МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

Новіков О.О., Ровенська О.Г., Воронцова Ю.М., Андрющенко Н.В., Волик С.В.

[1] *кандидат фіз.-мат. наук, декан фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики, ДДМА*

[3–4] *студенти 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[5] *студентка 1 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ІНТЕГРАЛІВ ПУАСОНА ОПЕРАТОРАМИ ФЕЙЄРА

Отримані асимптотичні формули для верхніх граней відхилень операторів Фейєра на класах інтегралів Пуасона.

Ключові слова: *ряды Фур'є, суми Фейєра.*

Нехай L — множина сумовних 2π–періодичних функцій, $f \in L$ і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x)$$

— ряд Фур'є функції f. Позначимо через $S_n(f;x)$ часткові суми ряду Фур'є, тоді суми Фейєра $\sigma_n(f;x)$ функції $f \in L$ задаються наступним співвідношенням

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f,x). \tag{1}$$

Наслідуючи О.І. Степанця [1], побозначимо $C^q_{\beta,\infty}$ – класи неперервних 2π–періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)P^q_\beta(t)\,dt,$$

в якій $P^q_\beta(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k\cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})$ – ядро Пуасона, а $\varphi \in S^0_M$, тобто функція $\varphi(x)$ має нульове середнє значення на періоді і $\operatorname{esssup}|\varphi(x)| \leqslant 1$.

Задача про наближення класів $C^q_{\beta,\infty}$ лінійними методами має історію. С.М. Нікольський [2] показав, що для верхніх граней відхилень часткових сум Фур'є на класі аналитичних функцій має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; S_n\right) = \frac{8q^n}{\pi^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}} + O(1)\frac{q^n}{n},$$

де величина $O(1)$ не залежить від $n \in \mathbb{N}$. С.Б. Стечкин [3] показав, що залишковий член цієї рівності можна подати у вигляді $O(1)\frac{q^n}{n(1-q)}$, де величина $O(1)$ рівномірно обмежена відносно $n \in \mathbb{N}$ та $q \in (0;1)$.

В роботі [1] О.І. Степанець отримав аналогічну асимптотичну формулу для класів $C^q_\beta H_\omega$. В.І. Рукасов та С.О. Чайченко [4] для верхніх граней відхилень сум Валле Пуссена на класах $C^q_{\beta,\infty}$ і $C^q_\beta H_\omega$ отримали аналогічні асимптотичні формули. Зокрема, у цій роботі показано, що

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{4q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} + O(1)\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{p(1-q^2)}\right). \qquad (2)$$

А.С. Сердюк [5] показав, що має місце більш загальна рівність ніж (2):

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{p,q} + O(1)\left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^s}\right)\right),$$

де

$$K_{p,q} = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt + q^{2p}}}{1-2q\cos pt + q^2}dt, \;\; s = s(p) = \begin{cases} 1, & p=1 \\ 3, & p = 2,3,..... \end{cases}$$

В даній роботі отримані аналогичні асимптотичні рівності для верхніх граней відхилень тригонометричних поліномів $\sigma_n(f,x)$ на класах $C^q_{\beta,\infty}$.

Теорема 1. *Нехай $q \in (0;1)$. Тоді для $n \to \infty$ має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty}, \sigma_n) = \frac{2}{\pi n}\left(\frac{2q}{1-q^2} + \ln\frac{1+q}{1-q}\right) + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}. \qquad (3)$$

Якщо $q \in (0;1)$ задовольняє умові $|3q^2-1| > q^3$, то для $n \to \infty$ має місце асимптотична формула

$$\mathcal{E}(C^q_{0,\infty}, \sigma_n) = \frac{2}{\pi n}\left(\frac{2q}{1+q^2} - \frac{1+q^2}{1-q^2}\mathrm{arctg}\frac{2q}{1-q^2}\right) + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}. \qquad (4)$$

Доведення. На підставі співвідношення (1) маємо

$$\delta_n(f;x) \stackrel{df}{=} f(x) - \sigma_n(f;x) = f(x) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \rho_k(f;x), \tag{3}$$

де $\rho_k(f,x) \stackrel{df}{=} f(x) - S_k(f,x)$.

Застосовуючи прийоми роботи [6, с.123], отримуємо

$$\delta_n(f;x) = \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_\beta^\alpha(x+t)}{1-2q\cos t+q^2}\left[\Sigma_1 \cos\frac{\beta\pi}{2} + \Sigma_2 \sin\frac{\beta\pi}{2}\right]dt, \tag{5}$$

де

$$\Sigma_1 = \sum_{k=0}^{n-1} q^k[\cos kt - q\cos(k-1)t] = \frac{1/2}{1-2q\cos t+q^2}[2-4q\cos t+$$

$$+2q^2\cos 2t - 2q^n(\cos nt + 2q\cos(n-1)t - q^2\cos(n-2)t)],$$

$$\Sigma_2 = \sum_{k=0}^{n-1} q^k[q\sin(k-1)t - \sin kt] = \frac{1}{1-2q\cos t+q^2}[-4q\sin t+$$

$$+2q^2\sin 2t - 2q^n(\sin nt + 2q\sin(n-1)t - q^2\sin(n-2)t)].$$

Тоді, враховуючи, що

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{(1-2q\cos t+q^2)^2} = O(1)(1-q)^{-3},$$

