УДК 517.5

Новіков О.О., Ровенська О.Г., Циганок А.А., Ничипорук А.О., Соловйова К.В.

[1] *кандидат фіз.-мат. наук, декан фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики, ДДМА*

[3–5] *студенти 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ ЕЛЕМЕНТІВ ПІДСУМОВУЮЧИХ МАТРИЦЬ ПОТРІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

Отримані елементи підсумовуючих трикутних матриць, потрійних операторів Валле Пуссена.

Ключові слова: *ряды Фур'є, представлення сум Валле Пуссена.*

Вступ

Нехай L — множина сумовних 2π–періодичних функцій, $f \in L$ і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x) \qquad (1)$$

— ряд Фур'є функції f. Позначимо через $S_n(f;x)$ часткові суми ряду Фур'є

$$S_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx. \qquad (2)$$

Тоді для $1 \leqslant p < n$ відповідні суми Валле Пуссена функції $f \in L$ можна подати співвідношенням

$$V_{n,p}(f,x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f,x). \qquad (3)$$

Нехай p_1, p_2, p_3 — довільні натуральні числа такі, що $p_1 + p_2 + p_3 < n$. Потрійними сумами Валле Пуссена будемо називати тригонометричні многочлени, які задаються наступним співвідношенням

$$V_{n,p_1,p_2,p_3}(f,x) = V^{(3)}_{n,\overline{p}}(f,x) = \frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{p_2}\sum_{m=k-p_2+1}^{k}\frac{1}{p_3}\sum_{r=m-p_3+1}^{m} S_r(f,x). \qquad (4)$$

© Новіков О.О., Ровенська О.Г., Циганок А.А., Ничипорук А.О., Соловйова К.В., 2014

Для застосування методів вивчення інтегральних представлень відхилень потрійних операторів Валле Пуссена ці оператори слід подати у вигляді методів, які породжуються нескінченними трикутними матрицями наступним чином. За допомогою нескінченної трикутної матриці чисел $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, $k, n = 0, 1, 2, \ldots,$ $\lambda_0^{(n)} = 1,$ $\forall n \in \mathbb{N},$ $\lambda_k^{(n)} = 0$ для $k \geqslant n$, кожній функції f, що має ряд Фур'є (1), поставимо у відповідність послідовність тригонометричних полиномів:

$$U_n(f;x;\Lambda) = \frac{a_0}{2}\lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{(n)}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx). \tag{5}$$

У вигляді тригонометричних поліномів (5) суми Валле Пуссена $V_{n,p}(f;x)$ функції $f(x)$, що задаються співвідношенням (3), можна подати за допомогою матриці $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, елементи якої задаються наступним співвідношенням

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant k \leqslant n-p; \\ 1 - \frac{k-n+p}{p}, & n-p < k \leqslant n,\, n,\, p \in \mathbb{N},\, p < n. \end{cases}$$

Неважко помітити, що у випадку, коли $p_1 = p_2 = 1,$ $p_3 = p$, потрійні суми Валле Пуссена співпадають із звичайними сумами Валле Пуссена.

Потрійні суми Валле Пуссена у випадку, коли $p_3 = 1$, співпадають з повторними сумами, відповідні співвідношення для елементів підсумовуючих матриць яких отримані у роботі [3].

У даній роботі отримані співвідношення для елементів підсумовуючих матриць $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$ потрійних методів Валле Пуссена V_{n,p_1,p_2,p_3}.

Основна частина

Теорема 1. *Нехай* $2 \leqslant p_1 \leqslant p_2 < p_3$, $p_1 + p_2 + p_3 < n$. *Тоді*

$$V_{n,p_1,p_2,p_3}(f,x) = \frac{a_0}{2}\lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{(n)}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx).$$

