УДК 530.12 (07)

Шурыгина Л.С.

[1] *кандидат педагогических наук, доцент кафедры физики, ДГПУ*

e-mail: fiziksgpu@ya.ru

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Показано, что кинематические эффекты специальной теории относительности могут быть получены при использовании преобразований Галилея. В качестве основы для вывода используется понятие пространственно-временного интервала. Различие между преобразованиями Галилея и Лоренца в том, что второе относится к классу ортогональных преобразований в 4-мерном пространстве-времени, а первое — нет.

Ключевые слова: *преобразования Галилея и Лоренца, пространственно-временной интервал, система отсчета, релятивистские эффекты.*

Введение

Обычно утверждается, что преобразования координат Галилея $x' = x - vt$, $t' = t$ противоречат постулатам теории относительности. Действительно, из этих преобразований следует классический закон сложения скоростей. Если $\triangle x = x_2 - x_1$ — перемещение тела за промежуток времени $\triangle t = t_2 - t_1$ в системе K, $\triangle x' = x'_2 - x'_1$ — перемещение того же тела за промежуток времени $\triangle t' = t'_2 - t'_1$ в системе K', то $\triangle x' = \triangle x - v\triangle t$. Разделив это равенство почленно на $\triangle t' = \triangle t$, получим $\triangle x'/\triangle t' = \triangle x/\triangle t - v$ или $u' = u - v$. Здесь u и u' — скорость одного и того же тела в системах K и K'. (Повсюду в этой статье принимается, что инерциальная система отсчета K' движется относительно K вдоль оси x со скоростью v). Пусть мы измеряем скорость света в обоих системах отсчета и $u' = c$. Тогда $u = c + v$, что противоречит факту абсолютности скорости света в вакууме, на который опирается специальная теория относительности.

Однако, в предисловии к книге американских профессоров Э. Тейлора и Дж. Уиллера [1] Н. В. Мицкевич пишет, что «преобразования Галилея и Лоренца физически эквиваленты. И можно без труда показать, что первое приводит в точности к тем же релятивистским эффектам, к каким приводит второе». Об этом можно прочесть и в других книгах, рассчитанных на более подготовленного читателя [2; 3].

Попробуем разобраться в этом, не применяя используемый в специальных книгах сложный математический аппарат.

Основная часть

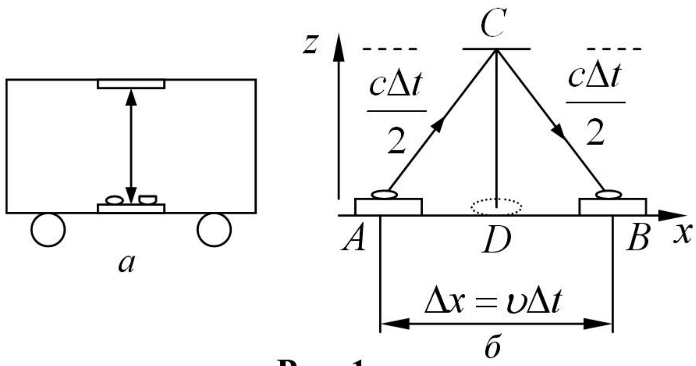

Рис. 1

В теории относительности, особенно в общей, важную роль играет величина, называемая пространственно-временным интервалом между событиями. Пусть первое событие — вспышка света в вагоне (рис. 1а). Свет отражается от зеркала и возвращается назад.
Прием вспышки — второе событие. В вагоне эти события произошли в одном месте пространства, для наблюдателя на станции — в разных (рис. 1б). Расстояние между ними тем больше, чем быстрее едет поезд. По теореме Пифагора $DC^2 = AC^2 - AD^2$, где $AC = c\triangle t/2$, $AD = \triangle x/2$, $\triangle x = \upsilon\triangle t$. υ — скорость поезда относительно станции, $DC = h$ — высота вагона. Окончательно запишем:

