

¹ кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДДПУ

² студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ

e-mail: kadubovs@ukr.net, voschanaya_lina@mail.ru

ПРО ЧИСЛО НЕЕКВІВАЛЕНТНИХ ДВОКОЛЬОРОВИХ ХОРДОВИХ O -ДІАГРАМ МАКСИМАЛЬНОГО РОДУ

Для цілих $0 \leq g \leq 9$ визначено число нееквівалентних 2-кольорових хордових O -діаграм (з n хордами), які містять лише один чорний та один білий цикл (2-кольорові хордові O -діаграми максимального роду), відносно дії дієдральної групи (порядку $2n$)

Ключові слова: 2-кольорова хордова O -діаграма, максимальний рід, група дієдра

Вступ

Конструкції, схожі до кола з відміченими точками, зокрема хордові діаграми, ефективно використовують в багатьох галузях науки, зокрема математиці (топології, теорії вузлів), фізиці, біології.

Нагадаємо, що хордовою діаграмою порядку n або, коротко, n -діаграмою називають конфігурацію на площині, що складається з кола, $2n$ точок на ньому (які є вершинами правильного $2n$ -кутника) та n хорд, що сполучають вказані точки. Хордові діаграми називають ізоморфними, якщо одну можна одержати з іншої в результаті повороту. Діаграми називають еквівалентними, якщо їх можна сумістити за допомогою повороту, дзеркального відбиття, або ж їх композиції.

Питаннями переліку певних класів хордових діаграм займалась ціла низка відомих математиків, зокрема автори робіт [5], [3], [6], [2]. Задачі про підрахунок числа неізоморфних та нееквівалентних n -діаграм були повністю розв'язані в роботах [3], [6]. Формули для підрахунку числа неізоморфних планарних (роду 0), тороїдальних (роду 1) n -діаграм та $2m$ -діаграм максимального роду m встановлено в [3]. Формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних планарних 2-кольорових n -діаграм встановлено в [2].

Підрахунок числа неізоморфних, зокрема двокольорових, n -діаграм фіксованого роду є досить складною і в загальному випадку до сьогодні нерозв'язаною задачею.

Формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних двокольорових O - і N -діаграм відповідно встановлено в роботі [9]. В [10] одержано формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних O -діаграм, які мають один чорний (або ж білий) цикл. Задача про підрахунок числа неізоморфних O -діаграм максимального роду (з одним чорним та одним білим циклом) повністю розв'язана в [8]. Проте питання про підрахунок числа нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи) O -діаграм максимального роду й досьогодні залишається відкритим.

В даній роботі для натуральних $n \in \{1, 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 19\}$ встановлено число нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи) 2-кольорових O -діаграм максимального роду. Крім того, для випадків $n = 1; 3; 5; 7; 9$ в явному вигляді наведено всі неізоморфні симетричні такі діаграми.

1. Основні поняття та попередні відомості

Означення 1. Коло з $2n$ точками на ньому (що є вершинами правильного $2n$ -кутника), дуги якого по чергово розфарбовані у два кольори (чорний і білий) та фіксованою нумерацією вершин за годинниковою стрілкою, будемо називати двокольоровим $2n$ -шаблоном — рис. 1 а).

2-кольоровою хордовою n -діаграмою будемо називати n -діаграму, побудовану на основі двокольорового $2n$ -шаблону.

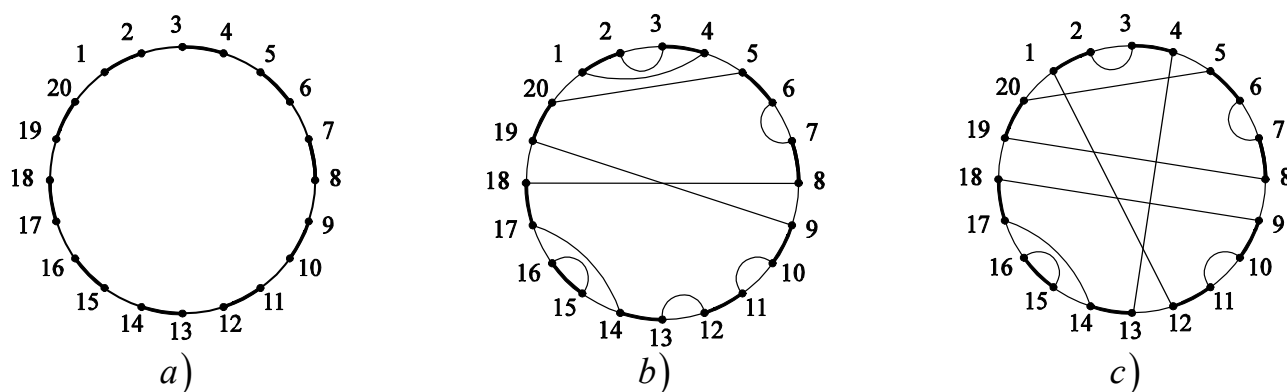


Рис. 1:

- а) двокольоровий 20-шаблон;
- б) N -діаграма (з 10 хордами), яка має 7 білих та 3 чорних циклів;
- в) O -діаграма (з 10 хордами), яка має 6 білих та 3 чорних циклів

Означення 2. 2-кольорову n -діаграму, яка не містить (містить) хорди, що сполучає вершини з номерами однакової парності, називають O -діаграмою (N -діаграмою) — рис. 1 с), б).

Означення 3. «Чорним» («білим») циклом 2-кольорової діаграми називатимемо послідовність хорд та чорних (білих) дуг, які утворюють гомеоморфний образ (орієнтованого) кола — рис. 1 b) — c).

