УДК 512.643.721:517.926

Пащенко З.Д., Шажко С.П.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри, ДДПУ*

[2] *студент 3 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ*

e-mail: pashchenko_zd@mail.ru; kidokid@i.ua

ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНА ФОРМА ТА КЛАСИФІКАЦІЯ ЛІНІЙНИХ ОДНОРІДНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

В статті показано алгоритм розв'язку лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь, що використовує жорданову нормальну форму матриці цієї системи та одержано класифікацію розв'язків такої системи третього порядку.

Ключові слова: *Жорданова нормальна форма, лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь, розв'язки лінійних однорідних систем диференціальних рівнянь.*

Вступ

В теорії лінійних операторів та теорії матриць окреме місце займає жорданова нормальна форма (ЖНФ) матриці. ЖНФ — це матриця, яка має найбільш простий вигляд в класі матриць, подібних до даної. Теорія ЖНФ досить докладно розглянута О.І. Кострикіним [1]. Практичне обчислення та застосування ЖНФ детально описані В.С. Мазорчуком [2]. Крім того, ним надано класифікацію жорданових матриць окремих порядків.

ЖНФ має широке застосування. Вона використовується не тільки в теоріях матриць та лінійних операторів. Ми розглядаємо використання ЖНФ для класифікації розв'язків лінійних однорідних систем диференціальних рівнянь (ЛОСДР). Взагалі диференціальні рівняння й методи дослідження їх розв'язків широко використовуються у різноманітних галузях і розділах сучасної науки й техніки. Тому дослідження диференціальних рівнянь залишається актуальним як у сучасній науці, так і у підготовці спеціалістів з математики, інформатики, прикладної математики тощо. Ці питання висвітлювалися А.М. Самойленком, М.О. Перестюком, І.О. Парасюком, Т.П. Гоєм, О.В. Махнеєм, В.І. Арнольдом.

В даній роботі розглядається класифікація розв'язків ЛОСДР зі сталими коефіцієнтами третього порядку з дійсною матрицею системи, враховуючи класифікацію ЖНФ таких матриць.

Основна частина

Лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь n-го порядку зі сталими коефіцієнтами можна записати у вигляді

$$\frac{dY}{dt} = AY \tag{1}$$

де A — квадратна матриця n–го порядку, Y — стовпчик невідомих функцій $y_1, y_2, ..., y_n, ...,$ $\frac{dY}{dt}$ — стовпчик похідних цих функцій.

Традиційно в теорії диференціальних рівнянь розв'язок ЛОСДР шукається у вигляді показникових функцій в такому вигляді:

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda t},\ y_2 = \gamma_2 e^{\lambda t}, ...,\ y_n = \gamma_n e^{\lambda t}, \tag{2}$$

де $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ і λ — константи, які можна визначити так, щоб вирази (2) задовольняли системі (1). Цей розв'язок зводиться до розв'язку системи:

$$(A - \lambda E)\Gamma = 0. \tag{3}$$

Система (3) є системою n лінійних однорідних рівнянь відносно стовпчика Γ невідомих $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ з матрицею $M(\lambda) \equiv (A - \lambda E)$ Отже, розв'язок виду (2) системи (1) може існувати в тому і тільки в тому випадку, якщо λ є корінь характеристичного рівняння $|A - \lambda E| = 0$, тобто є власним значенням матриці A. Частинні розв'язки системи (3) є власними векторами, що відповідають всім власним значенням матриці A.

Максимальне число лінійно незалежних власних векторів, що відповідають власному значенню λ, дорівнює $n - r$, де $r = \text{rang}\ M(\lambda)$.

Кратність m числа λ як кореня характеристичного многочлену називається **алгебраїчною кратністю власного значення** λ. Відоме твердження про те, що $n - r \leqslant m$. Зразу зауважимо, що сума алгебраїчних кратностей всіх коренів характеристичного рівняння $|A - \lambda E| = 0$ дорівнює n.

Нехай $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ — всі власні значення, повторені стільки разів, скільки дорівнює їх алгебраїчна кратність. Якщо $m_j = n - r_j$, то ми отримаємо n лінійно незалежних власних векторів $(k_1^{(j)}, k_n^{(j)}, ..., k_n^{(j)}), j = 1, 2, ..., n$, що відповідають власним значенням λ_j, [1]. Всім цим власним векторам $k^{(j)} = (k_1^{(j)}, k_n^{(j)}, ..., k_n^{(j)})$, які є розв'язками системи (3) при $\lambda = \lambda_j$, відповідає n частинних розв'язків системи (1) виду

$$y_1^{(j)} = k_1^{(j)} e^{\lambda_j t}, y_2^{(j)} = k_2^{(j)} e^{\lambda_j t}, ..., y_n^{(j)} = k_n^{(j)} e^{\lambda_j t}. \tag{4}$$