якщо числа $\lambda_k^{(n)}$ *задаються наступним співвідношенням*

$$\lambda_k^{(n)} =$$

$$\begin{cases} 1, & k=1,2,...,n-\overline{p}+2; \\ 1-\frac{1}{p_1p_2p_3}\sum\limits_{i=1}^{k-n+\overline{p}-2}\frac{1}{2}i(i+1), & k=n-\overline{p}+3,...,n-p_{2,3}+2; \\ 1-\frac{1}{p_1p_2p_3}[\sum\limits_{i=1}^{k-n+p_{2,3}-2}\frac{(2i+p_1+1)p_1}{2}+\sum\limits_{i=1}^{p_1}\frac{i(i+1)}{2}], & k=n-p_{2,3}+3,...,n-p_{1,3}+1; \\ \frac{1}{p_1p_2p_3}[(n-k+1-\frac{p_{2,1}}{2})p_2p_1-\sum\limits_{i=1}^{n-k-p_3}\frac{i(i+1)}{2}], & k=n-p_{1,3}+1,...,n-p_3-1; \\ \frac{1}{p_3}[(n-k+1)-\frac{p_{1,2}}{2}], & k=n-p_3,...,n-p_{1,2}+1; \\ \frac{1}{p_1p_2p_3}[(n-k+1-\frac{p_{1,2}}{2})p_2p_1+\sum\limits_{i=0}^{k-n+p_{1,2}-2}\frac{(i+1)i}{2}], & k=n-p_{1,2}+2,...,n-p_2; \\ \frac{1}{p_1p_2p_3}[\sum\limits_{i=1}^{p_1}\frac{(i+1)i}{2}+\sum\limits_{i=1}^{n-k-p_1}\frac{p_1}{2}(2i+p_1+1)], & k=n-p_2+1,...,n-p_1-1; \\ \frac{1}{p_1p_2p_3}\sum\limits_{i=1}^{n-k}\frac{i(i+1)}{2}, & k=n-p_1,...,n-1, \end{cases} \tag{6}$$

де $\overline{p}=p_1+p_2+p_3$, $p_{i,j}=p_i+p_j$.

Доведення. Нехай $2\leqslant p_1\leqslant p_2<p_3$, $p_1+p_2+p_3<n$. Позначимо $p_{i,j}=p_i+p_j$, $i=1,2,3; j=1,2,3;$ $\overline{p}=p_{1,2,3}=p_1+p_2+p_3$.
Тоді потрібні числа $\lambda_k^{(n)}$ задовольняють умову

$$\frac{1}{p_1p_2p_3}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\sum_{\nu=k-p_2+1}^{k}\sum_{m=\nu-p_3+1}^{\nu}S_m(f,x)=\frac{1}{p_1p_2p_3}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}$$

$$\begin{array}{ccccccc} [S_{k-p_{2,3}+2}+ & S_{k-p_{2,3}+3}+ & S_{k-p_{2,3}+4}+ & ... & +S_{k-p_3+1}+ & ... & +S_{k-p_2+1}+ \\ +S_{k-p_{2,3}+3}+ & S_{k-p_{2,3}+4}+ & S_{k-p_{2,3}+5}+ & ... & +S_{k-p_3+2}+ & ... & +S_{k-p_2+2}+ \\ +S_{k-p_{2,3}+4}+ & S_{k-p_{2,3}+5}+ & S_{k-p_{2,3}+6}+ & ... & +S_{k-p_3+3}+ & ... & +S_{k-p_2+3}+ \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ +S_{k-p_3+1}+ & S_{k-p_3+2}+ & S_{k-p_3+3}+ & ... & +S_{k-p_3+p_2+1}+ & ... & +S_k]= \end{array}$$

$$=S_{n-p_1-p_2-p_3+2}+3S_{n-p_1-p_2-p_3+3}+6S_{n-p_1-p_2-p_3+4}...+$$

$$+...+6S_{n-3}+3S_{n-2}+S_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k^{(n,\overline{p})}A_k(f;x).$$

Всі суми Фур'є $S_k=S_k(f;x)$, що додаються, розташовані в p_1 прямокутних таблицях, у кожній з яких p_3 стовпців і p_2 строк.

Розпочнемо підрахунок з кінця. У перший блок зберемо елементи S_k, які хоча б в одній з таблиць є самим правим нижнім елементом. Неважко помітити, що елемент S_{n-i} для кожного $i=1,2,...,p_1$ зустрічається один раз в $p_1 - i + 1$-ой таблиці і на одиницю раз більше в кожній наступній до p_1-й включно. Тому кількість елементів S_{n-i} в усій цій побудові дорівнює $1+2+...+i = \frac{i(i+1)}{2}$. Гармоніка $A_{n-\nu}$ міститься в усіх сумах $S_{n-i} = \sum_{j=0}^{n-i} A_j$, у яких номер більше-дорівнює номеру цієї гармоніки. Кількість усіх елементів S_k з номерами $k \geqslant n-\nu$, $\nu = 1,2,...,p_1$, в усій будівлі дорівнює $\sum_{i=1}^{\nu} \frac{i(i+1)}{2}$. Це означає, що загальна кількість гармонік $A_{n-\nu}$ в усіх таблицях для кожного $\nu = 1,2,...,p_1$ дорівнює $\sum_{i=1}^{\nu} \frac{i(i+1)}{2}$. Виконуючи заміну $k = n-\nu$, $\nu = n-k$, для $k = n-p_1, n-p_1+1, ..., n-1$ отримуємо