Приклад 1. Поняття чорного (білого) циклу 2-кольорової *O*-діаграми проілюструємо на прикладі діаграми, зображеної на рис. 1 c). Через $(i, i + 1)$ позначимо орієнтовану дугу $2n$ -шаблону, а через $[i, j]$ — хорду, яка сполучає вершини з номерами i, j . Тоді чорні BC_k та білі WC_l цикли діаграми можна подати у вигляді

чорні цикли діаграми:

$$\begin{aligned} BC_1 &= \\ &= (1, 2)[2, 3](3, 4)[4, 13](13, 14)[14, 17](17, 18)[18, 9](9, 10)[10, 11](11, 12)[12, 1]; \\ BC_2 &= (5, 6)[6, 7](7, 8)[8, 19](19, 20)[20, 5]; \\ BC_3 &= (14, 15)[15, 16](16, 17)[17, 14]; \end{aligned}$$

білі цикли діаграми:

$$\begin{aligned} WC_1 &= (2, 3)[3, 2]; \quad WC_2 = (6, 7)[7, 6]; \quad WC_3 = (8, 9)[9, 18](18, 19)[19, 8]; \\ WC_4 &= (10, 11)[11, 10]; \quad WC_5 = (12, 13)[13, 4](4, 5)[5, 20](20, 1)[1, 12]; \\ WC_6 &= (14, 15)[15, 16](16, 17)[17, 14]. \end{aligned}$$

Якщо проігнорувати колір, то кожен чорний (білий) цикл 2-кольорової *O*-діаграми співпадає з відповідним циклом непофарбованої діаграми. Тоді наслідуючи [3], природнім чином визначається рід 2-кольорової *O*-діаграми, а саме

Означення 4. Родом 2-кольорової *O*-діаграми будемо називати ціле число g , яке визначається рівністю

$$g = \frac{n + 1 - \lambda}{2}, \tag{1}$$

де λ — сумарне число чорних і білих циклів діаграми.

Означення 5. Множину *O*-діаграм з n хордами (побудованих на 2-кольоровому $2n$ -шаблоні), які мають точно 1 чорний цикл будемо позначати $\mathfrak{S}_{1;n}^O$. Діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1;n}^O$, які мають точно 1 білий цикл називатимемо діаграмами максимального роду, а множину таких діаграм позначатимемо $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$.

Введемо далі наступні позначення:

S_n — симетрична група;

CS_n — множина перестановок з S_n , які розкладаються в цикл довжини n ;

$CS_n^* = \{b \in CS_n \mid b \circ \tau^{-1} \in CS_n\}$, де $\tau = (1, 2, \dots, n) \in CS_n$.

В роботі [8] було встановлено, що кожна діаграму $D \in \mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ можна ото-тожнити з певним циклом $b \in CS_n^*$. А саме

Твердження А. Діаграма $D(b) \in \mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ тоді і лише тоді, коли $w(b) = \tau \circ b^{-1} = (b \circ \tau^{-1})^{-1}$ є циклом довжини n . Тобто, $D(b) \in \mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ тоді і лише тоді, коли $b \in CS_n^*$.

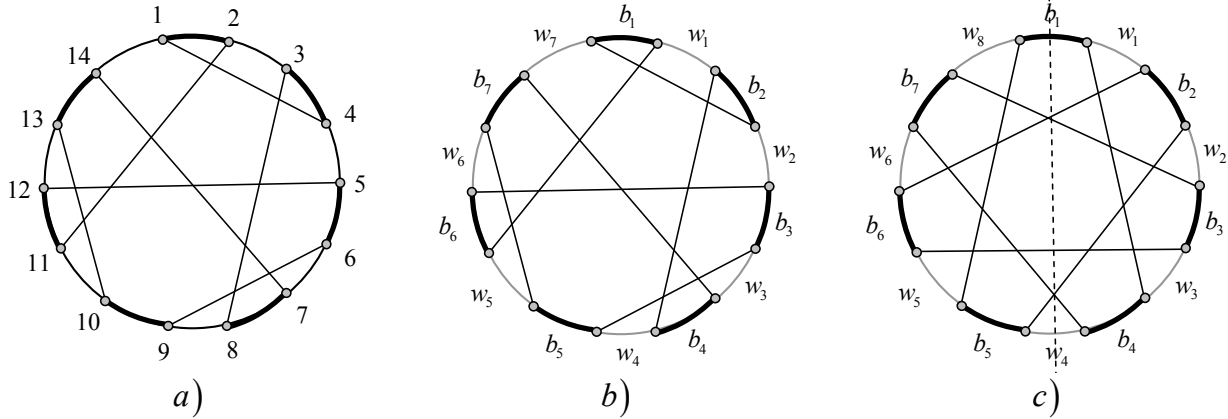


Рис. 2: a), b) діаграма $D(b) \in \mathfrak{S}_{1,1;7}^O$, $b = (1, 6, 3, 5, 7, 4, 2)$; c) діаграма $D(b) \in \mathfrak{S}_{1,1;7}^O$, що є симетричною відносно осі симетрії 14-шаблону, яка проходить через його центр та середину чорної дуги b_1

Нагадаємо основну ідею. Орієнтуємо коло діаграми за годинниковою стрілкою. І нехай діаграма $D \in \mathfrak{S}_{1;n}^O$. Під обходом чорних дуг b_j діаграми $D \in \mathfrak{S}_{1;n}^O$, починаючи з чорної дуги b_1 будемо розуміти послідовність номерів $b = (1, j_2, j_3, \dots, j_n)$ чорних дуг, які зустрічаються при слідуванні по єдиному чорному її циклу — рис. 2 b). Тоді кожен такий цикл $b \in CS_n$ однозначно визначає хорди діаграми $D(b) \in \mathfrak{S}_{1;n}^O$, а тому й саму діаграму, і навпаки. І тому цикл b цілком визначає й обходи білих дуг білих циклів діаграми $D(b) \in \mathfrak{S}_{1;n}^O$. Не важко перевірити, що якщо

$$b = (1, j_2, \dots, j_n) = \begin{pmatrix} 1 & j_2 & \dots & j_{n-1} & j_n \\ j_2 & j_3 & \dots & j_n & 1 \end{pmatrix} \in CS_n \quad (2)$$