$$4h^2 = c^2\triangle t^2 - \triangle x^2. \tag{1}$$

Возьмем еще одну систему отсчета, жестко связанную с машиной, которая едет параллельно поезду, но с меньшей скоростью. В этой системе вспышка и прием света так же произошли в разных местах пространства. Аналогично получаем

$$4h^2 = c^2\triangle t'^2 - \triangle x'^2 \tag{2}$$

Высота вагона h одна и та же во всех системах. Чтобы убедиться в этом, предположим, что поезд должен проехать сквозь туннель. Высота неподвижного вагона и высота туннеля одинаковы. Предположим, что поперечные размеры движущегося тела изменяются, например, уменьшаются. Тогда в системе отсчета, жестко связанной с вагоном, высота туннеля будет ниже вагона и поезд не сможет пройти. В системе отсчета, связанной с туннелем, ситуация обратная. В этой системе движется вагон и его размеры, согласно допущению, должны сократиться. Следовательно, вагон пройдет сквозь туннель. Но выбор системы отсчета не должен влиять на исход наблюдаемого явления, следовательно, на основании принципа относительности, мы вынуждены сделать вывод, что размеры тела, перпендикулярные направлению относительного движения систем, абсолютны. Приравнивая правые части выражений (1) и (2), получим:

$$c^2\triangle t^2 - \triangle x^2 = c^2\triangle t'^2 - x'^2.$$

Промежутки времени и пространственные расстояния между событиями различны в разных системах отсчета. Но для каждой пары событий существует величина одинаковая во всех системах. Это — пространственно-временной интервал. Квадрат его имеет следующий вид:

$$s^2 = c^2\triangle t^2 - \triangle x^2 \text{ или } s^2 = (c\triangle t)^2 - l^2, \tag{3}$$

где l — расстояние между точками, где произошли события.

В нашем выводе использовались специальные события — вспышка и прием света. Но этот вывод справедлив и для произвольных событий. Например, если они не очень удалены друг от друга ($l \leqslant c\triangle t$), то всегда можно подобрать такое h, что свет, вспыхнувший одновременно и в том же месте, что и первое событие, прийдет к месту второго события в тот момент, когда оно должно произойти.

Если свет распространяется непосредственно из одной точки в другую $(h = 0)$, то $c\triangle t = l$ и

$$s = 0 \tag{4}$$

Если события произошли в одном месте пространства, то промежуток времени $\triangle t_0$ между ними называется собственным. В нашем примере в системе, связанной с вагоном, $l = 0$ и

$$\triangle t_0 = \frac{s}{c} \tag{5}$$

«Собственное» время неизменно во всех системах отсчета, так как интервал и скорость света абсолютны.

Это значит, что темп физических процессов совершенно одинаков для человека, где бы он ни находился — на Земле или в кабине летящего с огромной скоростью звездолета. Именно «собственное» время определяет темп физических процессов в данной системе отсчета.

Пространственные расстояния также могут быть выражены через интервал. Так, длину тела, например, линейки, в любой системе отсчета можно определить, зная значение интервала между двумя событиями, которые заключаются в измерении положения начала и конца линейки, при условии, что эти события происходят одновременно. Тогда $\triangle t = 0$ и

$$l = \sqrt{-s^2} \tag{6}$$

Только надо иметь ввиду, что одновременная фиксация границ измеряемого тела происходит по-своему в каждой системе отсчета. Это не одна и та же пара событий в разных системах. Поэтому для разных систем отсчета интервал s в выражении (5) не одинаков.

