УДК 517.5

Сілін Є.С.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри математики, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: silin-evgen@meta.ua

НАБЛИЖЕННЯ ЛОКАЛЬНО СУМОВНИХ ФУНКЦІЙ МАЛОЇ ГЛАДКОСТІ ОПЕРАТОРАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА В ІНТЕГРАЛЬНІЙ МЕТРИЦІ

В роботі розглядаються питання наближення класів Степанця $\widehat{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ операторами Валле Пуссена в просторі $\widehat{L}$ у випадку, коли множини $\widehat{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ складаються з функцій малої гладкості. Одержано асимптотичні закони поведінки верхніх граней відхилень згаданих функцій від операторів Валле Пуссена, які в певних випадках забезпечують розв'зання відомої задачі Колмогорова-Нікольського.

Ключові слова: $\overline{\psi}$*-похідна, модуль неперервності, оператор Валле Пуссена.*

Вступ

В роботі [1] класи $\widehat{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ означені наступним чином. Нехай $\widehat{L}$ — множина функцій f, які вимірні на дійсній осі і такі, що мають скінчену норму $||f||_{\widehat{L}} = \sup\limits_{a\in\mathbb{R}} \int\limits_a^{a+2\pi} |f(t)|\, dt$.

Позначимо через $\mathfrak{A}$ множину неперервних при $v \geqslant 0$ функцій $\psi(v)$, які задовольняють умови: 1) $\psi(v) \geqslant 0$, $\psi(0) = 0$, $\psi(v)$ зростає на $[0,1)$; 2) $\psi(v)$ опукла донизу на $[1,\infty)$ і $\lim\limits_{v\to\infty} \psi(v) = 0$; 3)похідна $\psi'(v) = \psi'(v+0)$ має обмежену варіацію на $[0,\infty)$. Підмножину функцій $\psi(v)$, для яких $\int\limits_1^\infty \frac{\psi(v)}{v}\, dv < \infty$, позначають $\mathfrak{A}'$.

Для пари $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{A}$ визначимо функцію $\overline{\psi}$: $\overline{\psi} \overset{\mathrm{df}}{=} \psi_{1+} + i\psi_{2-}$, де ψ_{1+} та ψ_{2-} — парне і непарне продовження функцій ψ_1, ψ_2 відповідно.

Тоді через $\widehat{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ будемо позначати множину функцій $f \in \widehat{L}$, які майже для всіх x можна подати у вигляді наступної рівності:

$$f(x) = A_0 + \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x+t)\widehat{\overline{\psi}}(t)\, dt \overset{\mathrm{df}}{=} A_0 + \varphi * \widehat{\overline{\psi}}(x), \tag{1}$$

де A_0 — деяка стала, інтеграл розуміється як границя інтегралів по симетричних проміжках, що розширюються, $\varphi \in \mathfrak{N}$ ($\mathfrak{N} \subset \widehat{L}$),

$$\widehat{\overline{\psi}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{\psi}(x) e^{-ixt}\, dx. \tag{2}$$

Якщо $\psi_1 \in \mathfrak{A}$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'$, то перетворення $\widehat{\overline{\psi}}(t)$ сумовне на дійсній осі.

Наслідуючи О.І. Степанця, [2, с. 149], функцію $\varphi(\cdot)$ в зображенні (1) будемо називати $\overline{\psi}-$похідною функції $f(\cdot)$ і позначати $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$.

В ролі $\mathfrak{N}$ виступає одинична куля $\widehat{S}_L$: $\widehat{S}_L = \{\varphi \in \widehat{L} : ||\varphi(t)||_{\widehat{L}} \leqslant 1\}$, або класи $\widehat{H}_{\omega_L}$: $\widehat{H}_{\omega_L} = \{\varphi \in \widehat{L} : ||\varphi(\cdot+t)-\varphi(\cdot)||_{\widehat{L}} \leqslant \omega(|t|)\}$, де $\omega(t)$ — фіксований модуль неперервності [3, с. 20].