— обхід чорних дуг діаграми $D(b) \in \mathfrak{S}_{1;n}^O$, то обхід $w = w(b)$ білих дуг цієї діаграми (також за рухом годинникової стрілки) можна подати у вигляді:

$$w(b) = \begin{pmatrix} j_2 - 1 & j_3 - 1 & \dots & j_n - 1 & n \\ 1 & j_2 & \dots & j_{n-1} & j_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

Більше того, для довільного $b \in CS_n$ виконується рівність

$$w(b) \circ b = \begin{pmatrix} j_2 - 1 & j_3 - 1 & \dots & j_n - 1 & n \\ j_2 & j_3 & \dots & j_n & 1 \end{pmatrix} = (1, 2, \dots, n - 1, n) = \tau. \quad (4)$$

Оскільки для кожної діаграми $D(b) \in \mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ $w(b) = \tau \circ b^{-1}$ є циклом довжини n ($w(b) \in CS_n$), то з останнього й випливає справедливість твердження А.

Приклад 2. Діаграму, зображену на рис. 2 а, b), можна ототожити із циклом $b = (1, 6, 3, 5, 7, 4, 2)$. Не важко також перевірити, що білий цикл $w = (1, 4, 3, 7, 2, 6, 5,)$ цієї діаграми можна подати у вигляді $w = \tau \circ b^{-1}$.

Як наслідок з робіт [1], [8] маємо, що для довільного парного n $|\mathfrak{S}_{1,1;n}^O| = 0$, а для непарного $n = 2g + 1$ визначається за формулою

$$|\mathfrak{S}_{1,1;n}^O| = \frac{2(n-1)!}{n+1} = \frac{(2g)!}{g+1}. \tag{5}$$

Більше того, в [8] доведено справедливість твердження

Теорема А. Для непарного натурального n число d_n^* неізоморфних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ можна обчислити за формулою

$$d_n^* = \frac{1}{n} \left(\frac{2(n-1)!}{n+1} + \sum_{i|n, i \neq n} \varphi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \frac{2(i-1)!}{i+1} \cdot \varphi^*\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^{i-1} \right), \tag{6}$$

де $\varphi(n)$ – функція Ейлера (кількість натуральних менших за n чисел i взаємно простих із ним, тобто $\varphi(n) = |\{1 \leq h < n | \text{НСД}(h, n) = 1\}|$), яка для натуральних $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ визначається за формулою

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right), \tag{7}$$

а величина $\varphi^*(n)$ ($\varphi^*(n) = |\{1 \leq h < n | \text{НСД}(h, n) = 1 = \text{НСД}(h+1, n)\}|$) для натуральних $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ визначається за формулою

$$\varphi^*(n) = n \cdot \left(1 - \frac{2}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{2}{p_k}\right). \tag{8}$$

2. Основна частина

Застосовуючи лему Бернсайда (див. напр. [3], [6], [9], [10]), не важко встановити, що число d_n^{**} орбіт групи діедра D_{2n}^* , що діє на множині $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ (число нееквівалентних *O*-діаграм максимального роду) можна визначити за допомогою співвідношення

$$d_n^{**} = \frac{1}{2} \left(d_n^* + \frac{1}{n} \cdot S(n) \right), \tag{9}$$

де d_n^* – число неізоморфних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$, а

$S(n)$ — число діаграм з $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$, що є симетричними відносно хоча б одної з n осей симетрії, що проходять через середини протилежних чорної та білої дуг 2-кольорового $2n$ -шаблону.

Оскільки число діаграм, симетричних відносно кожної з n зазначених осей симетрії є однаковим, то (9) можна подати у вигляді

$$d_n^{**} = \frac{1}{2} (d_n^* + s(n)), \tag{10}$$

де $s(n)$ — число діаграм з $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$, що є симетричними відносно **фіксованої осі симетрії**, яка проходить через середини протилежних чорної та білої дуг 2-кольорового $2n$ -шаблону.

Таким чином, з урахуванням співвідношення (10) та відомої формули (6) для обчислення величини d_n^* , задача про підрахунок числа d_n^{**} нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ зводиться до задачі про підрахунок числа тих діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$, що є симетричними відносно **фіксованої осі симетрії** (яка проходить через середини протилежних чорної та білої дуг) 2-кольорового $2n$ -шаблону —рис. 2 с).

2.1. Число симетричних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$

Нижче для натуральних $n = 1; 3; 5; 7; 9$ в явному вигляді наведено всі (неізоморфні) симетричні діаграми з відповідних класів $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$.



Рис. 3: а) єдина діаграма з класу $\mathfrak{S}_{1,1;1}^O$, б) єдина діаграма з класу $\mathfrak{S}_{1,1;3}^O$

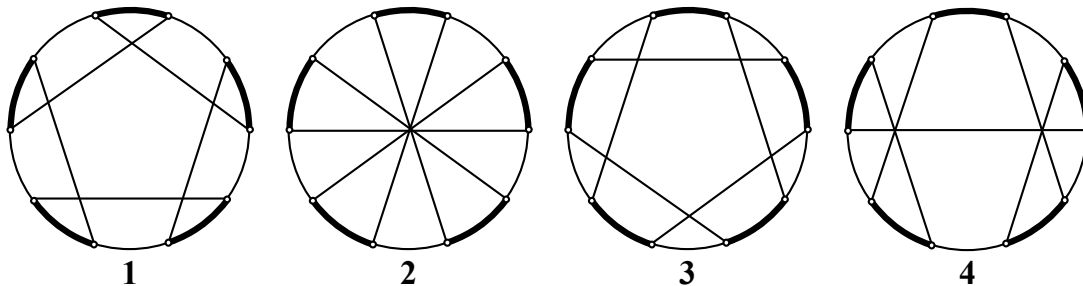


Рис. 4: всі (неізоморфні) симетричні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,1;5}^O$

Не важко бачити, що у випадку $n = 7$ (рис. 5 нижче) діаграми $\{21, 22\}$; $\{23, 24\}$; $\{26, 27\}$; $\{28, 29\}$; $\{25, 30\}$ є еквівалентними під дією групи дієдра. І тому існує лише $30 - 10 + 5 = 25$ нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;7}^O$.

