УДК 517.5

Бодрая В.И., Сазонова Ю.В., Панасенко Я.С., Логвиненко А.В., Протыняк А.Л.

[1] *асистент каф. высшей математики, Киевский национальный университет технологий и дизайна*

[2–5] *студенты 5 курса физико-математического факультета, ГВУЗ «ДГПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ МЕТОДАМИ

Отримані асимптотичні формули для верхніх граней відхилень прямокутних лінійних середніх на класах періодичних функцій багатьох змінних

Ключевые слова: *ряды Фурье, асимптотические равенства.*

Введение

В данной работе изучаются вопросы приближения классов периодических функций m переменных, имеющих почти везде ограниченные обобщенные частные производные. Классификации неперерывных периодических функций на основе учета свойств семейств коэффициентов Фурье периодических функций многих переменных были предложены в работах П.В. Задерея [1], А.И. Степанца, Н.Л. Пачулиа [2], Р.А. Ласурии [3], В.И. Рукасова [4] и других.

Пусть $R^m = \{\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_m), x_i \in R, i = 1, 2, ..., m\}$ – m-мерное Евклидово пространство, $T^m = \prod\limits_{i=1}^{m}[-\pi;\pi]$ – m-мерный куб с ребром 2π,

$$N^m = \left\{\vec{x} \in R^m | x_i \in N,\ i = 1, 2, ..., m\right\}.$$

Через $L(T^m)$ обозначим множество 2π-периодических по каждой переменной, суммируемых на кубе T^m, функций $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$. Пусть $E^m \subset R^m$ – множество упорядоченных m-ок из нулей и единиц. Следуя [5], каждой паре точек $\vec{s} \in E^m$, $\vec{k} \in N_*^m = N^m \cup E^m$, поставим в соответствие коэффициент Фурье функции $f \in L(T^m)$

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) = \frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m} f(\vec{x}) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right) dx_i.$$

Каждому вектору $\vec{k} \in N_*^m$ поставим в соответствие величину

$$A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) = \sum_{\vec{s}\in E^m} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right).$$

Тогда, следуя [2,7], ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ задается соотношением

$$S[f] = \sum_{\vec{k}\in N_*^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} A_{\vec{k}}(f;\vec{x}), \tag{1}$$

где $q(\vec{k})$ – количество нулевых координат вектора $\vec{k}$.

Пусть $\overline{m} = \{1,2,...,m\}$. Обозначим символом $\mu(r) \subset \overline{m}$ r-элементные подмножества из $\overline{m}$. Гармоникой, сопряженной с $A_{\vec{k}}(f;\vec{x})$ по переменным x_ν, $\nu \in \mu \subset \overline{m}$ будем называть величину

$$A_{\vec{k}}^{\sum\limits_{\nu\in\mu}\vec{e}_\nu}(f;\vec{x}) = \sum_{\vec{s}\in E^m} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \prod_{i\in\overline{m}\setminus\mu} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i\pi}{2}\right) \prod_{j\in\mu} \cos\left(k_j x_j - \frac{(s_j+1)\pi}{2}\right).$$

Следуя работе [6] введем понятие (ψ,β)-производных функций многих переменных следующим образом. Пусть $\psi_i(x), i=1,2,...,m,$ – фиксированный набор функций, определенных на $[1;+\infty)$, $\beta_i \in R, i=1,2,...,m,$ — фиксированный набор чисел.

Обозначим через N_μ^m множество элементов $\vec{k} \in N_*^m$, у которых $k_i \neq 0, i\in\mu$. Предположим, что для всякого $\mu\subset\overline{m}$ ряды

$$\sum_{\vec{k}\in N_\mu^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})} \prod\limits_{i\in\mu}\psi_i(k_i)} \sum_{\zeta(r)\subset\mu} (-1)^r \prod_{j\in\mu\setminus\zeta(r)} \cos\frac{\beta_j\pi}{2} \prod_{\nu\in\zeta(r)} \sin\frac{\beta_\nu\pi}{2} A_{\vec{k}}^{\sum\limits_{l\in\zeta(r)}\vec{e}_l}(f;\vec{x}). \tag{2}$$

являются рядами Фурье некоторых функций $\varphi_\mu(\vec{x})$, которые будем называть частичными (ψ,β)–производными по переменным $x_i, i\in\mu\subset\overline{m}$ и обозначать $\varphi_\mu = f_{\beta_\mu}^{\psi_\mu}$.