Агрегатом наближення функцій з класів $\widehat{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ є оператори

$$V_{\sigma,c}(f;x) = V_{\sigma,c}(f;x;\Lambda) = A_0 + f^{\overline{\psi}} * \widehat{\lambda_{\sigma,c}\overline{\psi}}(x), \tag{3}$$

де $f \in \widehat{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$, $\widehat{\lambda_{\sigma,c}\overline{\psi}}$ перетворення вигляду (2) функції $\lambda_{\sigma,c}(t)\overline{\psi}(t)$, у якій

$$\lambda_{\sigma,c}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant |t| \leqslant c \\ \frac{\sigma-|t|}{\sigma-c}, & c \leqslant |t| \leqslant \sigma, \qquad \sigma > c \geqslant 1. \\ 0, & \sigma \leqslant |t|, \end{cases} \tag{4}$$

Як випливає з робот О.І. Степанця (зокрема, [4]), за деяких умов $V_{\sigma,c}(f;x)$ належать до множини ε_σ цілих функцій експоненціального типу $\leqslant \sigma$. У періодичному ж випадку, при $\sigma = n \in \mathbb{N}$ і $c = n-p$, $p \in \mathbb{N}$, $p < n$, оператори $V_{\sigma,c}(f;x)$ співпадають з відомими сумами Валле Пуссена. Тому оператори $V_{\sigma,c}(f;x)$ одержали назву оператори Валле Пуссена.

Метою роботи є знаходження асимптотичних формул при $\sigma \to \infty$ верхніх граней відхилень

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}; V_{\sigma,c}) = \sup_{f \in \widehat{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}} \|f(x) - V_{\sigma,c}(f,x)\|_{\widehat{L}}. \tag{5}$$

Предметом дослідження є апроксимативні характеристики операторів Валле Пуссена на класах $\widehat{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$.

Виділимо із $\mathfrak{A}$ підмножини $\mathfrak{A}_0$ і $\mathfrak{A}_C$ [4, с. 193]. Кожній функції $\psi \in \mathfrak{A}$ співставимо пару функцій $\eta(t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right)$, $\mu(t) = \frac{t}{\eta(t)-t}$, $t \geqslant 1$. Тоді $\mathfrak{A}_0 = \{\psi: \ \psi \in \mathfrak{A}, \ 0 < \mu(t) \leqslant K_1 < \infty\}$, $\mathfrak{A}_C = \{\psi: \ \psi \in \mathfrak{A}, \ 0 < K_2 \leqslant \mu(t) \leqslant$ $\leqslant K_3 < \infty\}$, де $K_i = \text{const}$, $i = \overline{1,3}$ (які можливо залежать від $\psi(\cdot)$).

Основна частина

Покладемо $h = h(\sigma) = \sigma - c$, $\Theta \stackrel{\text{df}}{=} \lim\limits_{\sigma\to\infty} \frac{h}{\sigma}$.

Теорема 1. *Нехай* $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$ *і* $\psi_2 \in \mathfrak{A}_0'$, $\mathfrak{A}_0' = \mathfrak{A}_0 \bigcap \mathfrak{A}'$. *Дійсні числа* σ *і* $h = h(\sigma)$, $\sigma > h \geqslant 1$ *обрані так, що* $0 \leqslant \Theta < 1$. *Тоді при* $\sigma \to \infty$

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{S}_L; V_{\sigma,\sigma-h}) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\sigma}^{\infty} \frac{\psi_2(t)}{t}\,dt + \frac{4}{\pi^2}|\overline{\psi}(\sigma)|\ln\frac{\sigma}{h} + O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|, \tag{6}$$

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{H}_{\omega_L}; V_{\sigma,\sigma-h}) = \Theta_\omega\Bigg(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\int\limits_1^\infty \psi_2(\sigma s)\sin st\ ds\ dt+$$

$$+\frac{2|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi^2}\ln\frac{\sigma}{h}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t\ dt\Bigg) + O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right), \qquad (7)$$

