УДК 37.016:51

**Кадубовський О.А., Цвєткова О.І., Полюга М.І.**

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДДПУ*

[2–3] *студенти 5 курсу фізико-математичного факультету, ДДПУ*

e-mail: kadubovs@ukr.net, olja_zwetkowa@mail.ru, polyuga.marina@mail.ru

# ДО ПИТАНЬ ПРО СИСТЕМАТИЗАЦІЮ ФАКТІВ ГЕОМЕТРІЇ ТРАПЕЦІЙ ТА ЇХ КЛАСИФІКАЦІЮ

Стаття присвячена систематизації фактів геометрії трапецій та супровідним дидактичним аспектам, пов'язаним із способами фіксації та побудови знань. Також авторами пропонується низка нових термінів для окремих видів трапеції, за допомогою яких наведено дві взаємодоповнювальні класифікації трапецій, відміні від традиційних класифікацій більшою видовою деталізацією.

**Ключові слова:** *систематизація, геометрія трапецій, задачі на трапецію, класифікація трапецій.*

## Вступ

Теоретичні відомості про трапецію в різному обсязі представлені у більшості джерел, присвячених шкільному курсу геометрії, зокрема в посібниках із серій: «Абітурієнтам», «Повторюємо та систематизуємо шкільний курс ...», «Геометрія у визначеннях, формулах і таблицях» та ін. «Трапеції» є невід'ємною складовою змістової лінії «чотирикутники» шкільного курсу геометрії. Проте *систематизації фактів геометрії трапецій*, на нашу думку, в існуючій навчально-методичній літературі приділяється недостатня увага.

Серед джерел, присвячених вибраним задачам на трапеції (зокрема на окремі їх види) та способам їх розв'язання, автори вважають своїм обов'язком виділити: статті В. Алексєєва [1] та І.Ф. Шаригіна [25]; навчальні посібники О.С. Істера [10], І.А. Кушніра [16], [17] та В.В. Прасолова [22]; серед збірок, які містять широке коло задач на трапеції, — збірники задач [7], [14], [17], [18], [19], [23]; серед посібників із серії «Шкільний курс геометрії у кресленнях та формулах» — посібник В.В. Амелькіна [3].

Серед підручників, в яких (на нашу думку) трапеціям приділяється значно більша увага порівняно з іншими підручниками, слід виділити діючі підручники [4], [6], [20] та пробний підручник [13]. В [6] важливі відомості, зокрема задачі теоретичного характеру на трапеції, виділено жирним шрифтом. Серед переваг [20] слід виділити те, що важливі факти геометрії трапецій представлено у вигляді завдань, які відповідають початковому і середньому; достатньому та високому рівням навчальних досягнень відповідно. Найбільш вдалим в дидактичному сенсі, на нашу думку, є підручник [13]. До переваг [4] можна віднести найбільшу кількість задач теоретичного характеру та зведену таблицю «опорних фактів про трапецію». Однак в [4] трапеція визначається як «чотирикутник, у якого дві сторони паралельні».

Автори статті віддають перевагу традиційному визначенню трапеції. З методичними аспектами вивчення трапецій в шкільному курсі геометрії, зокрема можливими підходам до визначення трапеції та їх класифікації, можна ознайомитися, наприклад, в [5], [9], [24]. Зокрема в [9] наведено достатню кількість аргументів на користь саме традиційного визначення трапеції.

За діючою програмою ЗНО з математики (укладеної на основі (*нового стандарту*) навчальної програми з математики для учнів 5–9 класів ЗОНЗ та навчальної програми для учнів 8–9 класів ЗОНЗ (класів) з поглибленим вивченням математики) учень повинен **знати**: визначення трапеції, види та властивості трапеції; визначення середньої лінії трапеції та її властивості; вписані в коло та описані навколо кола трапеції; формули обчислення площі трапеції; серед вимог до предметних **вмінь** — застосовування *визначень, ознак та властивостей* різних видів чотирикутників до розв'язування планіметричних задач та задач практичного змісту.

Як зазначено в [8], «Навчальні задачі є ефективним засобом реалізації і формою втілення змісту навчання. Викладач повинен постійно вирішувати проблему відбору навчальних задач, щоб забезпечити системне засвоєння змісту навчальної дисципліни. Тому, необхідною є вдала і обґрунтована систематизація задач. Проблемою в цьому випадку є вибір засад для такої систематизації...»

Підсумовуючи зазначене, слід констатувати, що на привеликий жаль, *відомості з геометрії трапецій, які містяться у більшості джерел, носять вибірковий характер з акцентами в залежності від уподобань авторів.* А такі важливі питання, як наприклад рівність та подібність окремих видів чотирикутників та їх ознаки (зокрема ознаки трапецій), взагалі залишаються за лаштунками переважної більшості підручників. Але ж, не можна не погодитися з тим, що одними з основних задач при вивченні геометричних об'єктів, є задачі про порівняння (співставлення) та їх виокремлення (розпізнання) з більш ємної множини однорідних об'єктів. Однак не можна не відзначити й позитивну тенденцію — в підручниках все частіше виділяють задачі, які є опорними («характеристичними») для вивчення окремих видів трапеції.

ЗОНЗ — загальноосвітній навчальний заклад

Другий аспект (в контексті вивчення трапецій), який автори також не можуть залишити без уваги, пов'язаний із тим, що в існуючих підручниках та навчально-методичній літературі класифікації (класифікаціям) трапецій, навіть у порівнянні з класифікацією паралелограмів, приділяється досить поверхнева увага. Для більшості учнів та навіть студентів математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ і молодих вчителів математики «*Трапеції бувають рівнобедрені, прямокутні та інші.*» Більше того, в багатьох навчальних посібниках трапеції класифікують саме так. Звісно ж, що такий стан справ не може не викликати занепокоєння.

Крім того, як зазначено в [11] «... дійсність показує, що не лише в учнів, а й у студентів фізико-математичних факультетів педагогічних ВНЗ, за наявності фактичних знань і вмінь їх застосовувати при розв'язуванні задач відсутнє чітке розуміння взаємозв'язків між елементами теоретичних знань, що впливає на рівень осмислення самих систематично засвоєних знань. Це свідчить про те, що визначена система наукових знань не формується. Останнє пояснюється тим, що в зміст сучасної освіти з математичних дисциплін не включені знання про способи фіксації і побудови знань. Настав час, коли чітка структура всього накопиченого і вивченого матеріалу допоможе усунути існуючу проблему та якісно підвищить рівень підготовки майбутніх вчителів математики».

Питанням систематизації фактів з окремих тем курсу геометрії присвячено, наприклад, статті [11], [12]. Серед сучасних видань з елементарної геометрії, в яких наведено яскраві геометричні факти, що не ввійшли до шкільних підручників, слід виділити посібники І.А. Кушніра [16], [17] та двотомне видання Я.П. Понаріна [21]. Зокрема в останньому досить ґрунтовно розглядаються властивості довільних чотирикутників.

Крім зазначеного вище, до написання даної статі авторів надихнули дві роботи, які, незалежно одна від одної, вийшли у 2009 році. А саме:
книга визнаного фахівця шкільної геометрії, заслуженого вчителя України І.А. Кушніра «Геометрія трапеції в задачах» [15] (це перша книга, цілком присвячена трапеціям) та робота Ф. Аліфіренка «Узагальнення теореми Стюарта для трапеції. Спільне в геометрії трикутників і трапецій» [2] (яка переважно присвячена перенесенню основних фактів геометрії трикутника в якості аналогів на випадок трапецій). Тому представлений нами матеріал (в певному сенсі) можна вважати логічним продовженням зазначених робіт.

Саму ж статтю умовно можна розбити на чотири частини:

---

робота посіла II місце у II етапі Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів-членів Малої академії наук України у 2008/2009 навчальному році в першій — крім загально-прийнятих в діючих підручниках понять і визначень авторами для окремих видів трапеції введено низку нових термінів та наведено відповідні визначення; в другій — безпосередньо сам результат авторського доробку щодо систематизації фактів геометрії трапецій, зокрема окремих видів трапеції; в третій — запропоновано чотири рівні складності задач, з урахуванням яких наведено деякі методичні рекомендації щодо дидактичного забезпечення теми; в четвертій — дві взаємодоповнювальні класифікації трапецій, які відрізняються від традиційних класифікацій більшою видовою деталізацією та можливістю «класифікаціно-видового» підходу до вивчення трапецій.

## 1. Основні поняття та визначення

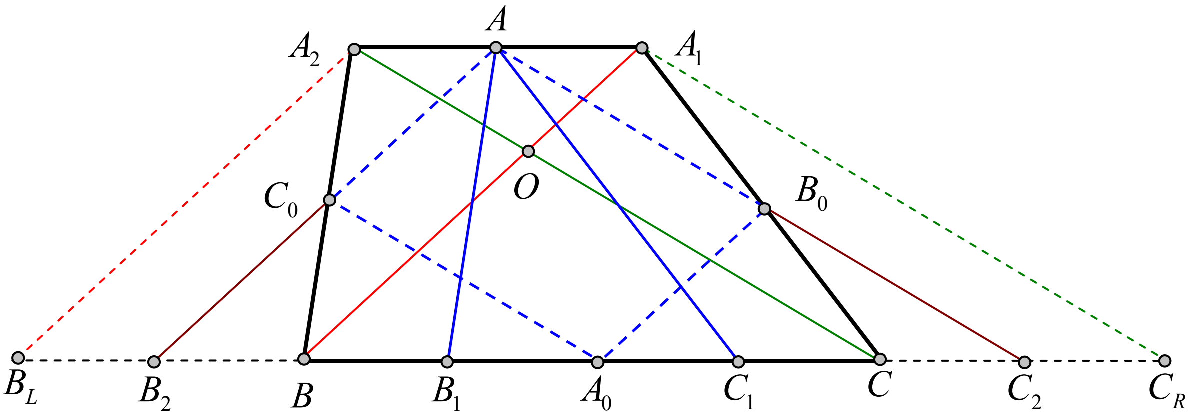
**Означення 1. ([6])** Трапецією *називають чотирикутник, у якого дві протилежні сторони паралельні, а дві інші — непаралельні. Паралельні сторони називаються* основами*, а непаралельні —* бічними сторонами *трапеції. Трапецію називають* рівнобічною*, якщо довжини її бічних сторін є рівними. Трапецію називають* прямокутною*, якщо один з її кутів є прямим.*

**Означення 2. ([20])** Висотою трапеції *називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки прямої, яка містить одну з основ, на пряму, яка містить іншу основу трапеції.* Середньою лінією *(«першою середньою лінією») трапеції називають відрізок, який сполучає середини її бічних сторін.*