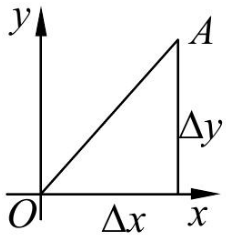

Рис. 2

Любые события мы можем изобразить на пространственно-временной диаграмме. В обычном пространстве (рис. 2) расстояние между двумя точками можно найти по теореме Пифагора, $OA^2 = l^2 = \triangle x^2 + \triangle y^2$. Можно ли пользоваться этой теоремой и, вообще, евклидовой геометрией в «пространственно-временном мире»? Как показывает опыт, нельзя. Геометрия пространства-времени в специальной теории относительности — псевдоевклидова. И, например, квадрат гипотенузы равен не сумме квадратов катетов, а их разности («псевдопифагорова» теорема).

$$OA^2 = s^2 = (c\triangle t)^2 - x^2$$

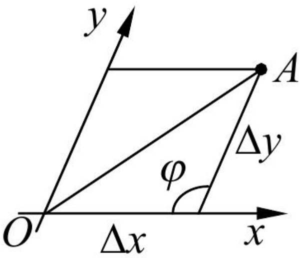

Рис. 3

До сих пор мы пользовались прямоугольными декартовыми координатами. Однако это совсем не обязательно. Можно пользоваться и косоугольными и криволинейными системами координат. Тогда квадрат расстояния между теми же точками, оставаясь неизменным по величине, будет иметь более сложную форму. Например, при использовании косоугольных координат в обычном пространстве (рис. 3) получим $OA^2 = l^2 = \triangle x^2 + \triangle y^2 - 2\triangle x \triangle y \cos\varphi$. Будет иным и выражение для квадрата интервала между событиями, если построить косоугольную пространственно-временную диаграмму. Помимо квадратов разностей координат и промежутка времени в это выражении будет входить член с произведением $\triangle x \triangle t$. Углы и их функции на пространственно-временной диаграмме можно выразить через скорость. Только, напоминаем, здесь надо пользоваться соотношениями псевдоевклидовой геометрии. Она во многом сходна с евклидовой, но имеет некоторые отличия. Выражения (4), (5) и (6) справедливы для любых систем координат и в любых системах отсчета.

Теперь посмотрим, как будет выглядеть интервал в K', если воспользоваться преобразованиями Галилея $x_1' = x_1 - vt_1$, $t_1' = t_1$ для первого события и $x_2' = x_2 - vt_2$, $t_2' = t_2$, для второго. Тогда $\triangle x' = \triangle x - v\triangle t$, $\triangle t' = \triangle t$ или

$$\triangle x = \triangle x' + v\triangle t'. \tag{7}$$

Поставим (7) в выражение для интервала (3). Получим:

$$s^2 = c^2\left(I - \frac{v^2}{c^2}\right)\triangle t'^2 - \triangle x'^2 - 2v\triangle x'\triangle t'. \tag{8}$$

Отметим для сравнения, что если бы мы проделали такие же расчеты с преобразованиями Лоренца $x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, $t' = \dfrac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, то выражение для интервала не изменилось бы, т.е. получили бы $s^2 = c^2 \triangle t'^2 - \triangle x'^2$. Учитывая вышеизложенное можно сделать вывод, что в случае преобразований Галилея пространственная ось x' и временная ось t' в системе K' не перпендикулярны друг к другу, хотя в системе K они взаимноперпендикулярны. Преобразования же Лоренца не нарушают перпендикулярности пространственной и временной оси.

Теперь предположим, что события происходят в одном и том же месте системы K', т.е. $\triangle x' = 0$. Подставляя это значение $\triangle x'$ в выражение (8), получим $s = c\sqrt{1 - v^2 \triangle t'/c^2} \triangle t'$ или, учитывая (5),

$$\triangle t_0 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \triangle t' \tag{9}$$

Наконец, заменяя $\triangle t'$ равным ему (по преобразованию Галилея) значением $\triangle t$, получаем обычное релятивистское соотношение между промежутками времени в двух системах отсчета

$$\triangle t = \frac{\triangle t_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{10}$$

Напомним, что $t' = t$ означает, что часы системы K' показывают то же время, что и часы системы K, находящиеся в той же точке пространства. (В каждой системе отсчета имеется множество часов, покоящихся относительно тела отсчета своей системы). Таким образом, если часы системы K' мы будем ставить по правилу $t' = t$, то они будут отставать от темпа физических процессов в этой системе, который определяется собственным временем t_0 ($\triangle t' > \triangle t_0$, см. (9)).