де $\Theta_\omega \in [1/2, 1]$, $\Theta_\omega = 1$, *коли* $\omega(t)$ *опуклий модуль неперервності,* $O(1)$ *— величини, рівномірно обмежені по* σ *і* h *.*

Зауваження 1. *Нехай* $\psi_2 \in \mathfrak{A}_C$. *Тоді [2, с. 214, 216] мають місце оцінки:* $\int\limits_\sigma^\infty \frac{|\psi_2(s)|}{s}\ ds \leqslant K|\psi_2(\sigma)|$, $\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\int\limits_0^\infty \psi_2(\sigma s)\sin st\ dsdt\right| = O(1)\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right)\int\limits_\sigma^\infty \frac{|\psi_2(s)|}{s}ds.$ *Отже, якщо* $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$ *і* $\psi_2 \in \mathfrak{A}_C$, *то формули (6) і (7) набувають вигляду:*

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{S}_L; V_{\sigma,\sigma-h}) = \frac{4}{\pi^2}|\overline{\psi}(\sigma)|\ln\frac{\sigma}{h} + O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|, \qquad (8)$$

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{H}_{\omega_L}; V_{\sigma,\sigma-h}) = \frac{2\Theta_\omega|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi^2}\ln\frac{\sigma}{h}\int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t\ dt + O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right). \qquad (9)$$

За умови $\Theta = 0$ *асимптотичні співвідношення (8) і (9) дають розв'язок задачі Колмогорова-Нікольського для операторів Валле Пуссена на класах* $\widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{S}_L$ *і* $\widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{H}_{\omega_L}$ *відповідно.*

Аналог теореми 1 в рівномірний метриці був доведен у роботі [5]. У періодичному випадку (наближення сумами Валле Пуссена) — в роботах В.І. Рукасова і С.О. Чайченка [6, 7]. Наближення операторами Фур'є (випадок $c = \sigma - 1$) $\overline{\psi}$-інтегралів локально сумовних функцій в рівномірний метриці було досліджено О.І. Степанцем та І.В. Соколенком [8, 9].

Доведення.

Скористаємося схемою, яку запропоновано в роботі [2, с. 219 – 259] з врахуванням специфіки випадку, що розглядається.

Поряд з операторами Валле Пуссена в [1, с. 1551 – 1552] означені оператори $V^*_{\sigma,c}(f;x) = V^*_{\sigma,c}(f;x;\Lambda^*) = A_0 + f^{\overline{\psi}} * \widehat{\lambda^*_{\sigma,c}\overline{\psi}}(x)$, при цьому

$$\lambda^*_{\sigma,c}(t) = \begin{cases} \lambda_{\sigma,c}, & |t| \in [0,c] \cup [\sigma,\infty), \\ 1 - \frac{|t|-c}{\sigma-c}\frac{\overline{\psi}(\sigma\mathrm{sign}(t))}{\overline{\psi}(t)}, & c \leqslant |t| \leqslant \sigma. \end{cases} \qquad (10)$$

Нехай $f \in \widehat{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$, тоді, згідно до рівностей (1) – (4) і 10

$$f(x) - V_{\sigma,c}(f,x) \stackrel{df}{=} \rho_{\sigma,c}(f,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f^{\overline{\psi}}(x+t)(1 - \widehat{\lambda^*_{\sigma,c}(t)})\overline{\psi}(t)dt +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}} f^{\overline{\psi}}(x+t)\widehat{d}_{\sigma,c}(t) \stackrel{df}{=} \rho^*_{\sigma,c}(f,x) + \Delta_{\sigma,c}(f,x), \tag{11}$$

де $\widehat{d}_{\sigma,c}(t) = \int\limits_{c}^{\sigma} \frac{s-c}{2(\sigma-c)\pi}[(\overline{\psi}(s) - \overline{\psi}(\sigma))e^{-ist} + (\overline{\psi}(-s) - \overline{\psi}(-\sigma))e^{ist}]ds.$