**Означення 3.** *Трапецію називатимемо* описаною *навколо кола $\omega$, якщо її сторони належать дотичним до кола $\omega$. Трапецію називатимемо* вписаною *в коло $\omega$, якщо її вершини належать колу $\omega$.*

**Означення 4.** *Дві трапеції ($ABCD$ і $A'B'C'D'$) називають* рівними*, якщо міри їх відповідних кутів та довжини їх відповідних сторін є рівними. Іншими словами (в символьному вигляді), якщо $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$; $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, $DA = D'A'$, то трапеції $ABCD$ і $A'B'C'D'$ називають рівними та використовують запис $ABCD = A'B'C'D'$.*

**Означення 5.** *Дві трапеції ($ABCD$ і $A'B'C'D'$) називають* подібними*, якщо міри їх відповідних кутів є рівними, а довжини їх відповідних сторін пропорційними. Іншими словами (в символьному вигляді), якщо $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$; $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{DA}{D'A'} = k$, то трапеції $ABCD$ і $A'B'C'D'$ називають подібними з коефіцієнтом $k$ та позначають $ABCD \backsim A'B'C'D'$.*




**Означення 6.** *Нехай* $A_1A_2BC$ *— трапеція з основами* $A_1A_2 < BC$ *, в якій* $A, C_0, A_0, B_0$ *є серединами сторін* $A_1A_2$ *,* $A_2B$ *,* $BC$ *і* $CB$ *відповідно, та для якої виконано додаткові побудови, зображені на рисунку вище:*
$AB_1||A_2B$ *,* $B_1 \in (BC)$ *;* $AC_1||A_1C$ *,* $C_1 \in (BC)$ *;* $B_2 = (AC_0) \cap (BC)$ *,* $C_2 = (AB_0) \cap (BC)$ *;* $A_2B_L||A_1B$ *,* $B_L \in (BC)$ *;* $A_1C_R||A_2C$ *,* $C_R \in (BC)$ *.*
Тоді*: відрізки* $AA_0$ *,* $BB_0$ *,* $CC_0$ *називатимемо* медіанами трапеції*;*

*медіану* $AA_0$ — другою середньою лінією трапеції*;*

*чотирикутник* $AC_0A_0B_0$ — паралелограмом Варіньона*;*

$\triangle\ AB_1C_1$ — першим чудовим трикутником трапеції*;*

$\triangle\ AB_2C_2$ — другим чудовим трикутником трапеції*;*

*трикутники* $A_2B_LC$ *і* $A_1BC_R$ *— відповідно* «лівим» *та* «правим» *зовнішніми трикутниками трапеції;*

$\triangle\ A_2OB$ *,* $\triangle\ A_1OC$ *і* $\triangle\ A_2OA_1$ *,* $\triangle\ BOC$ — власними малими трикутниками*, прилеглими до відповідних бічних сторін та основ трапеції,*

*а* $\triangle\ A_2BC$ *,* $\triangle\ BA_1A_2$ *і* $\triangle\ A_1BC$ *,* $\triangle\ CA_1A_2$ — власними великими трикутниками*, прилеглими до відповідних сторін трапеції.*

**Означення 7.** *Якщо діагоналі трапеції є перпендикулярними, то таку трапецію будемо називати* ДД-прямокутною *або ж* дельта-трапецією*;*

*якщо діагональ трапеції є перпендикулярною до бічної сторони, то —* ДБ-прямокутною*;*

*якщо діагональ є перпендикулярною до основи, то —* ДО-прямокутною*;*

*якщо сума градусних мір кутів при більшій основі становить* $90^0$ *, то —* ББ-прямокутною*;*

*якщо кути при більшій основі є гострими, то —* умовно-гострокутною *(рис. 1a) );*

*якщо один з кутів при основі прямий, то —* прямокутною *(рис. 1b) );*

*якщо один з кутів при більшій основі тупий, то —* умовно-тупокутною *(рис. 1c) ).*

**Зауваження 1.** *Оскільки II чудовий трикутник трапеції є рівним (за трьома сторонами) лівому (та правому) зовнішньому її трикутнику, то традиційно «необхідні» (для розв'язування певного кола задач) додаткові побудови лівого або ж правого зовнішнього трикутника трапеції можна і доцільно замінити розглядом саме* II чудового трикутника *трапеції. Переваги зазначеної «заміни» стануть зрозумілими із контексту подальшого матеріалу. Більш детально із застосуваннями* II чудового трикутника *трапеції можна ознайомитися в книзі І.А. Кушніра [15], в якій звернено увагу на зазначений трикутник та запропоновано називати його чудовим.*

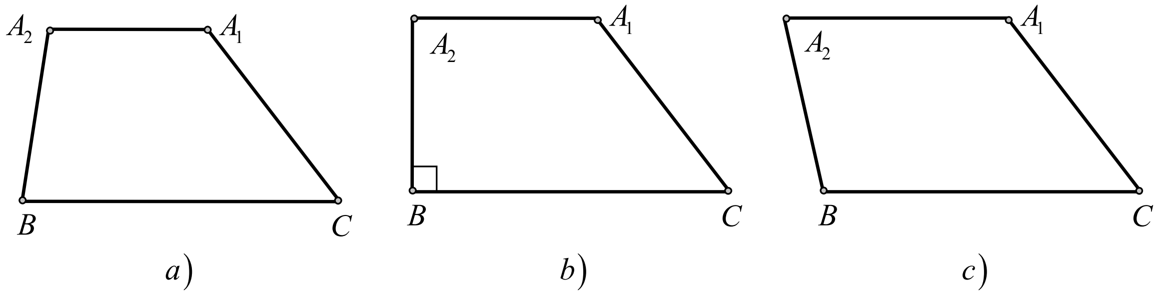



**Рис. 1:** до понять умовно-гострокутної, прямокутної та умовно-тупокутної трапецій

**Зауваження 2.** *Заради визначеності та (традиційної) зручності, в подальшому завжди будемо вважати (а тому і зображати), що трапецію розташовано так, що відносно середньої лінії більша за довжиною основа знаходиться нижче, а менша — вище. У зв'язку з чим більшу за довжиною основу будемо називати «нижньою», меншу за довжиною основу — «верхньою», а бічні сторони — «лівою» та «правою» відповідно.*

**Означення 8.** *Якщо довжина верхньої (меншої) основи трапеції дорівнює довжині лівої (або ж правої) бічної сторони, то таку трапецію будемо називати* ЛВ-рівнобокою *(та* ПВ-рівнобокою *відповідно); ЛВ- та ПВ-рівнобокі трапеції будемо називати* БВ-рівнобокими.

*Якщо довжина нижньої (більшої) основи трапеції дорівнює довжині лівої (або ж правої) бічної сторони, то таку трапецію будемо називати* ЛН-рівнобокою *(та* ПН-рівнобокою *відповідно); ЛН- та ПН-рівнобокі трапеції будемо називати* БН-рівнобокими.

**Означення 9.** *Трапецію, яка є одночасно ЛВ- та ПВ-рівнобокою будемо називати* максимально рівнобокою зверху. *Трапецію, яка є одночасно ЛН- та ПН-рівнобокою будемо називати* максимально рівнобокою знизу.

**Означення 10.** *Якщо довжина меншої основи максимально рівнобокої зверху трапеції вдвічі менша за довжину більшої основи, то таку трапецію будемо називати* правильною.

# 2. Основні факти геометрії трапецій

## 2.1. «Нерівність» трапеції, ознаки рівності та подібності трапецій

1) «Нерівність трапеції»: якщо $b, c, d, a$ — довжини бічних сторін та меншої і більшої основ трапеції відповідно, то має місце система нерівностей

$$\begin{cases} |b-c| < a-d < b+c \\ |b-a+d| < c < b+a-d \\ |c-a+d| < b < c+a-d \end{cases} \qquad (1)$$

1*) І навпаки: якщо додатні числа $b, c, d, a$, з яких принаймні два є різними (заради визначеності, нехай це будуть $a$ і $d$, причому $d < a$), задовольняють систему 1, то завжди існує трапеція, для якої $b, c, d, a$ — довжини бічних сторін та меншої і більшої основ відповідно.

Нехай трапеції $A_1A_2BC$ і $A_1'A_2'B'C'$ задано за допомогою систем $(T)$ і $(T')$ відповідно

$$(T): \begin{cases} \overrightarrow{A_1A_2} \upuparrows \overrightarrow{CB}, & A_1A_2 < BC \\ \angle A_1CB = \gamma, & \angle A_2BC = \beta \\ A_1A_2 = d, & BC = a \\ A_1C = b, & A_2B = c \\ A_1B = e, & A_2C = f \end{cases} \quad \text{і } (T'): \begin{cases} \overrightarrow{A_1'A_2'} \upuparrows \overrightarrow{C'B'}, & A_1'A_2' < B'C' \\ \angle A_1'C'B' = \gamma', & \angle A_2'B'C' = \beta' \\ A_1'A_2' = d', & B'C' = a' \\ A_1'C' = b', & A_2'B' = c' \\ A_1'B' = e', & A_2'C' = f' \end{cases}$$

Тоді мають місце наступні

2) **ознаки рівності** двох трапецій:

**I-1.** Якщо $d = d'$, $a = a'$, $b = b'$, $\gamma = \gamma'$, то $A_1A_2BC = A_1'A_2'B'C'$;
**I-2.** Якщо $d = d'$, $a = a'$, $c = c'$, $\beta = \beta'$, то $A_1A_2BC = A_1'A_2'B'C'$;
**II.** Якщо $d = d'$, $a = a'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, то $A_1A_2BC = A_1'A_2'B'C'$;
**III.** Якщо $d = d'$, $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, то $A_1A_2BC = A_1'A_2'B'C'$;
**IV.** Якщо $d = d'$, $a = a'$, $e = e'$, $f = f'$, то $A_1A_2BC = A_1'A_2'B'C'$.

3) та **ознаки подібності** двох трапецій:

**I-1.** Якщо $\dfrac{d}{d'} = \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$ і $\gamma = \gamma'$, то $A_1A_2BC \backsim A_1'A_2'B'C'$;
**I-2.** Якщо $\dfrac{d}{d'} = \dfrac{a}{a'} = \dfrac{c}{c'}$ і $\beta = \beta'$, то $A_1A_2BC \backsim A_1'A_2'B'C'$;
**II.** Якщо $\dfrac{d}{d'} = \dfrac{a}{a'}$ і $\beta = \beta', \gamma = \gamma'$, то $A_1A_2BC \backsim A_1'A_2'B'C'$;
**III.** Якщо $\dfrac{d}{d'} = \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$, то $A_1A_2BC \backsim A_1'A_2'B'C'$;
**IV.** Якщо $\dfrac{d}{d'} = \dfrac{a}{a'} = \dfrac{e}{e'} = \dfrac{f}{f'}$, то $A_1A_2BC \backsim A_1'A_2'B'C'$.

