})^4} + q\frac{(8q^2-4)-(q^2-2)\sqrt{4-3q^2}}{2(1-q^2)^2}\right]+$$

$$+O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}. \qquad (1)$$

Доведення. Застосовуючи міркування робіт [7], [8, с.123], отримуємо для $\beta=1$,

$$\delta_n^{(2,1)}(f,x) \overset{df}{=} f(x)-\sigma_n^{(2,1)}(f;x) =$$

$$=\frac{-q}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f_1^q(x+t)}{(1-2q\cos t+q^2)^3}(\sin 3t-3q\sin 2t+3q^2\sin t)dt + O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}.$$

Тоді

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty},\sigma_n^{(2,1)}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{q}{\pi p_1p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(t)(\sin 3t-3q\sin 2t+3q^2\sin t)}{(1-2q\cos t+q^2)^3}dt + O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}, \qquad (2)$$

де $\varphi(t)=\operatorname{sign}(\sin 3t-3q\sin 2t+3q^2\sin t)$.

Оскільки для будь-якого $q\in(0;1)$ умова $(3q-q^3)\sin t-\sin 2t=0$ виконується тільки для $t=0;\pm\pi; t_{-q}=\arccos\frac{3q-\sqrt{4-3q^2}}{4}, t_{+q}=\arccos\frac{3q+\sqrt{4-3q^2}}{4}$, то функція

$$\varphi(t)=\begin{cases} 1, & -\pi\leqslant t<-\arccos\frac{3q-\sqrt{4-3q^2}}{4};\\ -1, & -\arccos\frac{3q-\sqrt{4-3q^2}}{4}\leqslant t<-\arccos\frac{3q+\sqrt{4-3q^2}}{4};\\ 1, & -\arccos\frac{3q-\sqrt{4-3q^2}}{4}\leqslant t<0;\\ 1, & 0\leqslant t<\arccos\frac{3q+\sqrt{4-3q^2}}{4};\\ -1, & \arccos\frac{3q+\sqrt{4-3q^2}}{4}\leqslant t<\arccos\frac{3q-\sqrt{4-3q^2}}{4};\\ 1, & \arccos\frac{3q-\sqrt{4-3q^2}}{4}\leqslant t<\pi;\end{cases}$$

належить до S_M^0. Отже співвідношення (2) є асимптотичною рівністю.

Тоді для $q\in(0;1)$ виконується

$$||\delta_n^{(2,1)}(\varphi;0)||_C=\frac{2q^3}{\pi p_1p_2}\Bigg[8J_1(t_{+q})-4J_1(0)-12qJ_2(t_{+q})+6qJ_2(0)+$$

$$+2(-1+3q^2)J_3(t_{+q})-(3q^2-1)J_3(0)-8J_1(t_{-q})+12qJ_2(t_{-q})-$$

$$-2(3q^2-1)J_3(t_{-q})+4J_1(\pi)-6qJ_2(\pi)+(3q^2-1)J_3(\pi)\Bigg]+O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1p_2(1-q)^5},$$

де

$$J_1(t)=\int\frac{\sin t\cos^2 t}{(1-2q\cos t+q^2)^3}dt;\ J_2(t)=\int\frac{\sin t\cos t}{(1-2q\cos t+q^2)^3}dt;$$

$$J_3(t)=\int\frac{\sin t}{(1-2q\cos t+q^2)^3}dt.$$

Оскільки

$$J_1(t)=\frac{1}{8q^3}\ln(1-2q\cos t+q^2)-\frac{(1+q^2)^2}{16q^3}(1-2q\cos t+q^2)^{-2}+$$

$$+\frac{(1+q^2)}{4q^3}(1-2q\cos t+q^2)^{-1};\ J_3(t)=-\frac{1}{4q}(1-2q\cos t+q^2)^{-2};$$

$$J_2(t)=\frac{1}{4q^2}(1-2q\cos t+q^2)^{-1}-\frac{1+q^2}{8q^2}(1-2q\cos t+q^2)^{-2},$$

то, виконуючи перетворення, отримуємо співвідношення (1). Теорема доведена.

Література

1. *Кадубовский А.А.* Приближение интегралов Пуассона r-повторными суммами Валле Пуссена / А.А. Кадубовский, О.А. Новиков, О.Г. Ровенская [та ін.] // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ. — 2012. — №2. — С. 23–27.
2. *Степанец А.И.* Решение задачи Колмогорова-Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Математический сборник. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113–138.
3. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Известия АН СССР. Сер. мат. — 1946. — Т. 10, № 3. — С. 207–256.
4. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1980. — Т. 145. — С. 126–151.
5. *Степанец А.И.* Приближения суммами Валле Пуссена / Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О. — К. : Ін-т математики НАН України, — 2007. — 386 с. — (Праці Ін-ту математики НАН України ; т. 68).
6. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена / А.С. Сердюк // Український математичний журнал. — 2004. — Т. 56, № 1. — С. 97–107.
7. *Новіков О.О.* Наближення класів інтегралів Пуасона операторами Фейєра / О.О. Новіков, О.Г. Ровенська, Ю.М. Воронцова [та ін.] // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2014. — №4. — С. 17–22.
8. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.