Спростимо спочатку перший доданок з правої частини рівності (11). Для цього виділимо головні частини і оцінимо залишки. Нехай a — довільне додатне число, $h = \sigma - c$. Згідно з теоремою 1 роботи [1, с. 1552] і співвідношенням (10), після інтегрування частинами, маємо

$$\rho^*_{\sigma,\sigma-h}(f,x) = \frac{-\psi_1(\sigma)}{\pi} \int\limits_{\frac{a}{\sigma} \leqslant |t| \leqslant \frac{\pi}{h}} \delta(x,t) \frac{2\sin\frac{(2\sigma-h)t}{2}\sin\frac{ht}{2}}{ht^2}\, dt +$$

$$+ \frac{\psi_2(\sigma)}{\pi} \int\limits_{\frac{a}{\sigma} \leqslant |t| \leqslant \frac{\pi}{h}} \delta(x,t) \frac{2\cos\frac{(2\sigma-h)t}{2}\sin\frac{ht}{2}}{ht^2}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \leqslant \frac{a}{\sigma}} \delta(x,t) \int\limits_{\sigma}^{\infty} \psi_2(s)\sin st\, ds\, dt + b^{\psi_1}_{\mathfrak{N}}(f,x) + b^{\psi_2}_{\mathfrak{N}}(f,x), \tag{12}$$

де $\delta(x,t) = f^{\overline{\psi}}(x+t) - f^{\overline{\psi}}(x)$, якщо $f \in \widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{H}_{\omega_L}$ і $\delta(x,t) = f^{\overline{\psi}}(x+t)$, якщо $f \in \widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{S}_L$; $b^{\psi_1}_{\mathfrak{N}}(f,x) = \alpha^{\psi_1}_{\mathfrak{N}}(f,x) + \beta^{\psi_1}_{\mathfrak{N}}(f,x) + R^{\psi_1}_{\mathfrak{N}}(f,x)$, при цьому

$$\alpha^{\psi_1}_{\mathfrak{N}}(f,x) \stackrel{df}{=} \frac{-\psi_1(\sigma)}{\pi} \int\limits_{|t| \leqslant \frac{a}{\sigma}} \delta(x,t) \frac{2\sin\frac{(2\sigma-h)t}{2}\sin\frac{ht}{2}}{ht^2}\, dt,$$

$$\beta^{\psi_1}_{\mathfrak{N}}(f,x) \stackrel{df}{=} \frac{\psi_1(\sigma)}{\pi} \int\limits_{|t| \geqslant \frac{\pi}{h}} \delta(x,t) \frac{2\sin\frac{(2\sigma-h)t}{2}\sin\frac{ht}{2}}{ht^2} dt,$$

$$R^{\psi_1}_{\mathfrak{N}}(f,x) \stackrel{df}{=} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\delta(x,t)}{t} \int\limits_{\sigma}^{\infty} \psi_1'(s)\sin st\, dsdt, \tag{13}$$

та

$$b^{\psi_2}_{\mathfrak{N}}(f,x) = \frac{\psi_2(\sigma)}{\pi}\left(\int\limits_{|t| \leqslant \frac{a}{\sigma}} \delta(x,t) \left(\frac{2\cos\frac{(2\sigma-h)t}{2}\sin\frac{ht}{2}}{ht^2} - \frac{\cos\sigma t}{t}\right)\, dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{|t| \geqslant \frac{\pi}{h}} \delta(x,t) \frac{2\cos\frac{(2\sigma-h)t}{2}\sin\frac{ht}{2}}{ht^2} dt + \int\limits_{|t| \geqslant \frac{a}{\sigma}} \frac{\delta(x,t)}{t} \int\limits_{\sigma}^{\infty} \psi_2'(s)\cos st\, dsdt \right). \tag{14}$$