### 2.2. «Важливі неможливості» в трапеції

Не існує трапеції, у якої

1) протилежні кути рівні; 2) основи рівні;
3) точка перетину діагоналей належить (першій) середній лінії;
4) діагональ є бісектрисою обох протилежних кутів;
5) діагональ перпендикулярна обом бічним сторонам;
6) точка перетину діагоналей ділить хоча б одну з них навпіл.

### 2.3. Властивості довільної трапеції

1. Сума кутів, прилеглих до бічної сторони трапеції, становить $180^0$.
2. Основна властивість середньої лінії трапеції: середня лінія трапеції є паралельною до основ, а її довжина дорівнює півсумі довжин основ трапеції.
3. Довжина середньої лінії трапеції менша за довжину хоча б однієї з її діагоналей.
4. Середня лінія трапеції ділить навпіл будь-який відрізок з кінцями на основах (або ж їх продовженнях) трапеції.
   - 4.1. I-ша та II-га середні лінії трапеції в точці перетину діляться навпіл.
   - 4.2. Середини діагоналей трапеції належать її (першій) середній лінії.
   - 4.3. $C_0E_0 = F_0B_0$, де $C_0, B_0$ середини бічних сторін $A_2B$ і $A_1C$ відповідно, а $E_0 = A_1B \cap C_0B_0$, $F_0 = A_2C \cap C_0B_0$.
   - 4.4. Відстань між серединами діагоналей трапеції дорівнює модулю піврізниці довжин її основ.
5. Внутрішній (відносно трапеції) відрізок прямої, яка проходить через точку перетину діагоналей паралельно до основ, ділиться нею навпіл.
6. Точка перетину діагоналей належить другій середній лінії трапеції.
7. Медіани трапеції перетинаються в одній точці.
8. Основна властивість трапеції: точка перетину продовжень бічних сторін, середини основ та точка перетину її діагоналей належать одній прямій.
9. Бісектриси кутів, прилеглих до бічної сторони трапеції, перетинаються під прямим кутом; точка їх перетину належить середній лінії трапеції.
10. Нехай $l_1$ і $l_2$ — прямі, що проходять через вершини $A_1$ і $A_2$ (меншої) основи паралельно до бічних сторін $A_2B$ і $A_1C$ відповідно та перетинають діагоналі $A_2C$ і $A_1B$ в точках $L_1$ і $L_2$ (відповідно). Тоді $L_1L_2 \| A_1A_2$.
11. Бісектриса кута трапеції відтинає від основи цієї трапеції (або її продовження) відрізок, рівний бічній стороні, яка є прилеглою до цього кута.
12. Добуток площ трикутників, на які трапеція розбивається однією зі своїх діагоналей, дорівнює добутку площ трикутників, на які вона розбивається іншою своєю діагоналлю.

## 2.4. Властивості та ознаки рівнобічної трапеції

1. **Властивості-ознаки рівнобічної трапеції:** трапеція є рівнобічною **тоді і лише тоді**, коли виконується одна з наступних умов:
   1.1) кути при основі є рівними (сума протилежних кутів становить $180^0$ );
   1.2) діагоналі є рівними;
   1.3) I-ий чудовий трикутник є рівнобедреним;
   1.4) II-ий чудовий трикутник є рівнобедреним;
   1.5) паралелограм Варіньона є ромбом;
   1.6) друга середня лінія є перпендикулярною до її основ;
   1.7) довжини відрізків діагоналей, що сполучають точку їх перетину з кінцями однієї основи, рівні між собою;
   1.8) основа висоти, що проведена з вершини меншої основи трапеції, ділить більшу її основу на відрізки, довжини яких дорівнюють піврізниці та півсумі довжин основ;
   1.9) точка перетину діагоналей є рівновіддаленою від прямих, що містять бічні сторони;
   1.10) навколо трапеції можна описати коло;
   1.11) $BB_0 = CC_0$ або $A_1C_0 = A_2B_0$ або $C_0B = B_0C$ або $A_2C_0 = A_1B_0$, де $B_0, C_0$ — середини бічних сторін $A_1C$ і $A_2B$ відповідно;
   1.12) $BA_2 + A_2C = BA_1 + A_1C$, де $\overrightarrow{A_1A_2} \upuparrows \overrightarrow{CB}$;
   1.13) $P_{\triangle BA_2O} = P_{\triangle CA_1O}$;
   1.14) $BA_2 + A_2A_0 = CA_1 + A_1A_0$, де $A_0$ середина більшої основи $BC$;
   1.15) $P_{\triangle BC_0C} = P_{\triangle BB_0C}$.
2. В рівнобедреній трапеції різниця довжин бічних сторін менша за різницю довжин основ.

## 2.5. Властивості та ознаки ББ-прямокутної трапеції

1) У ББ-прямокутної трапеції:
   1.1) довжина другої середньої лінії дорівнює модулю піврізниці довжин її основ;
   1.2) довжина другої середньої лінії дорівнює відстані між серединами діагоналей;
   1.3) квадрат різниці довжин основ дорівнює сумі квадратів довжин бічних сторін;
   1.4) площа ББ-прямокутної трапеції дорівнює добутку площі I чудового трикутника на відношення суми довжин основ до їх різниці.
2) **Ознака ББ-прямокутної трапеції:** трапеція є ББ-прямокутною **тоді і лише тоді**, коли її I-ий чудовий трикутник є прямокутним з прямим кутом при вершині, що є серединою меншої основи.

## 2.6. Властивості-ознаки прямокутної трапеції

1) Трапеція є прямокутною **тоді і лише тоді**, коли коли виконується одна з наступних умов:
   1.1) I-ий чудовий трикутник є прямокутним з прямим кутом при вершині, що належить більшій основі;
   1.2) квадрат довжини її більшої бічної сторони дорівнює сумі квадратів меншої бічної сторони та різниці основ;
   1.3) $A_1C_0 = C_0C$ (або $A_2B_0 = B_0B$).

## 2.7. Властивості-ознаки дельта-трапеції (ДД-прямокутної)

1) Трапеція є дельта-трапецією (є ДД-прямокутною) **тоді і лише тоді**, коли виконується одна з наступних умов:
   1.1) довжина другої середньої лінії дорівнює довжині середньої лінії;
   1.2) сума площ квадратів, побудованих на її діагоналях дорівнює чотирьом площам трапеції;
   1.3) II-ий чудовий трикутник є прямокутним з прямим кутом при вершині, що є серединою меншої основи;
   1.4) паралелограм Варіньона є прямокутником.

## 2.8. Властивості-ознаки ДБ-прямокутної трапеції

1) Трапеція є ДБ-прямокутною **тоді і лише тоді**, коли коли виконується одна з наступних умов:
   1.1) один з власних великих трикутників трапеції є прямокутним, прямий кут якого спирається на (відповідну) основу;
   1.2) квадрат довжини основи дорівнює сумі квадратів довжин діагоналі та бічної сторони, що виходять з різних її кінців.

## 2.9. Властивості-ознаки ДО-прямокутної трапеції

1) Трапеція є ДО-прямокутною **тоді і лише тоді**, коли коли виконується одна з наступних умов:
   1.1) власний великий трикутник трапеції є прямокутним, прямий кут якого спирається на (відповідну) бічну сторону;
   1.2) квадрат довжини бічної сторони дорівнює сумі квадратів довжин діагоналі та основи, що виходять з різних її кінців.

## 2.10. Властивості та ознаки вписаної трапеції

1) Якщо навколо трапеції можна описати коло, то вона є рівнобічною, а центром такого кола є точка перетину серединних перпендикулярів до її сторін.
2) Навколо трапеції можна описати коло **тоді і лише тоді**, коли вона є рівнобічною.

## 2.11. Властивості та ознаки описаної трапеції

1) Якщо в трапецію можна вписати коло, то:
   1.1) сума довжин її основ дорівнює сумі довжин бічних сторін;
   1.2) його центр є точкою перетину бісектрис кутів трапеції та належить (першій) середній лінії трапеції;
   1.3) з його центра бічну сторону трапеції видно під прямим кутом;
   1.4) довжина його діаметра дорівнює довжині висоти трапеції;
   1.5) квадрат довжини його діаметра дорівнює добутку довжин основ;
   1.6) квадрат довжини його радіуса дорівнює добутку довжин відрізків, на які точка дотику вписаного кола ділить бічну сторону трапеції.
2) В трапецію можна вписати коло **тоді і лише тоді**, коли сума довжин її основ дорівнює сумі довжин бічних сторін (довжина її (першої) середньої лінії дорівнює півсумі довжин бічних сторін).
3) В трапецію $A_1A_2BC$ ($\overrightarrow{A_1A_2} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CB}, A_1A_2 < BC$) можна вписати коло **тоді і лише тоді**, коли виконується рівність

$$\operatorname{tg}\frac{\angle A_1CB}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\angle A_2BC}{2} = \frac{A_1A_2}{BC}. \tag{2}$$

## 2.12. Основна властивість-ознака «вписано-описаної» трапеції

Трапеція є вписаною і описаною тоді і лише тоді, коли вона є рівнобокою, а довжина її бічної сторони дорівнює довжині середньої лінії.