Проверим далее – будут ли синхронизированы между собой такие часы в K'. Сверим часы, находящиеся в разных точках пространства K', при помощи светового сигнала. Из т. A с координатой x'_1 посылаем короткий световой сигнал в т. B с координатой x'_2. В момент t' по часам, расположенным в т. B, световой сигнала отражается и затем возвращается снова в т. A. Определим время распространения светового сигнала из одной точки в другую в системе K'. Для этого запишем интервал в системе отсчета K' между событиями – излучением и приемом светового сигнала в точках A и B. Этот интервал равен нулю в любой системе отсчета (см. (4)):

$$c^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\triangle t'^2-\triangle x'^2-2\triangle x'\upsilon\triangle t'=0$$

Решая это квадратное уравнение, получаем

$$\triangle t_1'=\frac{\triangle x'(\upsilon-c)}{c^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)},\quad \triangle t_2'=\frac{\triangle x'(\upsilon+c)}{c^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}.$$

Эти промежутки времени соответствуют распространению светового сигнала в двух противоположных направлениях между точками A и B.

Если t' — момент отражения светового сигнала в т. B, то момент отправления его из т. A — $t_1'=t'+\triangle t_1'$ $(\triangle t_1'<0)$, а момент возращения в ту же точку — $t_2'=t'+\triangle t_2'$. Одновременно с моментом t' в т. B, по Эйнштейну, следует считать показания часов в точке A, лежащее посередине между моментами отправления и возращения светового сигнала в эту точку:

$$\frac{t_1'+t_2'}{2}=\frac{t'+\triangle t_1'+t'+\triangle t_2'}{2}=t'+\frac{\triangle t_1'+\triangle t_2'}{2}.$$

Подставляя значения $\triangle t_1'$ и $\triangle t_2'$, получаем

$$\frac{t_1'+t_2'}{2}=t'+\frac{\triangle x'\upsilon}{c^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}.$$

Оказывается, что одновременным в K' событиям в разных точках соответствуют различные показания часов. Значит, часы в системе K' не синхронизированы между собой. Разность значений временной координаты для двух одновременных событий

$$\delta t'=\frac{\triangle x'\upsilon}{c^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)} \tag{11}$$

Для сравнения можно показать, что если бы мы пользовались преобразованиями Лоренца, то часы в разных точках K' были бы синхронными. В этом случае интервал между теми же событиями, приемом и отправлением сигнала, в системе K' будет $s^2=c^2\triangle t'^2-\triangle x'^2=0$. Отсюда $\triangle t_1'=\triangle x'/c$

и $\triangle t'_2 = \triangle x'/c$. Расчеты, аналогичные предыдущим, дают для показаний часов в т. A в момент времени, одновременный с t' в т. B:

$$\frac{t' + \triangle t'_1 + t' + \triangle t'_2}{2} = \frac{t' - \dfrac{\triangle x'}{c} + t' + \dfrac{\triangle x'}{c}}{2} = t',$$

т.е. в этом случае одновременным событиям в разных точках соответствуют одинаковые показания часов.

Наконец, сравним размеры тел в K и K', параллельные направлению относительной скорости систем отсчета. Пусть в системе K покоится линейка, расположенная вдоль оси x. Координаты ее начала и конца x_1 и x_2, так что ее длина в системе K будет $l_0 = x_2 - x_1$. Чтобы определить ее длину в системе K' найдем значение интервала между двумя событиями — измерением координат начала и конца линейки, происходящими в один и тот же момент времени K'. Как было показано, в системе K' показания часов в разных точках в один и тот же момент времени отличаются на $\delta t'$. Поэтому мы должны считать, что для одновременных событий $\triangle t'$ равняется не нулю, а $\delta t'$, $\triangle t' = \delta t'$. Подставляя значение $\triangle t'$ в (8), получим $s^2 = -\dfrac{\triangle x'^2}{1 - \upsilon^2/c^2}$ и, согласно (6),

$$l = \frac{\triangle x'}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} \qquad (12)$$

Но $\triangle x' = \triangle x - \upsilon \triangle t'$, где $\triangle x = l_0$, а $\triangle t' = \delta t' = \dfrac{\triangle x' \upsilon}{c^2(1 - \upsilon^2/c^2)}$.