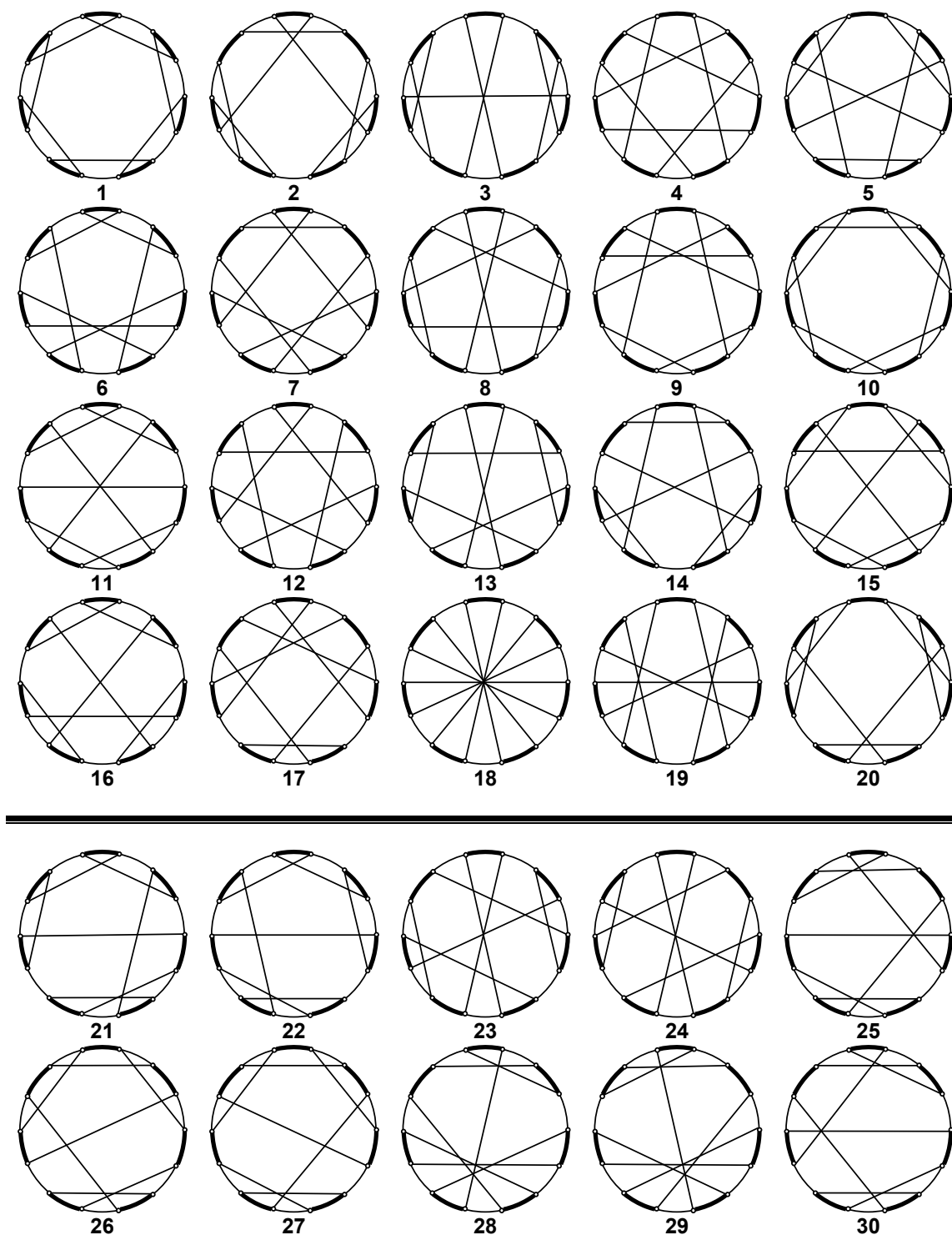