## 2.13. Основні метричні співвідношення в довільній трапеції

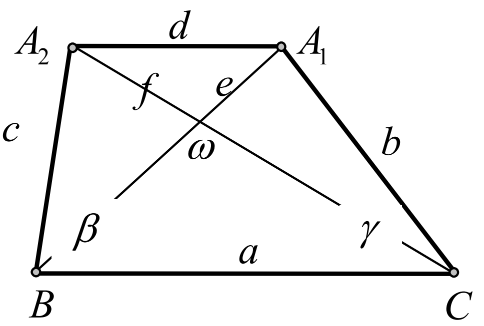



**Рис. 2:** до основних метричних співвідношень в трапеції

Якщо $J_1$ ($J_1'$) — точка перетину бісектрис внутрішніх (зовнішніх) кутів при вершинах $A_1$ і $C$, а $J_2$ ($J_2'$) — точка перетину бісектрис внутрішніх (зовнішніх) кутів при вершинах $A_2$ і $B$, то

$$2J_1J_2 = |(a+d)-(b+c)|, \quad 2J_1'J_2' = a+d+b+c. \tag{3}$$

***Аналог теореми синусів***

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a-d}{\sin(\beta+\gamma)}. \tag{4}$$

***Аналоги теореми косинусів***

$$\cos\beta = \frac{(a-d)^2+c^2-b^2}{2(a-d)c}, \quad \cos\gamma = \frac{(a-d)^2+b^2-c^2}{2(a-d)b}. \tag{5}$$

$$\cos(180^0-\beta-\gamma) = \frac{b^2+c^2-(a-d)^2}{2bc}, \quad (a+d)^2 = e^2+f^2-2ef\cos\omega. \tag{6}$$

***Довжини діагоналей трапеції***

$$e^2 = a^2+b^2-\frac{a}{a-d}\left((a-d)^2+b^2-c^2\right) = c^2+ad+\frac{d}{a-d}\left(c^2-b^2\right); \tag{7}$$

$$f^2 = a^2+c^2-\frac{a}{a-d}\left((a-d)^2+c^2-b^2\right) = b^2+ad+\frac{d}{a-d}\left(b^2-c^2\right); \tag{8}$$

$$e^2+f^2 = b^2+c^2+2ad. \tag{9}$$

***Косинус кута між діагоналями трапеції***

$$\cos\omega = \frac{1}{2}\cdot\frac{(a-d)\cdot(b^2+c^2-a^2-d^2)}{\sqrt{a(ad+b^2)-d(ad+c^2)}\cdot\sqrt{a(ad+c^2)-d(ad+b^2)}}. \tag{10}$$

***Довжини проекцій бічних сторін на більшу основу трапеції***

$$BA_2' = \frac{(a-d)^2+c^2-b^2}{2(a-d)}, \quad A_1'C = \frac{(a-d)^2+b^2-c^2}{2(a-d)}. \tag{11}$$

***Синуси кутів (при більшій основі) трапеції***

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{(a-d+b+c)(a-d-b+c)(a-d+b-c)(-a+d+b+c)}}{2(a-d)c} =$$

$$= \frac{2}{(a-d)c}\cdot\sqrt{p(p-a+d)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a-d+b+c}{2}, \tag{12}$$

$$\sin\gamma = \frac{\sqrt{(a-d+b+c)(a-d-b+c)(a-d+b-c)(-a+d+b+c)}}{2(a-d)b} =$$

$$= \frac{2}{(a-d)b}\cdot\sqrt{p(p-a+d)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a-d+b+c}{2}. \tag{13}$$

***Довжина висоти трапеції***

$$h_a = A_iA_i' = \frac{2}{(a-d)}\cdot\sqrt{p(p-a+d)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a-d+b+c}{2}. \tag{14}$$

### *Аналоги прямої та оберненої теорем Піфагора*

1) Трапеція є прямокутною тоді і лише тоді, коли:

$$c^2 = b^2 + (a-d)^2 \quad \text{або ж} \quad b^2 = c^2 + (a-d)^2. \tag{15}$$

2) Трапеція є ББ-прямокутною тоді і лише тоді, коли:

$$(a-d)^2 = b^2 + c^2. \tag{16}$$

3) Трапеція є ДД-прямокутною тоді і лише тоді, коли:

$$(a+d)^2 = e^2 + f^2 \Leftrightarrow a^2 + d^2 = b^2 + c^2. \tag{17}$$

4) Трапеція є ДБ-прямокутною тоді і лише тоді, коли:

$$\begin{array}{llll} a^2 = b^2 + e^2 & \text{або ж} & a^2 = c^2 + f^2, & \text{(для умовно-гострокутних трапецій);} \\ d^2 = b^2 + f^2 & \text{або ж} & d^2 = c^2 + e^2, & \text{(для умовно-тупокутних трапецій).} \end{array} \tag{18}$$

5) Трапеція є ДО-прямокутною тоді і лише тоді, коли:

$$\begin{array}{rl} \text{або} & c^2 = d^2 + e^2 \quad \text{і} \quad b^2 = e^2 + a^2; \\ \text{або ж} & c^2 = a^2 + f^2 \quad \text{і} \quad b^2 = f^2 + d^2. \end{array} \tag{19}$$

---

1*) Трапеція ( $a > d$ ) є умовно-гострокутною тоді і лише тоді, коли:

$$\left((a-d)^2 + b^2 - c^2\right) \cdot \left((a-d)^2 + b^2 - c^2\right) > 0. \tag{20}$$

2*) Трапеція ( $a > d$ ) є умовно-тупокутною тоді і лише тоді, коли:

$$\left((a-d)^2 + b^2 - c^2\right) \cdot \left((a-d)^2 + b^2 - c^2\right) < 0. \tag{21}$$

### *Довжини відрізків з кінцями на сторонах трапеції*

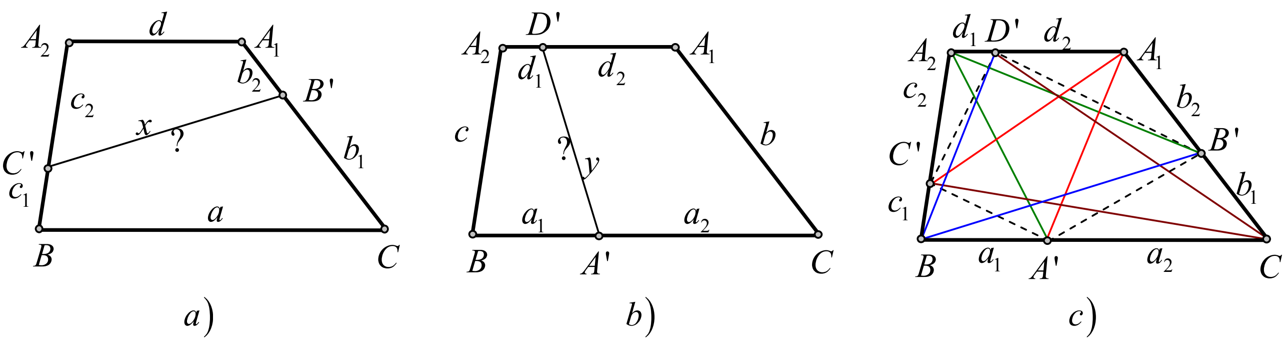


**Рис. 3:** до формул обчислення довжин відрізків з кінцями на сторонах трапеції: $a = a_1 + a_2$ , $b = b_1 + b_2$ , $c = c_1 + c_2$ , $d = d_1 + d_2$

1. Довжину відрізка з кінцями на бічних сторонах трапеції (рис. 3 $a$)) можна обчислити за формулою:

$$x^2=\left(\frac{ab_2+db_1}{a-d}\right)^2+\left(\frac{ac_2+dc_1}{a-d}\right)^2-\frac{ab_2+db_1}{a-d}\cdot\frac{ac_2+dc_1}{a-d}\cdot\frac{b^2+c^2-(a-d)^2}{bc}. \tag{22}$$

1.1) Нехай далі $C'B'||BC$. Тоді $b_2:b_1=c_2:c_1=x-d:a-x$, а формула (22) набуває вид

$$x=C'B'=a\cdot\frac{b_2}{b}+d\cdot\frac{b_1}{b}. \tag{23}$$

1.1.1) якщо $B'$ – середина $AC$, то $C'B'$ — середня лінія, а формула (23) набуває вид

$$C'B'=\frac{a+d}{2}. \tag{24}$$

1.1.2) якщо $C'B'$ проходить через точку перетину діагоналей, то $b_2:b_1=d:a$, а формула (23) набуває вид

$$C'B'=\frac{2ad}{a+d}. \tag{25}$$

1.1.2)* *довжину відрізка $C'B'$, який містить точку перетину продовжень бічних сторін, є паралельним до її основ та обмежений продовженнями діагоналей трапеції, можна знайти за формулою*

$$C'B'=\frac{2ad}{a-d}. \tag{26}$$

1.1.3) якщо $C'B'$ ділить трапецію на дві подібні трапеції, то $b_2:b_1=x:a$ та із формули (23) маємо

$$C'B'=\sqrt{a\cdot d},\quad \text{звідки}\quad b_2:b_1=\sqrt{d}:\sqrt{a}=c_2:c_1; \tag{27}$$

1.1.4) якщо $C'B'$ ділить трапецію на дві трапеції рівних площ, то $b_2:b_1=(a+x):(d+x)$ та із формули (23) маємо

$$C'B'=\sqrt{\frac{a^2+d^2}{2}},\quad \text{звідки}\quad b_2:b_1=(\sqrt{2(a^2+d^2)}-a-d):a+d \tag{28}$$

2. Довжину відрізка з кінцями на основах трапеції (рис. 3 $b$)) можна обчислити за формулою:

$$y^2=b^2\cdot\frac{a_1-d_1}{a-d}+c^2\cdot\frac{a_2-d_2}{a-d}-(a_1-d_1)(a_2-d_2). \tag{29}$$

2.1) довжину другої середньої лінії — за формулою

$$AA_0^2=\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{2}-\left(\frac{a-d}{2}\right)^2. \tag{30}$$

3. Довжини відрізків з кінцями на основі та бічній стороні трапеції (рис. 3 $c$)) можна обчислити за формулами:

$$\begin{aligned} A'B'^2 &= a_2^2 + b_1^2 - \frac{a_2}{a-d}\cdot\frac{b_1}{b}\cdot\left((a-d)^2+b^2-c^2\right), \\ B'D'^2 &= d_2^2 + b_2^2 + \frac{d_2}{a-d}\cdot\frac{b_2}{b}\left((a-d)^2+b^2-c^2\right); \\ A'C'^2 &= a_1^2 + c_1^2 - \frac{a_1}{a-d}\cdot\frac{c_1}{c}\cdot\left((a-d)^2-b^2+c^2\right), \\ C'D'^2 &= d_1^2 + c_2^2 + \frac{d_1}{a-d}\cdot\frac{c_2}{c}\cdot\left((a-d)^2-b^2+c^2\right). \end{aligned} \tag{31}$$

4. Довжини «чевіан» трапеції (рис. 3 $c$)) можна обчислити за формулами:

$$\begin{aligned} A_1A'^2 &= a_2^2 + b^2 - \frac{a_2\cdot\left((a-d)^2+b^2-c^2\right)}{a-d}, \quad A_1C'^2 = c_2^2 + d^2 + \frac{c_2\cdot d\cdot\left((a-d)^2-b^2+c^2\right)}{c(a-d)}; \\ A_2A'^2 &= a_1^2 + c^2 - \frac{a_1\cdot\left((a-d)^2-b^2+c^2\right)}{a-d}, \quad A_2B'^2 = b_2^2 + d^2 + \frac{b_2\cdot d\cdot\left((a-d)^2+b^2-c^2\right)}{b(a-d)}; \end{aligned} \tag{32}$$