Нам відомо, що лінійна комбінація частинних розв'язків системи однорідних рівнянь знову буде розв'язком цієї системи однорідних рівнянь. Тому загальний розв'язок системи (1) ми можемо записати як лінійну комбінацію частинних розв'язків-стовпчиків $Y^{(j)}$ виду (4), що буде виглядати як лінійна комбінація власних векторів-стовпчиків $k^{(j)}$:

$$Y = C_1 k^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 k^{(2)} e^{\lambda_2 t} + ... + C_n k^{(n)} e^{\lambda_n t} \tag{5}$$

де $C_j, j = 1, 2, ..., n$ – довільні дійсні числа.

Зауваження 1. *Якщо характеристичний многочлен з дійсними коефіцієнтами має корінь* $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\beta \neq 0$, *то він також має корінь* $\lambda_2 = \alpha - \beta i$. *Відповідні розв'язки будуть мати вигляд:*

$$\tilde{y}_j^{(1)} = e^{\alpha t}(l_j^{(1)} \cos \beta t - l_j^{(2)} \sin \beta t), \tilde{y}_j^{(2)} = e^{\alpha t}(l_j^{(1)} \sin \beta t + l_j^{(2)} \cos \beta t) \tag{6}$$

де $l_j^{(1)}$ *і* $l_j^{(2)}$ *— дійсні числа.*

Це зауваження приводить до зміни вигляду (5) загального розв'язку.

Якщо існує λ_i, що $m_i > n - r_i$, то ми не отримаємо n лінійно незалежних власних векторів. Щоб знайти розв'язки, яких не вистачає для кожного такого кореня, ми повинні шукати розв'язки у вигляді лінійних комбінацій функцій $e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, ..., t^{m_i - 1} e^{\lambda_i t}$ в такому вигляді:

$$y_j = b_{j1} e^{\lambda_i t} + b_{j2} t e^{\lambda_i t} + ... + b_{j m_i} t^{m_i - 1} e^{\lambda_i t}, j = 1, ..., n, \tag{7}$$

де $b_{ji}, j = 1, ..., n; i = 1, ..., m$ – константи, які можна визначити так, щоб вирази (7) задовольняли системі (1). В результаті ми одержимо однорідну систему лінійних рівнянь з $n \cdot m$ невідомими. Кожен розв'язок ФСР цієї системи дасть розв'язок типу (7), а множина всіх лінійних комбінацій цих розв'язків дасть загальний розв'язок.

Класифікуючи загальні розв'язки ЛОСДР зі сталими коефіцієнтами третього порядку з дійсною матрицею системи за традиційними методами розв'язування та врахуванням умов $m_j \geqslant n - \mathrm{rang} M(\lambda_j)$, ми можемо виділити наступні випадки:

1* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — різні прості дійсні корені $|A - \lambda E| = 0$

2* λ_1 — простий дійсний корінь, λ_2 — дійсний корінь кратності 2, $\mathrm{rg}\ M(\lambda_2) = 1$

3* λ — дійсний корінь кратності 3, $\mathrm{rg}\ M(\lambda) = 0$.
Для випадків 1^*–3^* розв'язки мають вигляд (5).

4* λ_1 — простий дійсний корінь, $\lambda_2, \overline{\lambda_2}$ — уявні прості спряжені корені.
Для цього випадку розв'язки враховують вигляд (6).

5* λ_1 — простий дійсний корінь, λ_2 — дійсний корінь кратності 2, $\mathrm{rg}\ M(\lambda_2) = 2$

6* λ — дійсний корінь кратності 3, $\operatorname{rg} M(\lambda) > 0$.

У випадках $5^*–6^*$ для одержання розв'язків використовується вигляд (7).

ЖНФ матриці третього порядку за клітинно-діагональним виглядом також мають шість типів [2].

1^0 $J_3(\lambda)$, де $\lambda \in C$

2^0 $J_1(\lambda_1) \oplus J_2(\lambda_2)$, де $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in C$;

3^0 $J_1(\lambda_1) \oplus J_2(\lambda_2)$, де $\lambda \epsilon C$;

4^0 $J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_2) \oplus J_1(\lambda_3)$, де $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \in C$;

5^0 $J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_2) \oplus J_1(\lambda_2)$, де $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in C$;

6^0 $J_1(\lambda) \oplus J_1(\lambda) \oplus J_1(\lambda)$, де $\lambda \in C$;

Щоправда в цій класифікації випадки 1^* і 4^* відносяться до одного типу 4^0, а випадок 6^* розподіляється на два типи 1^0 і 3^0 ($2^* = 5^0$, $3^* = 6^0$, $5^* = 2^0$).