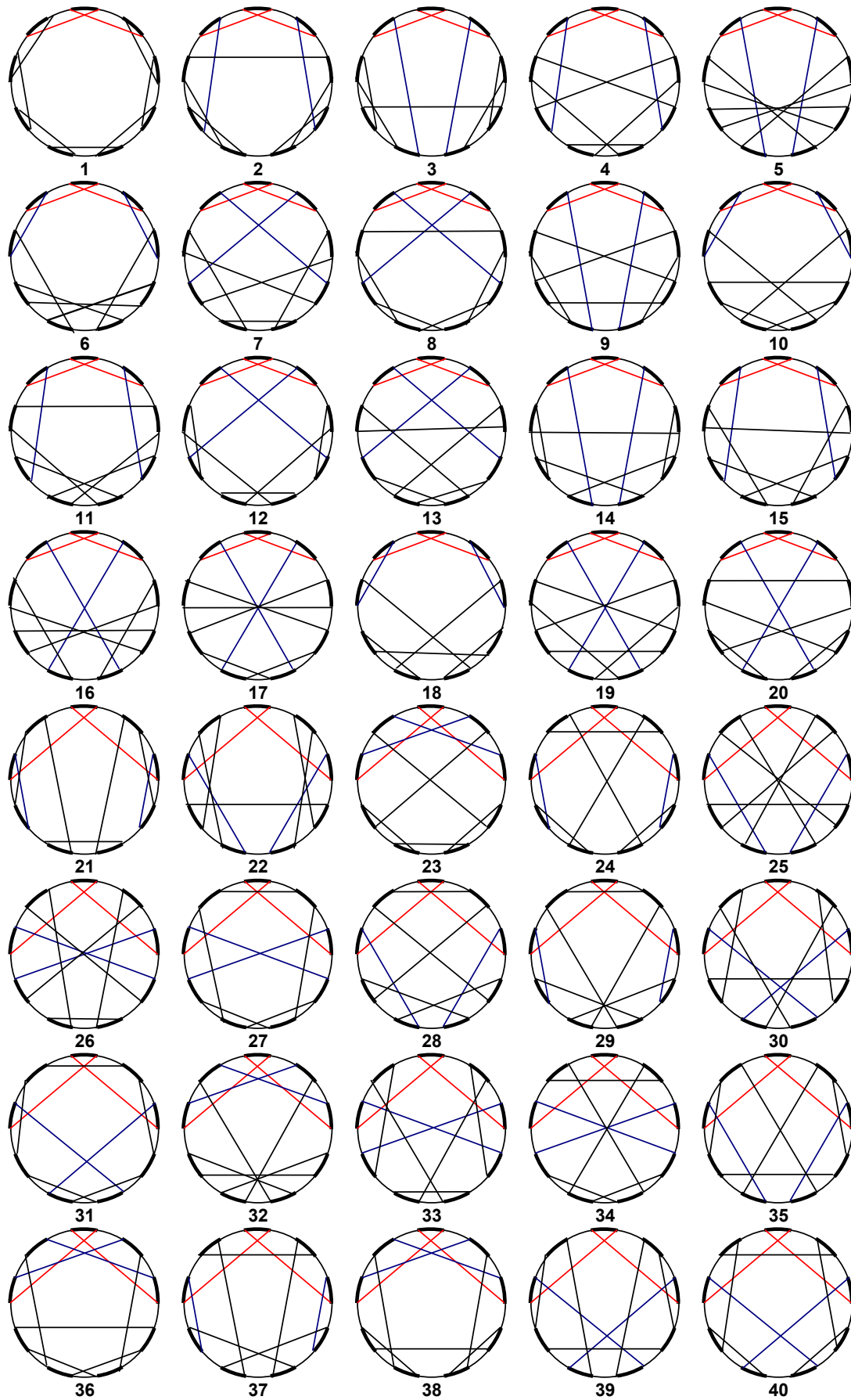
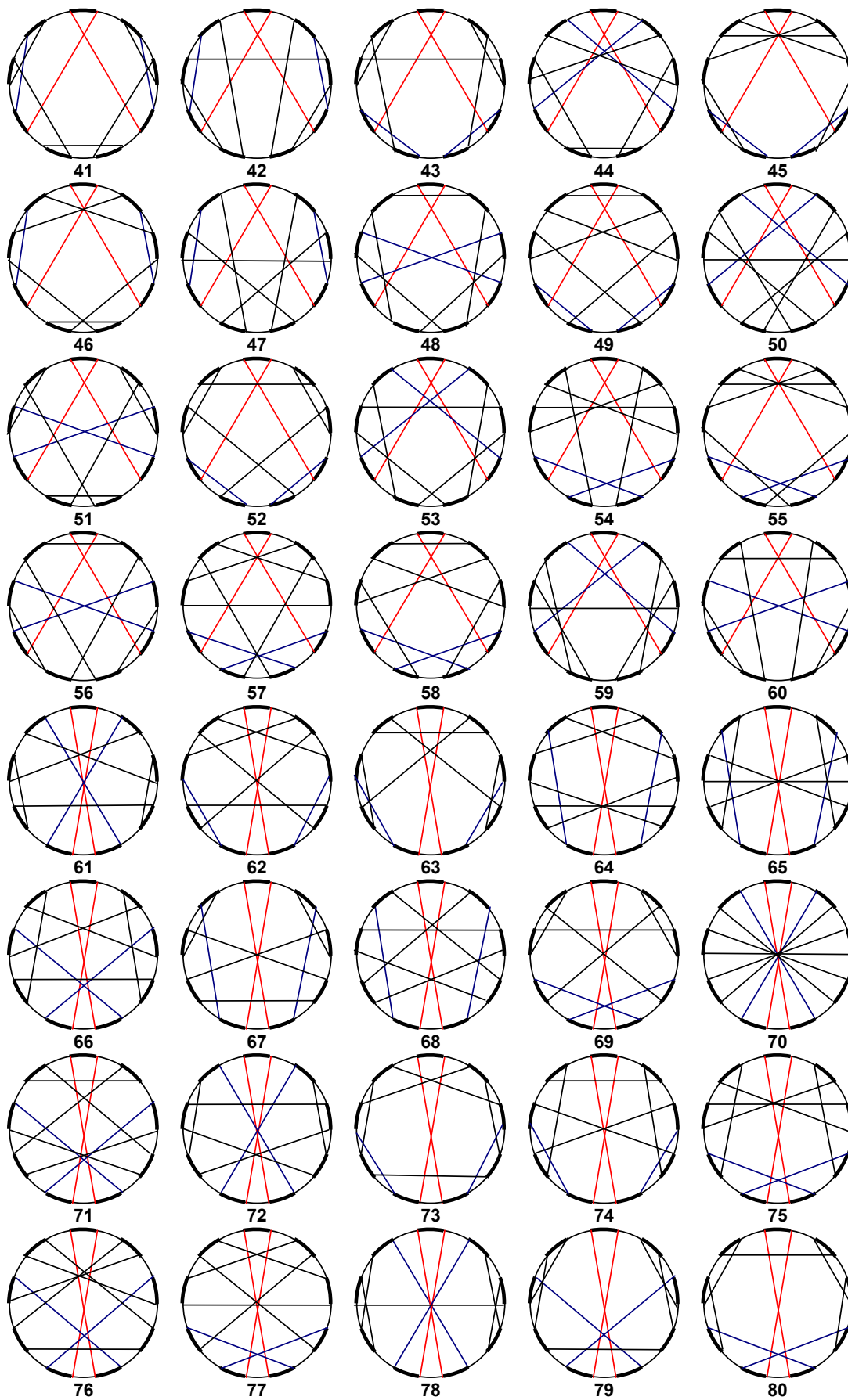