4.1) довжини медіан трапеції — за формулами

$$AA_0^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \left(\frac{a-d}{2}\right)^2; \quad BB_0^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + d\left(\frac{a}{2} + \frac{c^2-b^2}{2(a-d)}\right);$$

$$CC_0^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4} + d\left(\frac{a}{2} + \frac{b^2-c^2}{2(a-d)}\right). \tag{33}$$

### *Аналог властивості точки перетину медіан*

Нехай $M$ — точка перетину медіан $AA_0$, $BB_0$ і $CC_0$. Тоді мають місце відношення:

$$\frac{AM}{MA_0} = \frac{2a+d}{a}, \quad \frac{BM}{MB_0} = \frac{2a}{a+d} = \frac{CM}{MC_0}. \tag{34}$$

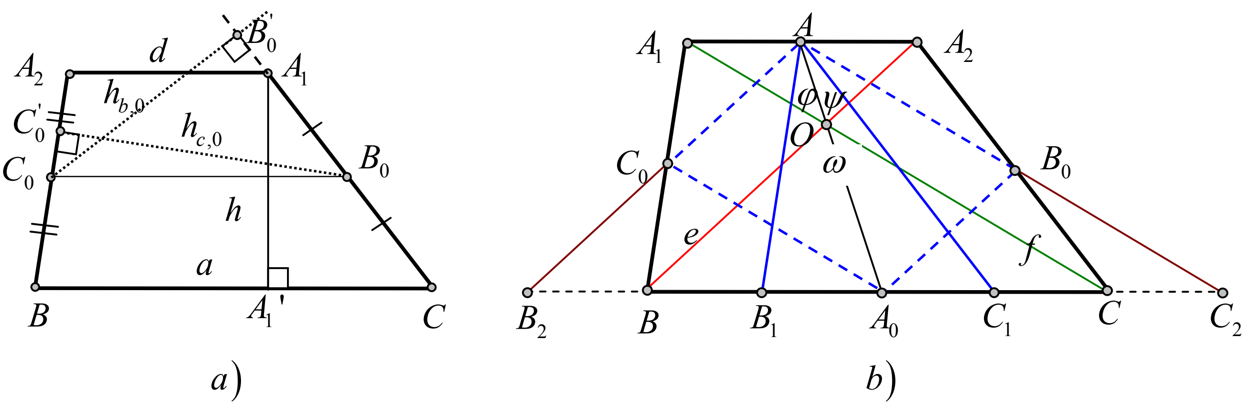



**Рис. 4:** до формул обчислення площі трапеції

***Формули площ трапеції та деяких її фігур***

1) Площу трапеції можна знайти (як/за):

1.1) площу другого чудового трикутника трапеції:

$$S_{A_1A_2BC} = S_{AB_2C_2}; \tag{35}$$

1.2) добуток довжини висоти на півсуму довжин її основ:

$$S_{A_1A_2BC} = \tfrac{a+d}{2} \cdot h = C_0B_0 \cdot h; \tag{36}$$

1.3) добуток другої середньої лінії і суми перпендикулярів, проведених на цю середню лінію (або на її продовження) з двох вершин, які є кінцями однієї з діагоналей;

1.4) добуток довжини діагоналі трапеції на довжину другої середньої лінії та на синус кута між ними:

$$S_{A_1A_2BC} = AA_0 \cdot A_1B \cdot \sin\psi, \quad S_{A_1A_2BC} = AA_0 \cdot A_2C \cdot \sin\varphi; \tag{37}$$

1.5) подвоєну площу трикутника, утвореного бічною стороною та серединою іншої бічної сторони:

$$S_{A_1A_2BC} = 2 \cdot S_{\triangle A_2BB_0}, \quad S_{A_1A_2BC} = 2 \cdot S_{\triangle A_1CC_0}; \tag{38}$$

1.6) добуток довжини бічної сторони трапеції на довжину перпендикуляра, опущеного із середини іншої бічної сторони трапеції на цю бічну сторону:

$$S_{A_1A_2BC} = A_1C \cdot C_0B_0' = b \cdot h_{b,0}, \quad S_{A_1A_2BC} = A_2B \cdot B_0C_0' = c \cdot h_{c,0}; \tag{39}$$

1.7) подвоєну площу паралелограма Варіньона:

$$S_{A_1A_2BC} = 2 \cdot S_{AC_0A_0B_0}; \tag{40}$$

1.8) як добуток довжин середніх ліній трапеції на синус кута між ними;

1.9) квадрат суми коренів із площ власних малих трикутників, прилеглих до основ трапеції:

$$S_{A_1A_2BC} = \left(\sqrt{S_{\triangle A_1A_2O}} + \sqrt{S_{\triangle BCO}}\right)^2; \tag{41}$$

1.10) добуток площі першого чудового трикутника на відношення суми довжин основ до їх різниці:

$$S_{A_1A_2BC} = \tfrac{a+d}{a-d} \cdot S_{AB_1C_1}; \tag{42}$$

1.11) за «першою формулою Герона» (за сторонами трапеції):

$$S_{A_1A_2BC} = \tfrac{a+d}{a-d} \cdot \sqrt{p(p-a+d)(p-b)(p-c)}, \quad p = \tfrac{a-d+b+c}{2}; \tag{43}$$

1.12) за «другою формулою Герона» (за основами і діагоналями трапеції):

$$S_{A_1A_2BC} = \sqrt{q(q-e)(q-f)(q-a-d)}, \quad q = \tfrac{a+d+e+f}{2}; \tag{44}$$

1.13) за формулою (лише для умовно-гострокутних трапецій):

$$S_{A_1A_2BC} = \frac{1}{2}\left(a^2 - d^2\right) \cdot \frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}. \tag{45}$$

1.14) півдобуток діагоналей на синус кута між ними.

$$S_{A_1A_2BC} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \cdot \sin\omega. \tag{46}$$

2) Друга середня лінія трапеції ділить її на дві трапеції рівних площ.

3) Площі власних великих трикутників, прилеглих до спільної основи трапеції є рівними.

4) Площі трикутників, утворених бічними сторонами та спільною вершиною, що належить прямій, яка містить середини основ трапеції, є рівними.

5) $S_c = S_b$, де $S_c$ і $S_b$ — площі власних малих трикутників, прилеглих до бічних сторін трапеції.

6) $S_c = S_b = \sqrt{S_a \cdot S_d}$, $S_a : S_d = a^2 : d^2$, де $S_a$ і $S_d$ — площі власних малих трикутників, прилеглих до основ трапеції.

## 2.14. Деякі ознаки трапеції

Опуклий чотирикутник $A_1A_2BC$ ($O$ — точка перетину діагоналей $A_1B$ і $A_2C$) (що не є паралелограмом) **є трапецією**, якщо виконується одна з наступних умов:

1) трикутники $A_1BC$ і $A_2BC$ мають однакову площу;
2) трикутники $A_1OC$ і $A_2OB$ мають однакову площу;
3) $\sqrt{S_{A_1A_2BC}} = \sqrt{S_{BOC}} + \sqrt{S_{A_2OA_1}}$;
4) довжина відрізка, що сполучає середини протилежних непаралельних сторін чотирикутника дорівнює півсумі довжин двох інших сторін;
5) середня лінія проходить через точку перетину діагоналей;
6) довжина відрізка, що сполучає середини діагоналей, дорівнює піврізниці довжин протилежних сторін;
7) $C_0E_0 = F_0B_0$, де $C_0, B_0$ середини протилежних сторін $A_2B$ і $A_1C$ відповідно, а $E_0 = A_1B \cap C_0B_0$, $F_0 = A_2C \cap C_0B_0$;
8) внутрішній (відносно чотирикутника) відрізок прямої, яка проходить через точку $O$ перетину діагоналей паралельно до однієї зі сторін, ділиться точкою $O$ навпіл;
9) добуток площ трикутників, на які чотирикутник розбивається однією зі своїх діагоналей, дорівнює добутку площ трикутників, на які він розбивається іншою своєю діагоналлю;
10) середини двох протилежних сторін та точка перетину продовжень двох інших сторін належать одній прямій.

## 2.15. Додаткові властивості і формули для окремих видів трапеції

1. Діагональ трапеції є бісектрисою гострого кута (при більшій основі) тоді і лише тоді, коли довжина прилеглої бічної сторони дорівнює довжині меншої основи.
2. Діагональ трапеції є бісектрисою тупого кута (при меншій основі) тоді і лише тоді, коли довжина прилеглої бічної сторони дорівнює довжині більшої основи.

3. Якщо бісектриси кутів при одній з основ трапеції перетинаються на іншій основі, то довжина останньої дорівнює сумі довжин бічних сторін.
4. Якщо довжина бічної сторони трапеції дорівнює сумі довжин її основ, то бісектриси прилеглих до неї кутів перетинаються на іншій бічній стороні.

5. Довжина більшої основи вдвічі більша за довжину меншої основи трапеції $A_1A_2BC$ ( $\overrightarrow{A_1A_2} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CB}$, $BC$ ) тоді і лише тоді, коли на більшій основі $BC$ існує така точка $Z$, що периметри трикутників $BA_2Z$, $A_2ZA_1$ та $ZA_1C$ є рівними.