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{1}{p_1 p_2 p_3} \sum_{i=1}^{n-k} \frac{i(i+1)}{2}, \tag{7}$$

Кожний з елементів з номерами $k = n-p_2+1, ..., n-p_1-1$ входить в кожну з p_1 таблиць і утворює рівно p_1 неповних діагоналей так, що для кожного $i = 1,2,...,p_2-p_1-1$ елемент S_{n-p_1-i} в останній таблиці утворює найбільш довгу діагональ довжиною $p_1+i < p_2$ штук і в кожній попередній на 1 більш коротку. Тому загальна кількість елементів S_{n-p_1-i} для кожного $i = 1,2,...,p_2-p_1-1$ дорівнює $(p_1+i)+(p_1+i-1)+...+(i+1) = \frac{p_1}{2}(2i+p_1+1)$. Для номерів $k = n-p_2+1, ..., n-p_1-1$ гармоніка $A_k = A_{n-p_1-\nu}$, $\nu = 1,2,...,p_2-p_1-1$, потрапляє по одному разу у кожну з сум S_m з номерами $m = n-p_1, n-p_1+1, ..., n-1$, загальна кількість яких дорівнює $\sum_{i=1}^{p_1} \frac{i(i+1)}{2}$, і по одному разу в кожну з сум S_{n-p_1-i}, $1 \leqslant i \leqslant \nu$. Кількість всіх елементів S_m з номерами $m = n-p_1-\nu, ..., n-p_1-1$, в усій будівлі дорівнює $\sum_{i=1}^{\nu} \frac{p_1}{2}(2i+p_1+1)$. Таким чином, виконуючи заміну $k = n-p_1-\nu$, $\nu = n-p_1-k$, для $k = n-p_2+1, ..., n-p_1-1$ отримуємо

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{1}{p_1 p_2 p_3} [\sum_{i=1}^{p_1} \frac{i}{2}(i+1) + \sum_{i=1}^{n-k-p_1} \frac{p_1}{2}(2i+p_1+1)]. \tag{8}$$

Суми $S_{n-\nu-p_2+1}$, $\nu = 1,2,...p_1-1$, утворюють в усій цій побудові ν повних діагоналей і $p_1-\nu$ діагоналей, довжини яких дорівнюють відповідно $p_2-1, p_2-2, ..., p_2-(p_1-\nu)$. Тому загальна кількість всіх елементів S_k з номерами $n-\nu-p_2+1 \leqslant k \leqslant n-p_2$ дорівнює

$$\nu p_2 p_1 - \sum_{i=p_1-\nu}^{p_1-1} \frac{i(i+1)}{2}.$$

Отже, для $\nu = 1,2,...p_1-1$, маємо

$$\lambda_{n-\nu-p_2+1}^{(n)} = \frac{1}{p_1 p_2 p_3} [\nu p_2 p_1 - \sum_{i=p_1-\nu}^{p_1-1} \frac{i(i+1)}{2} + \sum_{i=1}^{p_1} \frac{i}{2}(i+1) + \sum_{i=1}^{p_2-p_1-1} \frac{p_1}{2}(2i+p_1+1)].$$

Виконуючи заміну $\nu = n-k-p_2+1$, для $k = n-p_1-p_2+2,...,n-p_2$ отримуємо

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{1}{p_1p_2p_3}[(n-k+1-\frac{(p_2+p_1)}{2})p_2p_1 + \sum_{i=0}^{k-n+p_1+p_2-2}\frac{i}{2}(i+1)]. \qquad (9)$$

Суми S_k з номерами $k = n-p_3,...,n-p_1-p_2+1$ утворюють блок повних діагоналей. Для $\nu = 1,2,...,p_3-p_1-p_2$ суми $S_{n-p_1-p_2+2-\nu}$ містяться p_1p_2 раз. Тому для $k = n-p_3,...,n-p_1-p_2+1$

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{1}{p_3}[(n-k+1)-\frac{p_2+p_1}{2}]. \qquad (10)$$

Сума $S_{n-p_3-p_1+\nu}$, для кожного $\nu = 1,2,...p_1-1$, утворює в усій цій будівлі ν повних діагоналей і $p_1-\nu$ діагоналей, довжини яких дорівнюють відповідно $p_2-1, p_2-2,...,p_2-(p_1-\nu)$. Тому загальна кількість сум S_k з номерами $k = n-p_3-p_1+\nu,...,n-1$ дорівнює $(p_1-\nu)p_2p_1 - \sum_{i=\nu}^{p_1-1}\frac{(p_1-i)(p_1-i+1)}{2} + p_2p_1[(p_3+1)-\frac{p_2+p_1}{2}]$ так, що для $k = n-p_1-p_3+1,...,n-p_3-1$