Доведемо справедливість співвідношень

$$||b^{\psi_i}_{\mathfrak{N}}(f,x)||_{\widehat{L}} = \begin{cases} O(1)|\psi_i(\sigma)|, & \forall f \in \widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{S}_L, \\ O(1)|\psi_i(\sigma)|\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right), & \forall f \in \widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{H}_{\omega_L} \end{cases} \quad i = 1,2. \tag{15}$$

В подальшому вважатимемо, що $f^{\overline{\psi}} \in \widehat{H}_{\omega_L}$, при цьому фактично також буде розглянутий випадок, коли $f^{\overline{\psi}} \in \widehat{S}_L$. Використовуючи оцінки норм

$$\left\|\int f(x+t)K(t)\,dt\right\|_{\widehat{L}} \leqslant \|f\|_{\widehat{L}} \int |K(t)|\,dt, \quad f \in \widehat{L},\ K \in L(a,b), \tag{16}$$

отримаємо

$$\alpha_{\mathfrak{N}}^{\psi_1}(f,x) \leqslant K|\psi_1(\sigma)|\omega(1/\sigma). \tag{17}$$

Для того, щоб оцінити другий доданок рівності (13), представимо його у вигляді $\beta_{\mathfrak{N}}^{\psi_1}(f,x) = \frac{\psi_1(\sigma)}{\pi}(I_1 - I_2)$, де

$$I_1 \overset{\mathrm{df}}{=} \int\limits_{|t|\geqslant\frac{\pi}{h}} \delta(x,t)\frac{\cos(\sigma-h)t}{ht^2}\,dt,\ I_2 \overset{\mathrm{df}}{=} \int\limits_{|t|\geqslant\frac{\pi}{h}} \delta(x,t)\frac{\cos\sigma t}{ht^2}\,dt$$

і одержимо спочатку оцінку інтеграла $I_1^{(+)} \overset{\mathrm{df}}{=} \int\limits_{\pi/h}^{\infty} \delta(x,t)\frac{\cos(\sigma-h)t}{ht^2}\,dt.$

Для цього будемо використовувати метод, який запропоновано у роботі О.І. Степанця [2, с. 209 – 213]. Нам знадобиться аналог леми 5.2.3 з цієї роботи.

Лема 1. *Нехай* $\varphi(t)$ *— сумовна на множині* $\mathcal{I}$ *функція. Тоді, якщо* $\mathcal{I} = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$ *і* $x_k,\ k = \overline{1,N},\ a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_N \leqslant b$ *— деякий набір точок, для яких*

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(t)\,dt = 0, \qquad k = 1,2,\ldots,N-1, \tag{18}$$

$\varphi > 0$ $(\varphi < 0)$ *майже скрізь на* (x_k, c_k), $\varphi < 0$ $(\varphi > 0)$ *майже скрізь на* (c_k, x_{k+1}), $c_k \in (x_k, x_{k+1})$, *то* $\forall f \in \widehat{H}_{\omega_L}$

$$\left\|\int\limits_a^b f(x+t)\varphi(t)\,dt\right\|_{\widehat{L}} \leqslant \left\|\int\limits_a^{x_1} f(x+t)\varphi(t)\,dt\right\|_{\widehat{L}} + \\ + \frac{\omega(\Delta)}{2}\int\limits_{x_1}^{x_N} |\varphi(t)|\,dt + \left\|\int\limits_{x_N}^{b} f(x+t)\varphi(t)\,dt\right\|_{\widehat{L}}.$$

Якщо $\mathcal{I} = \{x : x \geqslant a\}$, *а* $x_k,\ k = 1,2,\ldots,\ a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots$ *— деякий набір точок, для яких умова (18) виконана для довільного натурального* k, *то* $\forall f \in \widehat{H}_{\omega_L}$

$$\left\|\int\limits_a^{\infty} f(x+t)\varphi(t)\,dt\right\|_{\widehat{L}} \leqslant \left\|\int\limits_a^{x_1} f(x+t)\varphi(t)\,dt\right\|_{\widehat{L}} + \omega(\Delta)\int\limits_{x_1}^{\infty} |\varphi(t)|\,dt.$$

В останніх співвідношеннях $\Delta = \sup_k(x_{k+1} - x_k)$.