6. Якщо в трапецію $A_1A_2BC$ з основами $BC = a$, $A_1A_2 = d$ $(a > d)$ та бічними сторонами $A_1C = b$, $A_2B = c$ можна вписати коло, яке дотикається сторін $A_1A_2$, $A_2B$, $BC$, $CA_1$ в точках $D_t$, $C_t$, $A_t$ і $B_t$ відповідно, то
   (a) $C_tQ \| BC$, $B_tQ \| BC$, де $Q = BD_t \cap A_2A_t$;
   (b) $BC_t \cdot C_tA_2 = CB_t \cdot B_tA_1$;
   (c) радіус вписаного кола можна знайти за однією з формул
   $$r = \frac{S_{A_1A_2BC}}{a+d} = \frac{S_{A_1A_2BC}}{b+c}; \tag{47}$$
   $$r = \sqrt{BC_t \cdot C_tA_2}, \quad r = \sqrt{CB_t \cdot B_tA_1}; \tag{48}$$
   (d) мають місце співвідношення
   $$\frac{S_{A_1A_2BC}}{\sqrt{BC_t \cdot C_tA_2}} = d\left(1 + \frac{BC_t}{d - C_tA_2}\right) = a\left(1 + \frac{C_tA_2}{a - BC_t}\right); \tag{49}$$
   (e) кола, побудовані на бічних сторонах як на діаметрах, дотикаються;
   (f) радіуси $r_1$, $r_2$, $r_3$, $r_4$ кіл, вписаних у трикутники $BOC$, $A_2OB$, $A_1OA_2$ і $COA_1$ відповідно ($O$ — точка перетину діагоналей), задовольняють умову
   $$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}; \tag{50}$$

7. Для рівнобічної трапеції $A_1A_2BC$ ($\overrightarrow{A_1A_2} \upuparrows \overrightarrow{CB}$) з основами $BC = a$, $A_1A_2 = d$ ($a > d$) та бічними сторонами $A_1C = A_2B = b$ ($\beta = \gamma$) мають місце наступні співвідношення та формули-спрощення:
   (a) $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{a-d}{2\sin\beta\cos\beta}$, $\cos\beta = \dfrac{a-d}{2b}$; $\sin\beta = \dfrac{\sqrt{4b^2-(a-d)^2}}{2b}$;
   (b) $e^2 = f^2 = b^2 + ad$, $\cos\omega = \dfrac{2b^2-a^2-d^2}{2(b^2+ad)}$; $BA_2' = A_1'C = \frac{a-d}{2}$;
   (c) $AA_0^2 = \dfrac{4b^2-(a-d)^2}{4}$, $BB_0^2 = CC_0^2 = \dfrac{2a(a+d)+b^2}{4}$;
   (d) $h_a = A_1A_1' = A_2A_2' = \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{4b^2-(a-d)^2} = \sqrt{e^2-(\frac{a+d}{2})^2}$;
   (e) $S_{A_1A_2BC} = \frac{a+d}{4}\sqrt{4b^2-(a-d)^2} = \frac{a+d}{4}\sqrt{4e^2-(a+d)^2} = \frac{a^2-d^2}{4}\operatorname{tg}\beta$;
   (f) центр описаного навколо трапеції кола належить колу, описаному навколо $\triangle\, BOA_2$, де $O$ — точка перетину діагоналей;
   (g) радіус кола, описаного навколо трапеції, можна знайти за формулою

$$R = \frac{b\sqrt{b^2+ad}}{\sqrt{4b^2-(a-d)^2}} = \frac{\sqrt{4h_a^2+(a+d)^2}\sqrt{4h_a^2+(a-d)^2}}{8h_a}. \qquad (51)$$

8. Якщо в рівнобоку трапецію з гострим кутом $\beta$ при (більшій) основі можна вписати коло, то

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{1+\sin^2\beta}}{\sin^2\beta} = \frac{a+d}{4ad}\sqrt{(a+d)^2+4ad}. \qquad (52)$$

9. Якщо **рівнобічна трапеція** $A_1A_2BC$ ($\overrightarrow{A_1A_2} \upuparrows \overrightarrow{CB}$) з основами $BC = a$ і $A_1A_2 = d$ ($a > d$) [та бічними сторонами $A_1C = A_2B = b$] **є**:
   (a) **ББ-прямокутною**, то

$$\boxed{(a-d)^2 = 2b^2}, \ \beta = \gamma = 45^0, \ e = f = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+d^2}, \ \cos\omega = \frac{-2ad}{a^2+d^2},$$

$$R = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+d^2}, \ h_a = \tfrac{1}{2}(a-d), \ S = \tfrac{1}{4}(a^2-d^2); \qquad (53)$$

   (b) **ДД-прямокутною** (дельта-трапецією), то

$$\boxed{b = \sqrt{\tfrac{a^2+d^2}{2}}}, \ e = \tfrac{a+d}{\sqrt{2}}, \ \cos\beta = \frac{a-d}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+d^2}}, \ \sin\beta = \frac{a+d}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+d^2}},$$

$$\omega = 90^0, \ R = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+d^2}, \ h_a = \tfrac{1}{2}(a+d), \ S = \tfrac{1}{4}(a+d)^2; \qquad (54)$$

(c) **ДБ-прямокутною**, то центр описаного навколо неї кола співпадає із серединою більшої основи і тому

$$2R = a,\ \boxed{b^2 = \tfrac{a(a-d)}{2}}\ ,\ e = \sqrt{\tfrac{a(a+d)}{2}},\ \cos\beta = \sqrt{\tfrac{a-d}{2a}},\ \sin\beta = \sqrt{\tfrac{a+d}{2a}},$$

$$\cos\omega = -\tfrac{d}{a},\ h_a = \tfrac{\sqrt{a^2-d^2}}{2},\ S = \tfrac{a+d}{4}\sqrt{a^2-d^2}; \tag{55}$$

(d) **описаною** (можна вписати коло), то:

$$\boxed{b = \tfrac{a+d}{2}}\ ,\ r = \tfrac{\sqrt{ad}}{2} = \tfrac{h_a}{2},\ P_{A_1A_2BC} = 4b = 2(a+d),$$

$$e = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a+d)^2 + 4ad},\ R = \tfrac{a+d}{8}\sqrt{\tfrac{(a+d)^2+4ad}{ad}},$$

$$S_{A_1A_2BC} = \tfrac{a+d}{2}\sqrt{ad},\ B_tC_t = \frac{2ad}{a+d}, \tag{56}$$

де $B_t, C_t$ — точки дотику вписаного кола з бічними сторонами $A_1C$ і $A_2B$ відповідно;

(e) такою, що $h_a = \sqrt{ad}$, то в неї можна вписати коло;

(f) **БВ-рівнобокою** (діагональ є бісектрисою гострого кута), то вона є максимально рівнобокою зверху ( $\boxed{b = c = d}$ ) та мають місце формули

$$\cos\beta = \tfrac{a-d}{2d},\ \sin\beta = \tfrac{\sqrt{(a+d)(3d-a)}}{2d},\ e = \sqrt{d(a+d)},\ \cos\omega = \tfrac{d-a}{2d},$$

$$R = \frac{d\sqrt{d(a+d)}}{\sqrt{(a+d)(3d-a)}},\quad h_a = \frac{\sqrt{(a+d)(3d-a)}}{2} = \tfrac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{P^2-4a^2},$$

$$P = 3d + a = 2\sqrt{a^2 + 3h_a^2},$$

$$S = \frac{(a+d)\sqrt{(a+d)(3d-a)}}{4} = \tfrac{\sqrt{3}}{36}(P+2a)\sqrt{P^2-4a^2}; \tag{57}$$

(g) **БН-рівнобокою** (діагональ є бісектрисою тупого кута), то вона є максимально рівнобокою знизу ( $\boxed{b = c = a}$ ) та мають місце формули

$$\cos\beta = \tfrac{a-d}{2a},\ \sin\beta = \tfrac{\sqrt{(a+d)(3a-d)}}{2a},\ e = \sqrt{a(a+d)},\ \cos\omega = \tfrac{a-d}{2a},$$

$$R = \frac{a\sqrt{a(a+d)}}{\sqrt{(a+d)(3a-d)}},\quad h_a = \frac{\sqrt{(a+d)(3a-d)}}{2} = \tfrac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{P^2-4d^2},$$

$$P = 3a + d = 2\sqrt{d^2 + 3h_a^2},$$

$$S = \frac{(a+d)\sqrt{(a+d)(3a-d)}}{4} = \tfrac{\sqrt{3}}{36}(P+2d)\sqrt{P^2-4d^2}. \tag{58}$$

(h) **правильною**, то

$$\boxed{d = b = \tfrac{a}{2}},\ 2R = a,\ \beta = 60^0,\ e = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ \omega = 120^0,$$

$$h_a = \frac{a\sqrt{3}}{4},\ S = \frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot R^2 = \frac{3\sqrt{3}}{16}\cdot a^2; \tag{59}$$

10. Для **прямокутної трапеції** $A_1A_2BC$ ( $\overrightarrow{A_1A_2} \upuparrows \overrightarrow{CB}$ ) з основами $BC = a$ і $A_1A_2 = d$ $(a > d)$ та бічними сторонами $A_1C = b < c = A_2B$ ( $\gamma = 90^0$ ) мають місце наступні співвідношення та формули-спрощення:
    (a) $\boxed{c^2 = b^2 + (a-d)^2}$ , $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{1} = \dfrac{a-d}{\cos\beta}$;
    (b) $e^2 = b^2 + a^2 = c^2 + 2ad - d^2$, $f^2 = b^2 + d^2 = c^2 + 2ad - a^2$;
    (c) $e^2 + f^2 = 2b^2 + a^2 + d^2 = b^2 + c^2 + 2ad = 2c^2 - a^2 - d^2 + 4ad$;
    (d) $\cos\omega = \dfrac{b^2 - ad}{\sqrt{b^2+a^2}\sqrt{b^2+d^2}} = \dfrac{c^2 - ad - (a-d)^2}{\sqrt{c^2 + d(2a-d)}\sqrt{c^2 + a(2d-a)}}$;
    (e) $AA_0^2 = \dfrac{(a-d)^2}{4} + b^2$, $BB_0^2 = \dfrac{b^2}{4} + a^2$, $CC_0^2 = \dfrac{c^2}{4} + ad$;
    (f) $BA_2' = a - d$, $h_a = b$, $S = \dfrac{a+d}{2} \cdot b = \dfrac{a+d}{2} \cdot \sqrt{c^2 - (a-d)^2}$.
11. У трапеції $A_1A_2BC$ ( $\overrightarrow{A_1A_2} \upuparrows \overrightarrow{CB}$ ) з будь-яких двох умов 1*) $A_1B \perp A_2C$; 2*) $A_2B = \sqrt{A_1A_2 \cdot BC}$; 3*) $A_2B \perp A_2A_1$ випливає третя.