Поэтому, после простых преобразований, получаем $\triangle x' = l_0(1 - \upsilon^2/c^2)$. Подставляя значение $\triangle x'$ в (12), найдем окончательно

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} \qquad (13)$$

Итак, если подходить к преобразованиям Галилея с современных релятивистских позиций, то получаются обычные кинематические эффекты теории относительности.

Но как же классическая формула сложения скоростей, о которой мы говорили в самом начале? Ведь она противоречит основным положениям теории относительности! Но, оказывается, и здесь все в порядке. Дело в том, что отношение $\triangle x'/\triangle t' = u'$ не является истинной скоростью тела в системе K'.

На минуту отвлечемся от наших абстрактных рассуждений. Предположим, что Вы решили узнать, с какой средней скоростью способны пробежать расстояние 5 км. У начала и конца маршрута стоят Ваши товарищи с часами. Вы начали бежать ровно в двенадцать по часам стоящего на старте. Подбежав к финишу, от второго приятеля узнаете, что прибыли в двенадцать часов и десять секунд. Неужели средняя скорость пробега была 0,5 км/с и побиты все мировые рекорды? Конечно, нет. Просто Ваши товарищи не проверили свои часы, не синхронизировали их. Узнав у кого из них часы не в порядке и введя соответствующие поправки, можно найти истинное время пробега. Возвращаясь к системе K', вспомним, что там, кроме подобной ситуации со временем, еще и $\triangle x' \neq l$ (см. (12)). Истинная скорость в системе K' есть, очевидно

$$u' = \frac{l}{\triangle t_0} \tag{14}$$

Согласно (9) $\triangle t_0 = \sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}\triangle t'$, где $\triangle t' = t'_2 - t'_1$, причем t'_2 и t'_1 измерялись по одним часам и в том же месте системы K'. В нашем случае, при вычислении скорости, t'_2 и t'_1 — показания двух часов в разных местах пространства K', поэтому необходимо иметь ввиду, что часы не являются синхронными и ввести поправку $\delta t' = \dfrac{\triangle x' \upsilon}{c^2(1 - \upsilon^2/c^2)}$. Тогда

$$\triangle t_0 = \left(\triangle t' - \frac{\triangle x' \upsilon}{c^2 \left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)} \right) \cdot \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} \tag{15}$$

Подставляя в (14) значение l из выражения (12) и $\triangle t_0$ из (15), получим

$$u' = \frac{\triangle x'}{\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right) \left(\triangle t' - \frac{\triangle x' \upsilon}{c^2 \left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)} \right)}.$$

Разделив числитель и знаменатель правой части на $\triangle t'$, после простых преобразований, получим,

$$u' = \frac{\triangle x'/\triangle t'}{1 - \dfrac{v^2}{c^2} - \dfrac{\triangle x'}{\triangle t'} \cdot \dfrac{v}{c^2}}.$$

Учитывая, что $\triangle x'/\triangle t' = u - v$, окончательно записываем:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \dfrac{uv}{c^2}}.$$

Таким образом, мы получили обычную релятивистскую формулу преобразования скорости.

Выводы

Таким образом, по форме записи более сложные преобразования Лоренца физически оказываются более простыми, чем преобразования Галилея. Отличие системы отсчета, которое получается при преобразовании Галилея в 4-мерном пространстве-времени от декартовой, получаемой при преобразовании Лоренца, — неортогональность оси времени к пространственным осям с вытекающими отсюда последствиями.

Литература

1. *Тейлор Э., Уилер Дж.* Физика пространства-времени. — М.: Мир, 1971. — 7 с.
2. *Мицкевич Н. В.* Физические поля в общей теории относительности. — М.: Наука, 1969. — 329 с.
3. *Moller C.* The Theory of Relativity. — Oxford, 1952.