Через $L_{\beta_\mu}^{\psi_\mu}$ обозначим множество функций $f\in L$, которые для всякого $\mu\subset\overline{m}$ имеют $f_{\beta_\mu}^{\psi_\mu}$. Множество непрерывных функций из $L_{\beta_\mu}^{\psi_\mu}$ таких, что для всех $\mu\subset\overline{m}$

$$\int\limits_{T^m} f_{\beta_\mu}^{\psi_\mu}(\vec{t}) \prod_{j=1}^m dt_j = 0, \quad \operatorname{esssup}|f_{\beta_\mu}^{\psi_\mu}| \leqslant 1,$$

будем обозначать $C_{\beta_\mu,\infty}^{\psi_\mu}, \mu\subset\overline{m}$.

Пусть $\Lambda = \{\Lambda_1,\Lambda_2,...,\Lambda_m\}$ – фиксированный набор бесконечных треугольных числовых матриц, $\Lambda_i = \{\lambda_{k,i}^{(n)}\}$, $i=1,2,...,m$, $n\in N$, $k=0;1;...$, $\lambda_{0,i}^{(n)} = 1$ и $\lambda_{k,i}^{(n)} = 0$ для $k \geqslant n$. Пусть далее $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} = \prod\limits_{i=1}^m \lambda_{k_i,i}^{(n_i)}$ и $G_{\vec{n}} = \prod\limits_{i=1}^m [0;n_i-1]$. Так, что $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} = 0$ для любых $\vec{k}\notin G_{\vec{n}}$.

Функции $f \in L(T^m)$, имеющей ряд Фурье (1), поставим в соответствие семейство тригонометрических полиномов

$$U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda) = \sum_{\vec{k}\in G_{\vec{n}}} 2^{-q(\vec{k})}\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} A_{\vec{k}}(f;\vec{x}). \qquad (3)$$

Целью данной работы является изучение асимптотического при $n_i \to \infty$, $i = 1, 2, ..., m$, поведения величин

$$\mathcal{E}(C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}; U_{\vec{n}}) = \sup_{f\in C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}} ||f(\vec{x}) - U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda)||_C$$

при $n_i \to \infty$, $i = 1, 2, ..., m$.

Основная часть

Найдем для величин $\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = f(\vec{x}) - U_{\vec{n}}(f;\vec{x})$, которые являются уклонениями тригонометрических многочленов $U_{\vec{n}}(f;\vec{x})$, $\vec{n} \in N^m$, от функции $f(\vec{x})$, интегральные представления через параметры, определяющие класс функций $C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}$. Для этого находим соотношения между коэффициентами Фурье функций из $C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}$ и их обобщенных производных.

Лемма 1. *Пусть $f \in C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}, \mu \subset \overline{m}$. Тогда для всякого $\vec{k} \in N^m_\mu$, $\vec{s} \in E^m$, $\mu \subset \overline{m}$ для коэффициентов Фурье функции $f(\vec{x})$ и ее производной $f^{\psi_\mu}_{\beta_\mu}(\vec{x})$ выполняются равенства*

$$a^{\vec{s}}_{\vec{k}}(f) = \prod_{i\in\mu}\psi_i(k_i)\sum_{\zeta\subset\mu}\prod_{i\in\mu(r)\setminus\zeta}\cos\frac{\beta_i\pi}{2}\prod_{j\in\zeta}(-\sin\frac{\beta_j\pi}{2})(-1)^{\sum\limits_{\nu\subset\zeta}s_\nu} a_{\vec{k}}^{\vec{s}+\sum\limits_{\nu\in\zeta}(-1)^{s_\nu}\vec{e}_\nu}(f^{\psi_\mu}_{\beta_\mu}). \qquad (4)$$

Положим

$$\tau_i(v) = \begin{cases} (1-\lambda_i(v)\psi_i(n_i v), & \frac{1}{n_i} \leqslant v \leqslant 1, \\ \psi_i(n_i v), & 1 \leqslant v,\ i = 1, 2, ..., m, \end{cases} \qquad (5)$$

где $\lambda_i(v)$ – непрерывные на $[0;1]$ функции такие, что $\lambda_i(k/n) = \lambda^{(n)}_{k,i}$.