12. Якщо **прямокутна трапеція** $A_1A_2BC$ ( $\overrightarrow{A_1A_2} \upuparrows \overrightarrow{CB}$ ) з основами $BC = a > d = A_1A_2$ [та бічними сторонами $A_1C = b < c = A_2B$]:
    (a) **є ДД-прямокутною** (дельта-трапецією), то

$$\boxed{b^2 = ad}, \quad c^2 = ad + (a-d)^2, \quad e^2 = a(a+d), \quad f^2 = d(a+d);$$
$$\frac{e}{f} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{d}}, \quad e^2 + f^2 = (a+d)^2, \quad h_a = \sqrt{ad}, \qquad S = \frac{a+d}{2}\sqrt{ad};$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{ad}}{\sqrt{ad + (a-d)^2}}, \ \cos\beta = \frac{a-d}{\sqrt{ad + (a-d)^2}}, \ \cos\omega = 0. \qquad (60)$$

    (b) **є ДБ-прямокутною**, то

$$\boxed{b^2 = d(a-d)}, \quad c^2 = a(a-d), f^2 = ad, \quad e^2 = a^2 + ad - d^2;$$
$$h_a = \sqrt{d(a-d)}, \quad S = \tfrac{a+d}{2}\sqrt{d(a-d)}, \qquad e^2 + f^2 = a^2 + 2ad - d^2;$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{a}}, \ \cos\beta = \frac{\sqrt{a-d}}{\sqrt{a}}, \ \cos\omega = \frac{-d^2}{\sqrt{ad}\sqrt{a^2+ad-d^2}}. \qquad (61)$$

    (c) **є ЛВ-рівнобокою** (діагональ є бісектрисою гострого кута), то

$$\boxed{c = d}, \ b^2 = a(2d-a), \quad e^2 = 2ad, \qquad f^2 = d^2 + a(2d-a);$$
$$e^2 + f^2 = d^2 + 4ad - a^2, \quad h_a = \sqrt{a(2d-a)}, \quad S = \frac{a+d}{2}\sqrt{a(2d-a)};$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{a(2d-a)}}{d}, \ \cos\beta = \frac{a-d}{d}, \ \cos\omega = \tfrac{-a(a-d)}{\sqrt{2ad}\sqrt{d^2+2ad-a^2}}. \qquad (62)$$

(d) **є ПВ-рівнобокою** (діагональ є бісектрисою прямого кута при більшій основі), то

$$\boxed{b=d}\,,\ \ c^2=d^2+(a-d)^2,\quad e^2=a^2+d^2,\ \ f^2=2d^2;$$
$$e^2+f^2=a^2+3d^2,\ \ h_a=d,\qquad S=\tfrac{a+d}{2}\cdot d;$$

$$\sin\beta=\tfrac{d}{\sqrt{d^2+(a-d)^2}},\ \cos\beta=\tfrac{a-d}{\sqrt{d^2+(a-d)^2}},\ \cos\omega=\tfrac{-(a-d)}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+d^2}}.\tag{63}$$

(e) **є ЛН-рівнобокою** (діагональ є бісектрисою тупого кута), то

$$\boxed{c=a}\,,\ b^2=d(2a-d),\quad e^2=a^2+2ad-d^2,\ \ f^2=2ad;$$
$$e^2+f^2=a^2+4ad-d^2,\ \ h_a=\sqrt{d(2a-d)},\quad S=\tfrac{a+d}{2}\sqrt{d(2a-d)};$$

$$\sin\beta=\tfrac{\sqrt{d(2a-d)}}{a},\ \cos\beta=\tfrac{a-d}{a},\ \cos\omega=\tfrac{d(a-d)}{\sqrt{2ad}\sqrt{a^2+2ad-d^2}}.\tag{64}$$

(f) **є ПН-рівнобокою** (діагональ є бісектрисою прямого кута при меншій основі), то

$$\boxed{b=a}\,,\ \ c^2=a^2+(a-d)^2,\quad f^2=a^2+d^2,\ \ e^2=2a^2;$$
$$e^2+f^2=3a^2+d^2,\ \ h_a=a,\qquad S=\tfrac{a+d}{2}\cdot a;$$

$$\sin\beta=\tfrac{a}{\sqrt{a^2+(a-d)^2}},\ \cos\beta=\tfrac{a-d}{\sqrt{a^2+(a-d)^2}},\ \cos\omega=\tfrac{(a-d)}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+d^2}}.\tag{65}$$

(g) **є описаною** (можна вписати коло), то пряма, що проходить через центр вписаного кола і вершину гострого кута, ділить трапецію на дві фігури рівних площ та мають місце наступні співвідношення

$$\boxed{2ad=b(a+d)}\,,\ \ r=\tfrac{ad}{a+d}=\tfrac{b}{2}=\tfrac{h_a}{2},\ \ c=\tfrac{a^2+d^2}{a+d};$$
$$e=\tfrac{d\sqrt{4a^2+(a+d)^2}}{a+d},\quad f=\tfrac{a\sqrt{4d^2+(a+d)^2}}{a+d},\quad S=ad;$$

$$\sin\beta=\tfrac{2ad}{\sqrt{a^2+d^2}},\ \cos\beta=\tfrac{a^2-d^2}{\sqrt{a^2+d^2}},\ \cos\omega=\tfrac{-(a-d)^2}{\sqrt{(a+d)^2+4a^2}\sqrt{(a+d)^2+4d^2}}.\tag{66}$$

(h) є такою, що $2ad=b(a+d)$, то в неї можна вписати коло;

(i) є такою, що бісектриса кута $B$ перетинає меншу бічну сторону $A_1C$ в точці $Q$, причому $CQ=A_1A_2$, то в неї можна вписати коло;

(j) розділена відрізком *з кінцями на бічних сторонах і паралельним до її основ* на дві трапеції, в кожну з яких можна вписати коло, то

$$d=\tfrac{1}{2}\left(c-\sqrt{c^2-b^2}\right),\quad a=\tfrac{1}{2}\left(c+\sqrt{c^2-b^2}\right).\tag{67}$$

## 3. Класифікація трапецій

На рисунках 5 і 6 нижче представлено блок-схеми можливих підходів до більш деталізованих класифікацій (відмінних від традиційних) трапецій «за мірами кутів» та «довжинами сторін» відповідно.