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{1}{p_1p_2p_3}[(n-k+1-\frac{p_2+p_1}{2})p_2p_1 - \sum_{j=1}^{n-k-p_3}\frac{j(j+1)}{2}]. \qquad (11)$$

Гармоніка $A_{n-p_1-p_2-p_3+3}$ не потрапляє в одну суму $S_{n-p_1-p_2-p_3+2}$, $A_{n-p_1-p_2-p_3+4}$ не потрапляє в одну суму $S_{n-p_1-p_2-p_3+2}$ і в дві суми $S_{n-p_1-p_2-p_3+3}$ і т.д. Кожна з сум S_k з номерами $k = n-p_1-p_2-p_3+2, n-p_1-p_2-p_3+3,...,n-p_2-p_3+1$ є кутовим елементом відповідно у першій, другій, ... , p_i-й таблиці і в кожній наступній утворює діагональ на 1 довшу, а в попередніх не зустрічається. Тому кожна з сум $S_{n-p_1-p_2-p_3+1+\nu}$ для $\nu = 1,2,...,p_1-1$ міститься $1+2+..+\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$ разів. Гармоніка $A_{n-p_1-p_2-p_3+2+\nu}$, $\nu = 1,2,...,p_1$ не міститься в усіх сумах з номерами меншими за $n-p_1-p_2-p_3+2+\nu$. Загальна кількість сум S_k з номерами $k < n-p_1-p_2-p_3+2+\nu$ дорівнює $\sum\limits_{i=1}^{\nu}\frac{i(i+1)}{2}$. Таким чином для $k = n-p_1-p_2-p_3+3, n-p_1-p_2-p_3+4,...,n-p_2-p_3+2$

$$\lambda_k^{(n)} = 1 - \frac{1}{p_1p_2p_3}\sum_{i=1}^{k-n+p_1+p_2+p_3-2}\frac{i(i+1)}{2}. \qquad (12)$$

Кожна із сум S_k з номерами $k = n-p_2-p_3+2, n-p_2-p_3+3,...,n-p_1-p_3$ зустрічається у кожній таблиці більше одного разу, але не утворює жодної повної діагоналі. Загальна кількість елементів $S_{n-p_2-p_3+1+i}$ для кожного $i = 1,2,...,p_2-p_1-1$ дорівнює $(p_1+i)+(p_1+i-1)+...+(i+1) = \frac{p_1}{2}(2i+p_1+1)$.

Гармоніка $A_{n-p_2-p_3+2+\nu}$, $\nu = 1, 2, ..., p_2 - p_1 - 1$ не міститься в усіх сумах з номерами меншими за $n - p_2 - p_3 + 2 + \nu$. Загальна кількість сум S_k з номерами $n - p_2 - p_3 + 2 < k < n - p_2 - p_3 + 2 + \nu$ дорівнює $\sum\limits_{i=1}^{\nu} \frac{p_1}{2}(2i + p_1 + 1)$, а всіх сум S_k з номерами $k < n - p_2 - p_3 + 2 + \nu$ дорівнює $\sum\limits_{i=1}^{\nu} \frac{p_1}{2}(2i + p_1 + 1) + \sum\limits_{i=1}^{p_1} \frac{i(i+1)}{2}$. Таким чином для $k = n - p_2 - p_3 + 3, n - p_2 - p_3 + 4, ..., n - p_1 - p_3 + 1$

$$\lambda_k^{(n)} = 1 - \frac{1}{p_1 p_2 p_3}[\sum_{i=1}^{k-n+p_2+p_3-2} \frac{p_1}{2}(2i + p_1 + 1) + \sum_{i=1}^{p_1} \frac{i(i+1)}{2}]. \qquad (13)$$

Поєднуючи (7) – (13), отримуємо (6).

Теорема доведена.

Література

1. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.
2. *Ровенская О.Г.* Приближение интегралов Пуассона повторными суммами Валле Пуссена / О.Г. Ровенская, О.А. Новиков // Нелінійні коливання. — 2010. — Т. 13, № 1. — С. 96–99.
3. *Новиков О.А.* Представление повторных методов Валле Пуссена в виде λ–методов / О.А. Новиков, О.Г. Ровенская, Т.В. Шулик [та ін.] // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. — 2013. — Випуск 3. — С. 13–16.