Теорема 1. *Пусть класс функций $C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}, \mu \subset \overline{m}$ и оператор $U_{\vec{n}}(\Lambda)$ такие, что функции $\tau_i(v)$, определенные соотношениями (5), имеют суммируемые на R преобразования Фурье*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\tau}_i(t)|dt < \infty,\ \ i = 1, 2, ..., m.$$

Тогда для всякой функции $f \in C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}$ *в каждой точке* $\vec{x} \in T^m$ *для отклонений прямоугольных операторов* $U_{\vec{n}}(\Lambda)$ *выполняется равенство*

$$\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r+1} \sum_{\mu(r)\subset\overline{m}} \frac{1}{\pi^r} \int\limits_{R^r} f^{\psi_\mu}_{\beta_\mu} \left(\vec{x} + \sum_{j\in\mu(r)} \frac{t_j}{n_j}\vec{e}_j\right) \times$$

$$\times \prod_{\nu\in\mu(r)} \int\limits_0^\infty \tau_\nu(v_\nu)\cos\left(v_\nu t_\nu + \frac{\beta_\nu \pi}{2}\right) dv_\nu dt_\nu. \qquad (6)$$

Доказательство. В силу соотношения (3)

$$S[\delta_{\vec{n}}(f,\vec{x})] = \sum_{\vec{k}\in N_*^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} \left(1 - \prod_{i=1}^m \lambda^{(n_i)}_{k_i,i}\right) A_{\vec{k}}(f,\vec{x}) =$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{\vec{k}\in N_i^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} \left(1 - \lambda^{(n_i)}_{k_i,i}\right) A_{\vec{k}}(f,\vec{x}) + \sum_{i=2}^m (-1)^{i+1} \sum_{\mu(i)\subset\overline{m}} \sum_{\vec{k}\in N_\mu^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} \times$$

$$\times \prod_{j\in\mu(i)} \left(1 - \lambda^{(n_j)}_{k_j,j}\right) A_{\vec{k}}(f,\vec{x}) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} \sum_{\mu(i)\subset\overline{m}} S_\mu(f,\vec{x}). \qquad (7)$$

Вычислив коэффициенты Фурье функций

$$\mathcal{I}_{\mu(r)}(\vec{x}) = \frac{1}{\pi^r} \int\limits_{T^r} f^{\psi_\mu}_{\beta_\mu} \left(\vec{x} - \sum_{i\in\mu(r)} t_i \vec{e}_i\right) \times$$

$$\times \prod_{\nu\in\mu(r)} \int\limits_0^\infty \tau_\nu(v_\nu)\cos\left(v_\nu t_\nu + \frac{\beta_\nu\pi}{2}\right) dv_\nu dt_\nu, \ \ \mu = \mu(r) \subset \overline{m}, \qquad (8)$$

и применяя формулы (4), получаем

$$S\left[\mathcal{I}_{\mu(r)}\right] = \sum_{\vec{k}\in N_\mu^m} \frac{1}{2^{q(k)}} \prod_{j\in\mu} \left(1 - \lambda^{(n_j)}_{k_j,j}\right) A_{\vec{k}}(f,\vec{x}) = S_\mu(f,\vec{x}).$$

Поэтому

$$\delta_{\vec{n}}(f,\vec{x}) = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} \sum_{\mu\subset\overline{m}} \mathcal{I}_{\mu(i)}(f,\vec{x}).$$

Объединяя последнее соотношение с (7) и (8), получаем (6). □

Изучим асимптотическое поведение при $n_i \to \infty,\ i = 1, 2, ..., m,$ величин

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}; U_{\vec{n}}\right) = \sup_{f \in C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}} ||\delta_{\vec{n}}(f; x)||_C.$$