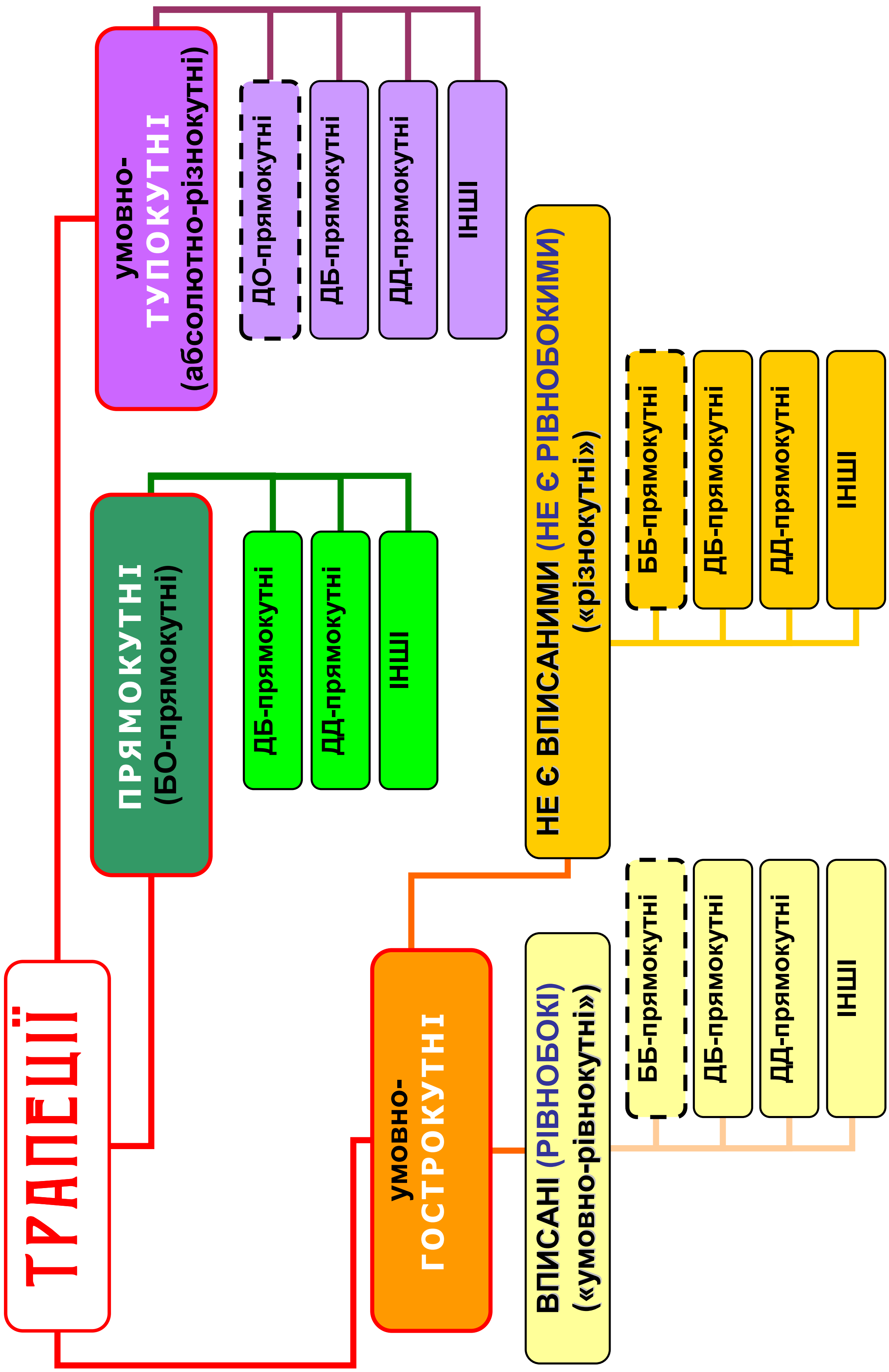



**Рис. 5:** Блок-схема до **класифікації трапецій** «**за мірами кутів**»

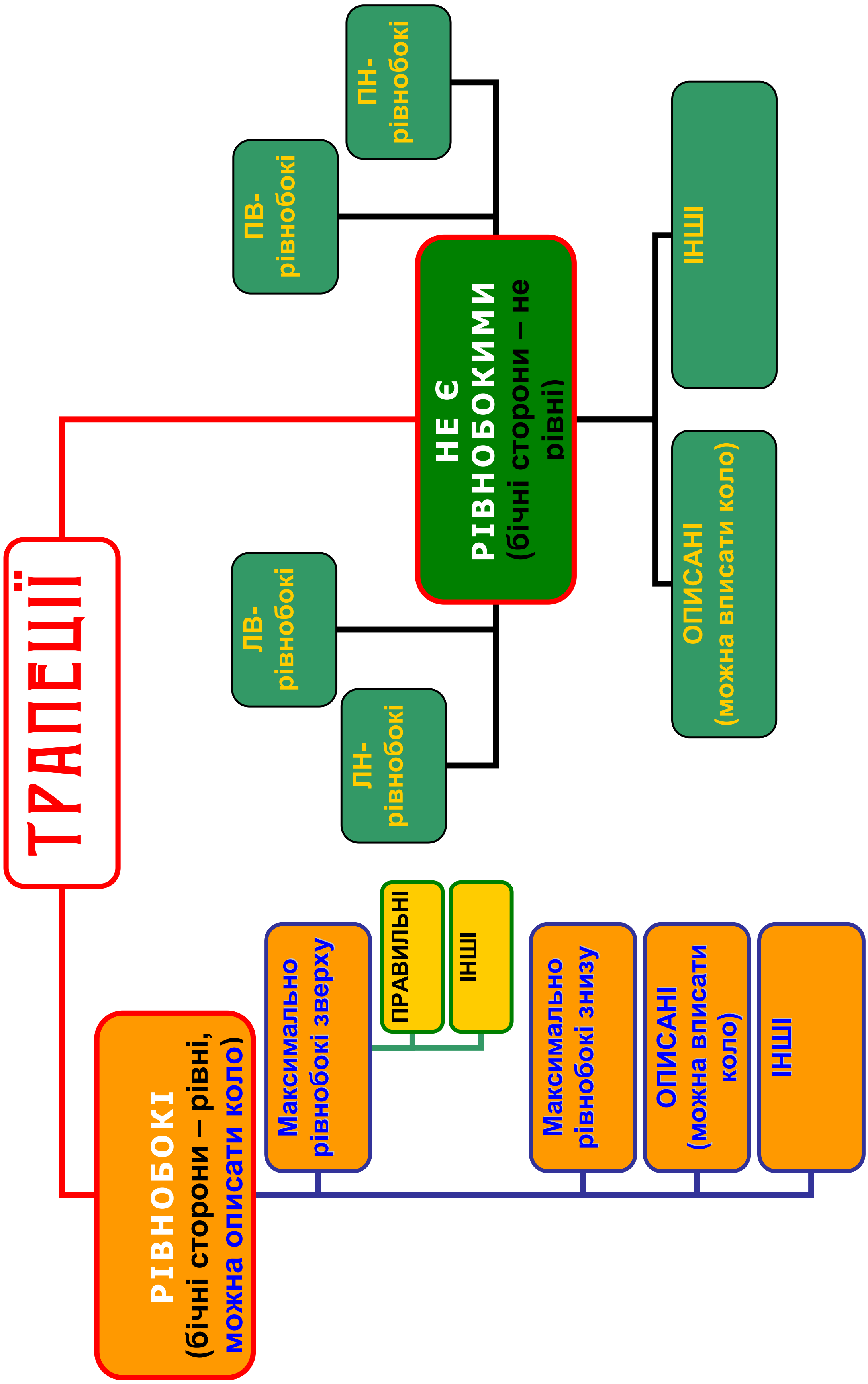



**Рис. 6:** Блок-схема до **класифікації трапецій** «**за довжинами сторін**»

## 4. Деякі дидактичні аспекти

Нижче пропонується один з можливих підходів до використання дидактичного матеріалу із зазначеної теми на основі «тематичної» систематизації задач з урахуванням *чотирьох* рівнів їх складності.

Визначимо наступні «рівні складності задач».

**I-ий рівень**: задачі на безпосереднє застосування однієї з властивостей трапеції (зокрема, окремого її виду) — задачі «ілюстративного характеру» — на відпрацювання навичок застосування основних властивостей.

**II-ий рівень**: задачі на застосування певної властивості, яка подається в умові задачі в неявному вигляді — задачі на «розпізнання завуальованої властивості», зокрема за допомогою додаткових побудов.

**III-ій рівень**: задачі на використання та/ або застосування «двох і більше» властивостей трапеції, розпізнання яких переважно відбувається за допомогою додаткових побудов або ж в результаті оперування з аналітичними умовами-властивостями та раніше встановленими формулами.

**IV-ий рівень**: задачі на встановлення нових властивостей (зокрема для окремих випадків трапеції) та/ або дослідницького характеру (зокрема, «на побудову», «на розрізання»).

Слід зазначити, що «тематична» систематизація задач (та їх класифікація у відповідності із зазначеними рівнями) може бути коректно реалізованою переважно для «першого кола» задач — **I-го і II-го рівня**, які мінімально залежать від хронології викладу теоретичного матеріалу.

Задачі мішаного характеру слід відносити до «другого кола» задач (це переважно задачі **III-го і IV-го рівня**), які необхідно і доцільно розглядати лише після першого кола задач.

## Висновки

На думку авторів, процеси систематизації та класифікації задач з того чи іншого розділу математики є саме тими видами математичної творчості, які повинні бути включені не лише в програму підготовки майбутніх вчителів математики, а й у програму курсів підвищення кваліфікації вчителів математики. Вважаємо, що це дасть можливість: опанувати справжню математичну культуру; підготуватися до передачі її своїм учням; більш ефективно організовувати навчальну діяльність.

Відзначимо, що подальші розвідки в цьому напрямку можуть бути продовжені за рахунок:

— виокремлення ключових «афінних» задач геометрії трапецій;

— виокремлення ключових «метричних» задач геометрії трапецій;

— дослідження додаткових чудових точок, кіл та ліній трапеції;
— систематизації та класифікації задач на розрізання та побудову трапецій, яким в шкільному курсі геометрії майже не приділяється увага.

Цікавим також здається питання про «синтетичну» класифікацію трапецій «*за кутами та довжинами сторін*».

Маємо надію, що запропонований матеріал допоможе учням-випускникам систематизувати свої знання з геометрії трапецій під час підготовки до ЗНО, буде цікавим викладачам математики та допоможе студентам педагогічних ВНЗ і молодим вчителям математики при опануванні практичними навичками при розв'язанні задач на трапеції.

## Література

1. *Алексеев В.* Задачи о трапециях / В. Алексеев, В. Галкин, В. Панферов, В. Тарасов // Научно-популярный физико-математический журнал Квант. — 2000. — № 6. — С. 37–41.
2. *Аліфіренко Ф.М.* Узагальнення теореми Стюарта для трапеції. Спільне в геометрії трикутників і трапецій [Електронний ресурс] / Ф.М. Аліфіренко. — Режим доступу: `http://ddpu.edu.ua/fmk/man_robota_2009.pdf`
3. *Амелькин В.В., Рабцевич Т.И., Тимохович В.Л.* Школьная геометрия в чертежах и формулах. — Минск: Красико-Принт, 2008. — 80 с.
4. *Апостолова Г.В.* Геометрія : 8 : дворівневий підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. — К. : Генеза, 2008. — 272 с.
5. *Бескін М.М.* Методика геометрії : підручник для педагогічних інститутів. — М.: Учпедгиз, 1947. — 276 с.
6. *Бурда М.І., Тарасенкова Н.А.* Геометрія : підручник для 8 класів загальноосвітніх навчальних закладів. — К. : «Зодіак ЕКО» 2010. — 239 с.
7. *Гордин Р.К.* Геометрия. Планиметрия. 7—9 классы. — 3-е изд., испр. — М. : МЦНМО, 2006. — 416 с.
8. *Дзундза А.І.* Особистісний підхід до систематизації навчальних задач / А.І. Дзундза, С.Г. Цапова // Дидактика математики: проблеми і дослідження. — Міжнародний збірник наукових робіт. — Донецьк: Вид-во ДонНУ. — 2012. — Вип. 38. — С. 150–164.
9. *Золотухин Ю.П.* Еще раз про трапецию / [Отклик на статью Л.А. Латотина, Б.Д. Чеботаревского «Пра паняцце трапецыі» в журн. «Матэматыка: праблемы выкладання», № 4, 2003] Ю.П. Золотухин // Матэматыка: праблемы выкладання. — 2004. — №3. — С. 52–58.
10. *Истер А.С.* Решебник основных конкурсных задач по математике из сборника под редакцией М. И. Сканави : Прогрессии. Текстовые за-

дачи. Начала анализа. Планиметрия. Стереометрия: Учеб. пособ. / А.С. Истер. — К. : А.С.К., 2004. — 576 с.

11. *Кадубовський О.А.* До питання про формування навичок при систематизації та класифікації метричних задач шкільного курсу геометрії / О.А. Кадубовський, О.Л. Кадубовська // Проблеми трудової і професійної підготовки: Науково-методичний зб. — 2009. — Вип. 14. — С. 46—54.
12. *Кадубовський О.А.* Навколо теореми Стюарта: наслідки, узагальнення та застосування / О.А. Кадубовський, В.М. Кадубовська, О.Л. Кадубовська // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ. — 2012. — Випуск 2. — С. 163—180.
13. *Капіносов А., Кондратьева Л.* Геометрія: Пробний підручник для 8 класу. — Тернопіль: Підручники і посібники, 2008. — 240 с.
14. *Куланин Е.Д., Федин С.Н.* 3000 конкурсных задач по математике. — М. : Абрис-пресс, 2003. — 624 с.
15. Кушнір І.А. Геометрія трапеції в задачах. — Х. : Вид. Группа «Основа» 2009. — 80 с. (Зб. журн. «Математика в школах України»; Вип. 9 (81)).
16. *Кушнір І.А.* Тріумф шкільної геометрії : навч. посібник для 7-11 кл. / І.А. Кушнір. — К. : Нашчас, 2005. — 432 с.
17. *Кушнір І.А.* Методи розв'язання задач з геометрії : кн. для вчителя / І.А. Кушнір. — К. : Абрис, 1994. — 464 с.
18. *Кушнир И., Финкельштейн Л.* Геометрия 7–9. Школа боевого искусства. Сборник задач. — Киев: Факт, 2000. — 384 с.
19. *Литвиненко Г.Н., Скнар В.Н., Федченко Л.Я.* Сборник заданий для письменного экзамена по геометри в 7-9 классах общеобразовательных школ, лицеев и гимназий. — Донецк, 1998. — 56 с.
20. *Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.* Геометрія : підруч. для 8 кл. з поглибл. вивченням математики. — Х.: Гімназія, 2009. — 240 с.
21. *Понарин Я.П.* Элементарная геометрия: В 2 т. — Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости. — М.: МЦНМО, 2004. — 312 с.
22. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии: Учебное пособие. — 5-е изд., испр. и доп. — М. : МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2006. — 640 с.
23. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / В.К. Егерев и др. // Учебн. пособие; под. ред. М.И. Сканави. — 6-е изд. испр. и доп. — М. : «Столетие», 1997. — 560 с.
24. *Чичигин В.Г.* Методика преподавания геометри: Планиметрия. — М.: Учпедгиз, 1959. — 391 с.
25. *Шарыгин И.* Трапеция / И. Шарыгин // Научно-популярный физико-математический журнал Квант. — 1994. — № 5. — С. 45.