УДК 517.5

Новіков О.О., Овсій Є.Ю., Шаповалов М.С., Козаченко Ю.О.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, декан фізико-математичного факультету, ДДПУ*

[2] *науковий співробітник відділу теорії функцій, Інститут математики НАН України*

[3] *студент 5 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ*

[4] *студентка 1 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ЩОДО НАБЛИЖЕННЯ НЕСКІНЧЕННИХ МАТРИЦЬ

Запропоновене означення відносної норми елементів простору нескінченних матриць.

Keywords: *infinite matrix, Fourier series*

Сумою нескінчених матриць $X = \{x_{ij}\}; i \in N, j \in N,$ і $Y = \{y_{ij}\}; i \in N,$ $j \in N,$ будемо називати нескінчену матрицю $Z = \{z_{ij}\}; i \in N, j \in N,$ таку, що $z_{ij} = x_{ij} + y_{ij}; \forall i \in N, j \in N$. Будемо позначати $Z = [X + Y]$. Добутком нескінченої матриці $X = \{x_{ij}\}; i \in N, j \in N,$ на число λ називається нескінчена матриця $Z = \{z_{ij}\}; i \in N, j \in N,$ така, що $z_{ij} = \lambda x_{ij}; \forall i \in N, j \in N$.

Кожній нескінченій матриці $A = \{a_{ij}\}; i \in N, j \in N,$ поставимо у відповідність сім'ю матриць $A_n^m = \{a_{ij}\}; i = 1, 2, ..., n, j = 1, 2, ..., m,$ розміру $m \times n$ і сім'ю нескінченних матриць $\bar{A}_n^m = \{\alpha_{ij}\}; i \in N, j \in N$, де

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., m; \\ 0, & i = n+1, n+2, ...; j = m+1, m+2, ... \end{cases}$$

Різницею $A - A_n^m$ будемо називати матрицю $A - \bar{A}_n^m$. Зафіксуємо дві матриці-рядка $B = (b_1, b_2, ...)$, $C = (c_1, c_2, ...)$ і позначимо B^t, C^t матриці їм транспоновані. Нормою матриці $A = \{a_{ij}\}; i \in N, j \in N,$ відносно фіксованих напрямків $B = \{b_i\}; C = \{c_i\}; i \in N,$ будемо називати величину

$$||A||_{BC} = |B \times A \times C^t| = |\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} b_i c_j|. \tag{1}$$

Позначимо для фіксованих напрямків $B = \{b_i\}; C = \{c_i\}; i \in N,$ через $\mathfrak{P}_{BC}$ множину нескінчених матриць, які мають скінченну норму відносно напрямків $B = \{b_i\}; C = \{c_i\}; i \in N$.

Відхиленням матриці $U = \{u_{ij}\}; i \in N, j \in N$ від $A = \{a_{ij}\}; i \in N, j \in N,$ відносно $B = \{b_i\}; C = \{c_i\}; i \in N,$ будемо називати $||A - U||_{BC}$, де за означенням $A - U = \{a_{ij} - u_{ij}\}, i \in N, j \in N,$ і будемо вважати $||A - A_n^m||_{BC} = ||A - \bar{A}_n^m||_{BC}$.

Розглянемо приклад. Позначимо матриці-рядки,

$$B_0(x) = (\frac{1}{2}\ \cos x\ \ \cos 2x\ ...\ \cos kx\ ...); B_1(x) = (0\ \ \sin x\ \ \sin 2x\ ...\ \sin kx\ ...),$$

для $i = 0; 1, j = 0; 1,$ діагональні матриці

$$\bar{\Lambda}_{n,i} = \begin{pmatrix} \lambda_0^{(ni)} & 0 & 0 & ... & 0 & ... \\ 0 & \lambda_1^{(ni)} & 0 & ... & 0 & ... \\ 0 & 0 & \lambda_2^{(ni)} & ... & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_k^{(ni)} & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

такі, що $\lambda_k^{(ni)} = 0, i = 0, 1;$ для $k \geqslant n$. Позначимо через $q(k, \nu)$ – кількість нулів серед індексів k, ν величини $a_{k\nu}^{ij}$. Тоді для матриць

$$S(i,j) = \begin{pmatrix} a_{00}^{ij} & a_{10}^{ij} & a_{20}^{ij} & ... & a_{k0}^{ij} & ... \\ a_{01}^{ij} & a_{11}^{ij} & a_{21}^{ij} & ... & a_{k1}^{ij} & ... \\ a_{02}^{ij} & a_{12}^{ij} & a_{22}^{ij} & ... & a_{k2}^{ij} & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{0n}^{ij} & a_{1n}^{ij} & a_{2n}^{ij} & ... & a_{kn}^{ij} & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

отримуємо

$$B_i(x_1) \times S(i,j) \times B_j(x_2) =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} 2^{-q(k_1,k_2)} a_{k_1 k_2}^{ij} \cos(k_1 x_1 - i\pi/2) \cos(k_2 x_2 - j\pi/2);$$

$$\sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i(x_1) \times S(i,j) \times B_j(x_2) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} 2^{-q(k_1,k_2)} A_{k_1 k_2}(x_1, x_2), \qquad (2)$$

де

$$A_{k_1,k_2}(x_1, x_2) = a_{k_1,k_2}^{(01)} \cos k_1 x_1 \cos k_2 x_2 + a_{k_1,k_2}^{(01)} \cos k_1 x_1 \sin k_2 x_2 +$$
$$+ a_{k_1,k_2}^{(10)} \sin k_1 x_1 \cos k_2 x_2 + a_{k_1,k_2}^{(01)} \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2.$$

Нехай $\Lambda_{r,j}$ ліва верхня квадратна частина матриці $\bar{\Lambda}_{r,j}$, S_n^m – ліва верхня розміром $n \times m$ частина матриці S. Тоді

$$\sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i(x_1) \times [\Lambda_{n,0} \times S(i,j) \times \Lambda_{m,1}^t] B_j(x_2) =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} 2^{-q(k_1,k_2)} \lambda_{k_1}^{(n,0)} \lambda_{k_2}^{(n,1)} A_{k_1 k_2}(x_1, x_2) =$$

$$= \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i(x_1) \times [\Lambda_{n,0} \times S_n^m(i,j) \times \Lambda_{m,1}^t] B_j(x_2) =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{m} 2^{-q(k_1,k_2)} \lambda_{k_1}^{(n,0)} \lambda_{k_2}^{(n,1)} A_{k_1 k_2}(x_1, x_2). \qquad (3)$$

Якщо елементи матриць $S(i,j)$, $i = 0;1, j = 0;1,$ задовольняють певні умови, то ряд (2) є рядом Фур'є певної сумовної функції двох змінних [1], а величина (3) є певним прямокутним лінійним середнім цього ряду [2].

Будемо вважати матрицю $\Lambda_{n,0} \times S_n^m \times \Lambda_{m,1}^t$ розміром $n \times m$ наближенням нескінченної матриці S, а величину

$$||S - \Lambda_{n,0} \times S_n^m \times \Lambda_{m,1}^t||_{BC}$$

відхиленням матриці $\Lambda_{n,0} \times S_n^m \times \Lambda_{m,1}^t$ від матриці S у метриці простору $\mathfrak{P}_{BC}$.

Література

1. *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. — Киев: Наук. думка, 1981. — 340 с.
2. *Задерей П.В.* Интегральные представления уклонений линейных средних рядов Фурье на классах дифференцируемых периодических функций двух переменных // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций: Сб. научн. тр. / Отв. ред. В.К. Дзядык. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1985. — С. 16–28.