Теорема 2. *Пусть функции* $\tau_{i,j}(v)$, *имеют суммируемые на* R *преобразования Фурье. Тогда при* $n_i \to \infty,\ i = 1, 2, ..., m,$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}; U_{\vec{n}}\right) = \sum_{i=1}^{m}[A(\tau_i) + O(1)a(\tau_i)] + O(1)\sum_{j=2}^{m}\sum_{\mu(j)\subset\overline{m}}\prod_{\nu\in\mu(j)} A(\tau_\nu), \qquad (9)$$

где

$$A(\tau_i) = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^{\infty}\tau_i(v)\cos(vt + \beta_i\pi/2)dv\right|dt, \quad i = 1, 2, ..., m,$$

$$a(\tau_i) = \int_{|t|\geqslant\frac{\pi n_i}{2}}\left|\int_0^{\infty}\tau_i(v)\cos(vt + \beta_i\pi/2)dv\right|dt, \ i = 1, 2, ..., m,$$

$O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная по* $n_i,\ i = 1, 2, ..., m.$

Доказательство. Применяя равенство (6), получаем

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}; U_{\vec{n}}\right) = \sup_{f \in C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}}\left\|\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r+1}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\frac{1}{\pi^r}\int_{R^r} f^{\psi_\mu}_{\beta_\mu}\left(\vec{x} - \sum_{j\in\mu}\frac{t_j}{n_j}\vec{e}_j\right)\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{\nu\in\mu}\int_0^{\infty}\tau_\nu(v_\nu)\cos\left(v_\nu t_\nu + \frac{\beta_\nu\pi}{2}\right)dv_\nu dt_\nu\right\|_C.$$

Поэтому справедлива оценка сверху

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}; U_{\vec{n}}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{m} A(\tau_j) + O(1)\sum_{\zeta=2}^{m}\sum_{\mu(\zeta)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(\zeta)} A(\tau_j). \qquad (10)$$

Для 2π-периодической функции $f^{\psi_i}_{i,\beta_i}(-\vec{x}) = \varphi^*_i(\vec{x})$, где функции $\varphi^*_i(x)$, $i=1, 2, ..., m,$ определены так, что на промежутке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$$\varphi^*_i(t) = \mathrm{sign}\left(n_i\int_0^{\infty}\tau_i(v)\cos\left(vtn_i + \frac{\beta_i\pi}{2}\right)dv\right),$$

а на промежутке $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ так, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_i^*(x)dx = 0, \quad i = 1, 2, ..., m,$$

выполнено $f_*(\vec{x}) = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(x_i) \in C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}$. Поэтому справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{m}[A(\tau_j) + O(1)a(\tau_j)] + O(1)\left[\sum_{\zeta=2}^{m}\sum_{\mu(\zeta)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(\zeta)} A(\tau_j)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{E}\left(C^{\psi_\mu}_{\beta_\mu,\infty}; U_{\vec{n}}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{m} A(\tau_j) + O(1)\left[\sum_{\zeta=2}^{m}\sum_{\mu(\zeta)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(\zeta)} A(\tau_j)\right].$$

Из этого неравенства вытекает (9). Теорема доказана.

Литература

1. *Задерей П.В.* Интегральные представления уклонений линейных средних рядов Фурье на классах дифференцируемых периодических функций двух переменных // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций: Сб. научн. тр. / Отв. ред. В.К. Дзядык. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1985. — С. 16–28.
2. *Степанец А.И.* Кратные суммы Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций / А.И. Степанец, Н.Л. Пачулиа // Укр. мат. журн. — 1991. — Т. 43, № 4. — С. 545–555.
3. *Ласурия Р.А.* Кратные суммы Фурье на множествах $\overline{\psi}$-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 7. — С. 911–918.
4. *Рукасов В.И.* Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных прямоугольными линейными средними их рядов Фурье / В.И.Рукасов, О.А. Новиков, В.И. Бодрая // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 4. — С. 564 – 570.
5. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.
6. *Ключникова А.Р.* Приближение классов функций многих переменных прямоугольными линейными операторами / А.Р. Ключникова, А.С. Леденева , Ю.М. Качина [та ін.] // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ. — 2012. — Випуск 2. — С. 28–36.
7. *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. — К.: Наук. думка, 1981. — 340 с.