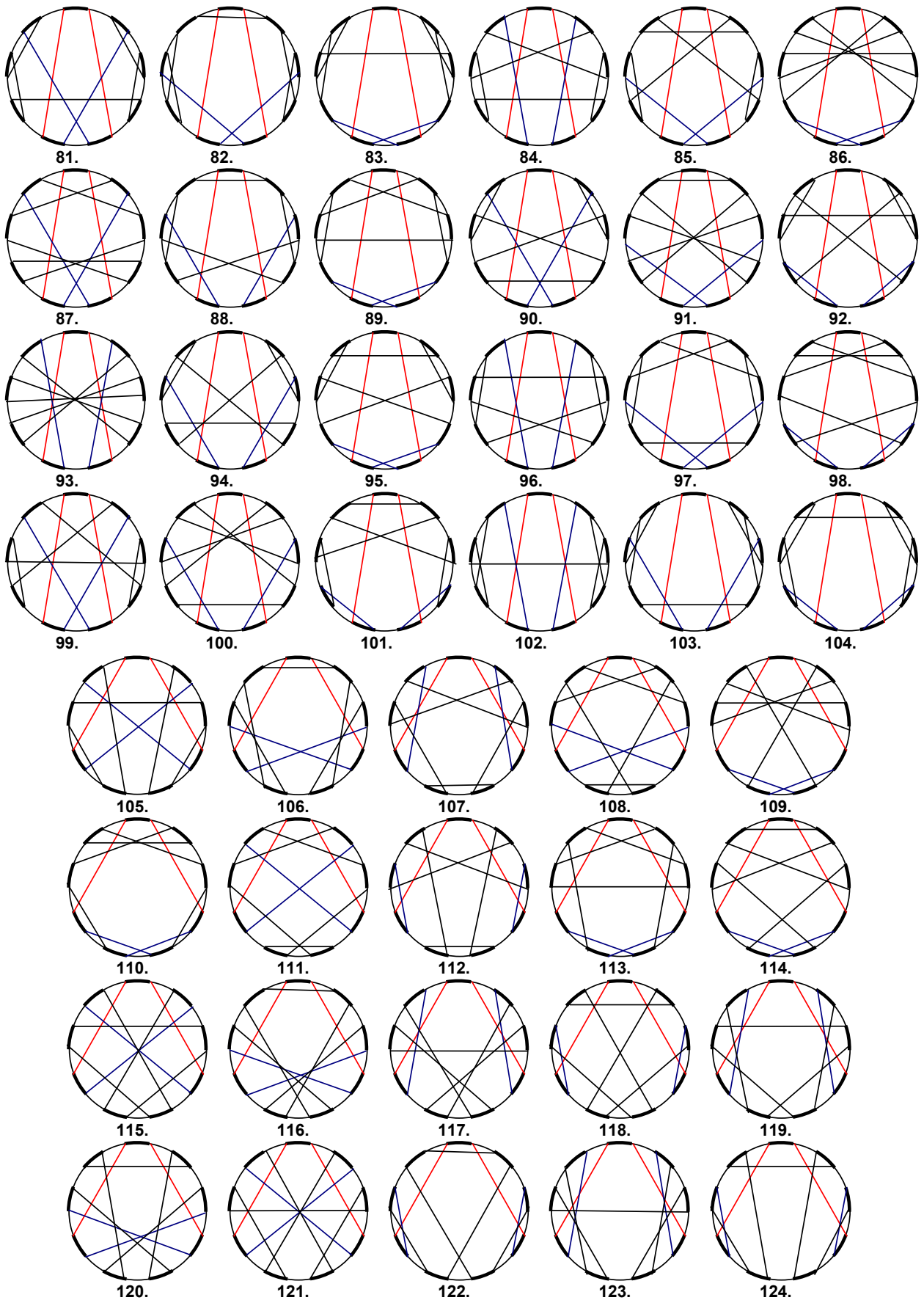