на підставі (5) маємо

$$\delta_n(f;x) = \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_\beta^\alpha(x+t)}{(1-2q\cos t+q^2)^2}\Bigg[[1-2q\cos t+q^2\cos 2t]\cos\frac{\beta\pi}{2} -$$

$$-[-2q\sin t+q^2\sin 2t]\sin\frac{\beta\pi}{2}\Bigg]dt + O(1)\frac{q^n}{(1-q)^3 n}.$$

Нехай $\beta = 1$. Тоді

$$\delta_n(f;x) = \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_1^q(x+t)[-2q\sin t+q^2\sin 2t]}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt + O(1)\frac{q^n}{(1-q)^3 n}.$$

Отже, в силу інваріантності класу $C^q_{1,\infty}$ відносно зсуву за аргументом

$$\sup_{f\in C^q_{1,\infty}} ||\delta_n(f;x)|| = \sup_{f\in S^0_M} \left| \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)[-2q\sin t + q^2\sin 2t]}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt + \frac{O(1)q^n}{(1-q)^3 n}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(t)(-2q\sin t + q^2\sin 2t)}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt + O(1)\frac{q^n}{(1-q)^3 n}.$$

де

$$\varphi(t) = \mathrm{sign}(-2q\sin t + q^2 \sin 2t) = \begin{cases} -1, & t\in(0;\pi), \\ 1, & t\in(-\pi;0). \end{cases}$$

Оскільки $\varphi\in S^0_M$, то отримуємо

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty},\sigma_n) = \frac{2}{\pi n}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{2q\sin t - q^2\sin 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt + O(1)\frac{q^n}{(1-q)^3 n}. \quad (6)$$

Обчислимо інтеграл. Застосовуючи заміну $z=\cos t$, маємо

$$\int \frac{2q\sin t - q^2\sin 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt = -\int \frac{2q-2q^2 z}{(1-2qz+q^2)^2}dz =$$

$$= -\frac{(1-q^2)}{2}(1-2q\cos t+q^2)^{-1} + \frac{1}{2}\ln(1-2q\cos t+q^2).$$

Таким чином,

$$\int\limits_{0}^{\pi} \frac{2q\sin t - q^2\sin 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt = \frac{2q}{(1-q^2)} + \ln\frac{(1+q)}{(1-q)}.$$

Отже, на підставі (6) отримуємо (3).

Нехай тепер $\beta=0$. Тоді для $f^q_0\in S^0_M$

$$\delta_n(f;x) = \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_0(x+t)\left(I + \frac{1-2q\cos t + q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}\right)dt + O(1)\frac{q^n}{(1-q)^3 n},$$

де I таке, що $\mathrm{mes}T(I+\frac{1-2q\cos t+q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}\geqslant 0) = \mathrm{mes}T(I+\frac{1-2q\cos t+q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}\leqslant 0)$. Оскільки

$$\left(\frac{1-2q\cos t+q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}\right)' = \frac{2q\sin t(-1+3q^2-q^3\cos t)}{(1-2q\cos t+q^2)^3},$$

то для q таких, що $|3q^2-1|>q^3$ на проміжку $[-\pi;0]$ функція $\frac{1-2q\cos t+q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}$ зростає, а на проміжку $[0;\pi]$ спадає. Так, що функція

$$\nu(t)=\frac{1-2q\cos t+q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}-\frac{1-q^2}{(1+q^2)^2}$$

додатна на $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ і від'ємна на $(-\pi;\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2};\pi)$. Тому для функції $f_0^q(x)=\varphi(t)=\mathrm{sign}(\nu(t))\in S_M^0$ виконується

$$\mathcal{E}(C_{0,\infty}^q,\sigma_n)=\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\nu(t)dt+O(1)\frac{q^n}{(1-q)^3n}=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\int\limits_0^{\pi}\left|\frac{q^2-1}{(1+q^2)^2}+\frac{1-2q\cos t+q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}\right|dt+O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}. \qquad (7)$$

Застосовуючи універсальну тригонометричну підстановку та методи інтегрування раціональних функцій отримуємо,

$$\int\limits_0^{\pi}\left|\frac{1-2q\cos t+q^2\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}\right|dt=\frac{2}{\pi n}\left(\frac{2q}{(1+q^2)}-\frac{1+q^2}{1-q^2}\mathrm{arctg}\frac{2q}{1-q^2}\right).$$

Отже на підставі (7) отримуємо (4). Терема доведена.

Література

1. *Степанец А.И.* Решение задачи Колмогорова-Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сборник. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113—138.
2. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — Т. 10, № 3. — С. 207—256.
3. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1980. — Т. 145. — С. 126—151.
4. *Рукасов В.І.* Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле-Пуссена / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 12. — С. 1653—1668.
5. *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 1. — С. 97—107.
6. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.