Розглянемо систему (1) у вигляді рівняння $\frac{dY}{dt} = AY$ з іншого боку. Нехай $T = (t_{ij})$ — довільна невироджена матриця, $Y = (y_i)$ — стовпчик невідомих функцій і $X = TY$. Тоді

$X = (x_i) = \left(\sum_j t_{ij} y_j\right)$, $X' = (x_i') = \left(\sum_j t_{ij} y_j'\right) = TY'$, а також $Y = T^{-1}X$ та $Y' = T^{-1}X'$. Помножимо рівняння (1) зліва на T. Одержимо еквівалентне рівняння:

$$\frac{dX}{dt} = T\frac{dY}{dt} = TAY = (TAT^{-1})X. \tag{8}$$

Нехай J — відповідна ЖНФ матриці A, тоді існує невироджена матриця U, що $J = U^{-1}AU$. Матриця U складається із векторів-стовпчиків, що утворюють жордановий базис. Якщо в попередніх позначеннях взяти $T = U^{-1}$, то рівняння (8) буде мати вигляд

$$\frac{dX}{dt} = (U^{-1}AU)X = JX. \tag{9}$$

Таким чином, розв'язок системи (1) можна знаходити як $Y = UX$, де X — розв'язок системи $\frac{dX}{dt} = JX$. Тому і класифікацію розв'язків системи (1) можна проводити по класифікації жорданових матриць. Оскільки для дійсних матриць третього порядку буде шість різних типів жорданових матриць у відповідності до класифікації [2], то, розв'язуючи систему $\frac{dX}{dt} = JX$ для кожного типу, ми отримали такі розв'язки:

1^0 $X = \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} + C_3 t^2 e^{\lambda t} \\ C_2 e^{\lambda t} + 2C_3 t e^{\lambda t} \\ 2C_3 e^{\lambda t} \end{pmatrix}$;

$$2^0 \;\; X = \begin{pmatrix} C_1e^{\lambda_1 t} \\ C_2e^{\lambda_2 t} + C_3te^{\lambda_2 t} \\ C_3e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}; \quad 3^0 \;\; X = \begin{pmatrix} C_1e^{\lambda t} \\ C_2e^{\lambda t} + C_3te^{\lambda t} \\ C_3e^{\lambda t} \end{pmatrix};$$

$$4^0 \;\; X = \begin{pmatrix} C_1e^{\lambda_1 t} \\ C_2e^{\lambda_2 t} \\ C_3e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}; \quad 5^0 \;\; X = \begin{pmatrix} C_1e^{\lambda_1 t} \\ C_2e^{\lambda_2 t} \\ C_3e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}; \quad 6^0 \;\; X = \begin{pmatrix} C_1e^{\lambda t} \\ C_2e^{\lambda t} \\ C_3e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

де $C_j, j = 1, 2, 3$ — довільні дійсні числа.

Звичайно, випадок 4^0 для дійсних матриць розпадається на два випадки, якщо виділити випадок λ_1 — простий дійсний корінь, $\lambda_2, \bar{\lambda}_2$ — уявні прості спряжені корені.

Дана класифікація розв'язків систем $\frac{dX}{dt} = JX$ може бути використана для розв'язку системи (1) $\frac{dY}{dt} = AY$ за наступним алгоритмом:

1) Знаходяться ЖНФ J матриці A та матриця U, що складається із векторів-стовпчиків, які утворюють відповідний жордановий базис.
2) Визначається тип матриці J та обирається відповідний загальний розв'язок X.
3) Загальний розв'язок системи (1) обчислюється як $Y = UX$.

Висновки

ЖНФ матриці ЛОСДР суттєво впливає на вид загального розв'язку такої системи. Жорданові матриці різного клітинного типу визначають різні види загального розв'язку ЛОСДР. В статті показано алгоритм розв'язку системи $\frac{dY}{dt} = AY$, що використовує ЖНФ матриці цієї ЛОСДР та одержано класифікацію розв'язків такої системи третього порядку. Дану класифікацію можна розвивати для інших порядків ЛОСДР.

Література

1. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра: учебник для вузов. — 2-е изд., исправл. — М.: Физико-математическая литеретура, 2001. — 368 с.
2. *Мазорчук В. С.* Методичний посібник до теми «Жорданова нормальна форма» для студентів механіко-математичного факультету. — Київ: Київський університет імені Тараса Шевченка, 1998. — 123 с.
3. *Самойленко А.М. Перестюк М.О., Парасюк І.О.* Диференціальні рівняння: навчальний посібник. — К.: Либідь, 2003. — 347 с.
4. *Гой Т.П., Махней О.В.* Диференціальні рівняння: навчальний посібник. — Івано-Франківськ : Сімик, 2012. — 352 с.