Рис. 5: всі неізоморфні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,1;7}^O$

Нижче на рис. 6 зображено всі 148 (неізоморфних) симетричних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;9}^O$.







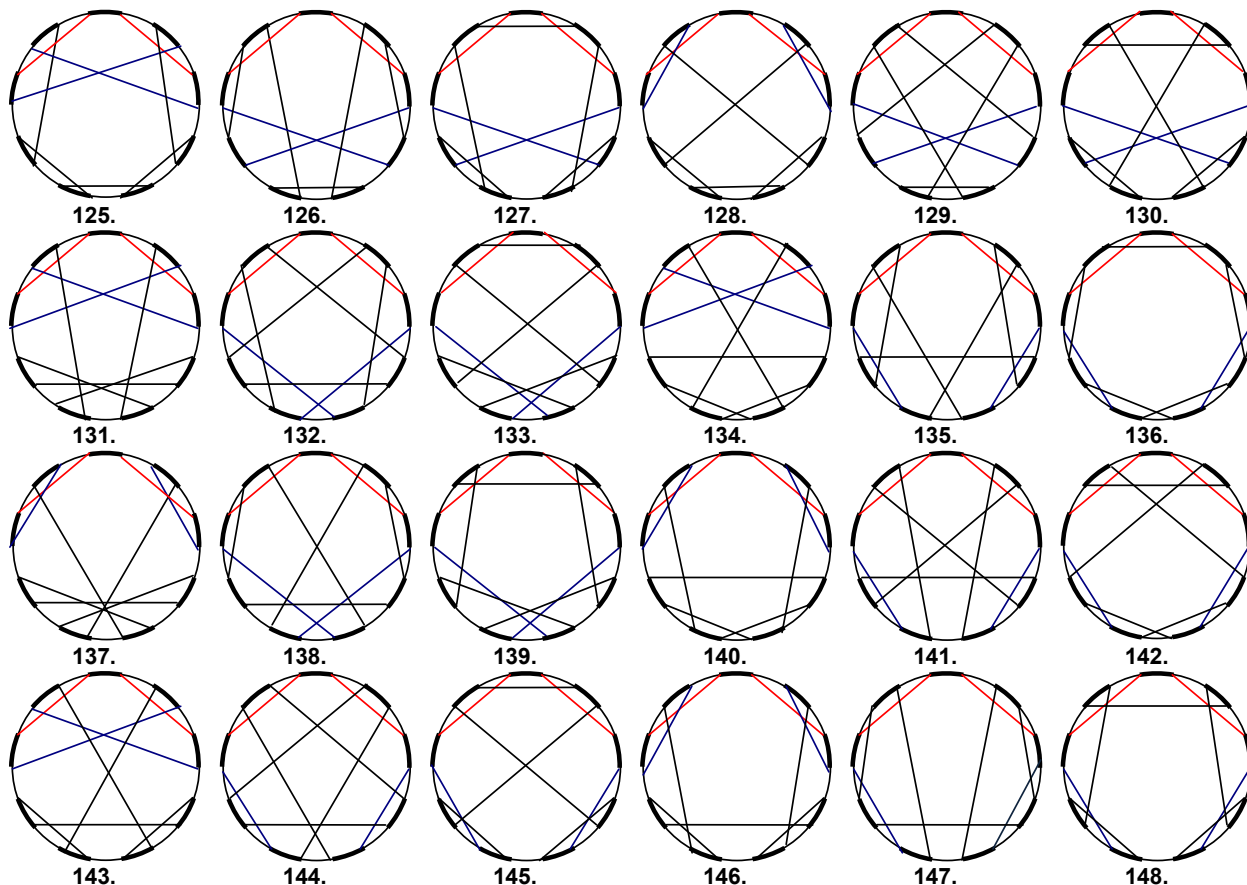


Рис. 6: всі (неізоморфні) симетричні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,1;9}^O$

Зауваження 1. Як випливає з результатів роботи [10], кожній діаграмі $D \in \mathfrak{S}_{1;n}^O$ ($n = 2m + 1$), що є симетричною відносно тієї осі симетрії $2n$ -шаблону, яка проходить через його центр та середину чорної дуги b_1 (рис. 2 с), однозначно можна поставити у відповідність «симетричний» цикл довжини n , а саме цикл виду

$$b' = (j'_{m+1}, \dots, j'_3, j'_2, \boxed{1}, j_2, j_3, \dots, j_{m+1}), \tag{11}$$

де $j'_i = 2m + 3 - j_i \ \forall i \in \{2, \dots, m + 1\}$, а $1, j_2, j_3, \dots, j_{m+1}$ – суть номери перших $(m + 1)$ чорних дуг $2n$ -шаблону, які зустрічаються при обході (починаючи з першої чорної дуги за годинниковою стрілкою) єдиного чорного циклу діаграми. Причому $\forall k, l \in \{2, \dots, m + 1\} \ j_k + j_l \neq 2m + 3$.

І навпаки, будь-який цикл b' виду (11), у якому $\forall i \in \{2, \dots, m + 1\} \ j_i \in \{2, 3, \dots, 2m + 1\}$, $j'_i = 2m + 3 - j_i$ та $\forall k, l \in \{2, \dots, m + 1\} \ j_k + j_l \neq 2m + 3$ визначає єдину діаграму $D = D(b') \in \mathfrak{S}_{1;n}^O$.

Крім того, в роботі [10] встановлено, що для натуральних $n = 2m + 1$ має місце рівність

$$|\mathfrak{S}_{1;n}^O| = 2^m \cdot (m)! \tag{12}$$

Більше того, з урахуванням твердження $A.$, має місце

Лема 1. Для натуральних $n = 2m + 1$ число $s(n)$ діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ (що є симетричними відносно тієї осі симетрії $2n$ -шаблону, яка проходить через його центр та середину чорної дуги b_1) співпадає із числом циклів виду (11), для яких добуток

$$b' \circ \tau^{-1}, \quad \tau = (1, 2, \dots, 2m + 1) \quad (13)$$

є циклом довжини n (розкладається в один цикл).

З урахуванням Лема 1., авторами статті було написано програму математичного розрахунку величини $s(n)$ в середовищі **Maple**. Для натуральних $n = 11; 13; 15; 17; 19$ одержано наступні результати: $s(11) = 1\ 348$; $s(13) = 15\ 104$; $s(15) = 198\ 144$; $s(17) = 2\ 998\ 656$; $s(19) = 51\ 290\ 496$.

Таким чином, має місце

Твердження 1. Для непарних натуральних $1 \leq n \leq 19$ число $s(n)$ симетричних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ становить

$$s(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 1, & n = 3 \\ 4, & n = 5 \\ 20, & n = 7 \\ 148, & n = 9 \\ 1\ 348, & n = 11 \\ 15\ 104, & n = 13 \\ 198\ 144, & n = 15 \\ 2\ 998\ 656, & n = 17 \\ 51\ 290\ 496, & n = 19 \end{cases} \quad (14)$$

Крім того, більш пильні спостереження за величинами $s(n)$ (для зазначених n) дозволили виявити низку властивостей, а саме

Лема 2. Нехай $S_n(p)$ ($n = 2m + 1, p \in \{3, 4, \dots, 2m + 1\}$) – множина циклів виду $b' = (\dots, p', \boxed{1}, p, \dots)$, які задовольняють умову лема 1. Тоді мають місце наступні рівності:

- 1) $|S_n(2)| \equiv 0$;
- 2) $s(n) = \sum_{p=3}^{2m+1} |S_n(p)|$;
- 3) $\forall p \in \{m + 2, \dots, 2m + 1\} \quad |S_n(p)| = s(2m - 1) = s(n - 2)$;
- 4) $|S_n(3)| = |S_n(m + 1)| = 2 \cdot (m - 1) \cdot s(2m - 3) = (n - 3) \cdot s(n - 4)$;
- 5) $\forall j \in \{3, \dots, m + 1\} \quad |S_n(j)| = |S_n(m + 4 - j)|$.

2.2. Число нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$

Теорема 1. Для непарних натуральних $1 \leq n \leq 19$ число d_n^{**} нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи) діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ можна обчислити за формулою

$$d_n^{**} = \frac{1}{2} (d_n^* + s(n)), \tag{15}$$

де d_n^* визначаються за формулою (6), а $s(n)$ – зі співвідношень (14).

$g = \frac{n-1}{2}$	n	$d(n) = \frac{2(n-1)!}{n+1}$	d_n^*	d_n^{**}
0	1	1	1	1
1	3	1	1	1
2	5	8	4	4
3	7	180	30	25
4	9	8 064	900	524
5	11	604 800	54 990	28 169
6	13	68 428 800	5 263 764	2 639 434
7	15	10 897 286 400	726 485 868	363 342 006
8	17	2 324 754 432 000	136 750 260 720	68 376 629 688
9	19	640 237 370 572 800	33 696 703 714 374	16 848 377 502 435

Табл. 1: початкові значення величин $d(n)$, d_n^* та d_n^{**}

Зауваження 2. Як з'ясувалося, для натуральних $n = 2g + 1$ початкові значення величин $d(n)$ і $s(n)$ співпадають зі значеннями величин

$S_H(2g; 1)$ – «Hultman number» [4] (послідовність **A060593** в [7])

та, відповідно,

$S_H^\pm(g; 1)$ – «signed Hultman number» [4] (послідовність **A001171** в [7]).

Висновки

Отже, в представленій роботі для початкових натуральних $n = 2g + 1$ ($g \in \{0, 1, \dots, 9\}$) повністю розв'язана задача про підрахунок числа нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ (n -діаграм максимального роду g).

Крім того, з урахуванням зауваження 2., існує тісний зв'язок між діаграмами з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ та перестановками певного виду, чий «breakpoint» граfi розкладаються в один цикл [4]. Тому, на думку авторів, цілком досяжною здається подальша робота, пов'язана зі встановленням необхідних тверджень щодо бієктивності між симетричними діаграмами з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ та (відповідними) перестановками, чий «breakpoint» граfi розкладаються в один цикл.

Література

1. *Vossara G.* Nombre de representations d'une permutation comme produit de deux cycles de longueurs donnees // *Discrete Mathematics*. — 1980. — Vol. 29, Issue 2. — P. 105–134.
2. Callan D., Smiley L. Non-crossing Partitions under Rotation and Reflection, 2005, publ. electronically at <http://arXiv.org/abs/math/0510447v3>
3. *Cori R.* Counting non-isomorphic chord diagrams / R. Cori, M. Marcus // *Theoretical Computer Science*. — 1998. — Vol. 204. — P. 55–73.
4. *Grusea S.* The distribution of cycles in breakpoint graphs of signed permutations / S. Grusea, A. Labarre // *Discrete Applied Mathematics*. — 2013. — Vol. 161. — P. 1448–1466.
5. *Harer J.* The Euler characteristic of the moduli space of curves / J. Harer, D. Zagier // *Inventiones mathematical*. — 1986. — Vol. 85. — P. 457–485.
6. *Stoimenow A.* On the number of chord diagrams / A. Stoimenov // *Discrete Mathematics*. — 2000. — Vol. 218, Issues 1–3. — P. 209–233.
7. The OEIS Foundation Inc., «The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences», published electronically at <http://oeis.org>.
8. Кадубовський О. Про один клас хордових діаграм максимального роду / О. Кадубовський // *Вісник Київського університету Серія: фізико-математичні науки*. — 2006. — Вип. 1. — С. 17–27.
9. *Кадубовський О.А.* Двокольорові O - і N -діаграми / О.А. Кадубовський, О.В. Сторожилова, Н.В. Сторожилова // *Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки*. — 2010. — Том I, Вип. 10. — С. 41–50.
10. *Кадубовський О.А.* Двокольорові O -діаграми з одним чорним циклом / О.А. Кадубовський, Ю.С. Саприкіна, С.Ю. Мазур // *Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки*. — 2010. — Том I, Вип. 10. — С. 51–60.

Kadubovs'kyi O.A., Voschana L.V.

Donbas State Teachers' Training University, Slavyans'k, Ukraine.

On the Number of 2-Color Chord O -Diagrams of Maximal Genus Under the Action of Dihedral Group

In this paper for $0 \leq g \leq 9$ we determine the number of nonequivalent 2-color chord diagrams (of order n) with one black and one white cycle (2-color chord O -diagrams of maximal genus) under the action of dihedral group (of order $2n$)

Keywords: 2-color chord diagram, maximal genus, dihedral group.