Доведення цієї леми аналогічно до доведення леми 5.2.3 [2, с. 212 – 213].

Нехай $\Phi_1(x) = \int\limits_x^\infty \frac{\cos(\sigma-h)t}{ht^2}\, dt$. Функція $1/t^2$ монотонно спадає при $t>0$, тому функція $\Phi_1(x)$ між кожними двома додатними нулями функції $\cos(\sigma-h)t$ буде мати свій єдиний нуль. Позначимо через $x_1,\ x_2,\ \ldots$ множину нулів функції $\Phi_1(x)$ з проміжку $(\frac{\pi}{h},\infty)$, занумерував їх у порядку зростання. Оскільки $\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\cos(\sigma-h)t}{ht^2}\, dt = 0$, то, застосовуючи лему 1, одержуємо

$$\|I_1^{(+)}\|_{\widehat{L}} \leqslant \left\| \int\limits_{\pi/h}^{x_1} \delta(x,t)\frac{\cos(\sigma-h)t}{ht^2}\, dt \right\|_{\widehat{L}} + \omega(\Delta)\int\limits_{x_1}^{\infty} \left|\frac{\cos(\sigma-h)t}{ht^2}\right|\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \max_{\pi/h\leqslant t\leqslant x_1} \|\delta(x,t)\|_{\widehat{L}} \int\limits_{\pi/h}^{x_1} \left|\frac{\cos(\sigma-h)t}{ht^2}\right|\, dt + \omega(\Delta)\int\limits_{x_1}^{\infty} \left|\frac{\cos(\sigma-h)t}{ht^2}\right|\, dt,$$

причому $\Delta = \sup\limits_k (x_{k+1}-x_k) \leqslant \frac{2\pi}{\sigma-h},\ \ x_1-\frac{\pi}{h} < \frac{2\pi}{\sigma-h}$.

Зважаючи на те, що: 1) $\omega(\lambda t) \leqslant (\lambda+1)\omega(t)$ для довільного модуля неперервності та $\lambda>0$ і 2) за умови $0\leqslant\Theta<1$ має місце нерівність $\omega\left(\frac{1}{\sigma-h}\right) \leqslant K\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right)$, знаходимо

$$\|I_1^{(+)}\|_{\widehat{L}} \leqslant K\omega\left(\tfrac{1}{\sigma-h}\right) \left(\int\limits_{\pi/h}^{\frac{\pi}{h}+\frac{2\pi}{\sigma-h}} \frac{dt}{ht^2} + \int\limits_{\pi/h}^{\infty} \frac{dt}{ht^2} \right) \leqslant K\omega\left(\tfrac{1}{\sigma}\right). \tag{19}$$

Розмірковуючи подібним чином, встановлюємо

$$\|I_2^{(+)}\|_{\widehat{L}} \stackrel{df}{=} \left\| \int\limits_{\pi/h}^{\infty} \delta(x,t)\frac{\cos\sigma t}{ht^2} dt \right\|_{\widehat{L}} \leqslant K\omega\left(\tfrac{1}{\sigma}\right). \tag{20}$$

З співвідношень (19), (20) та їм аналогічних для $t\in(-\infty,-\pi/h)$ маємо

$$\left\| \beta_{\mathfrak{N}}^{\psi_1}(f,x) | \right\|_{\widehat{L}} \leqslant K|\psi_1(\sigma)|\omega(1/\sigma), \quad \forall f\in \widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{H}_{\omega_L}. \tag{21}$$

Оцінимо тепер величину $R_{\mathfrak{N}}^{\psi_1}(f,x)$. Для цього будемо використовувати твердження 5.4.1 [2, с. 224]. Зауважимо, що хоча воно доведено лише для випадку натуральних значень σ, але твердження залишається вірним і для дійсних чисел $\sigma>0$, оскільки при його доведенні не враховувався факт $\sigma\in\mathbb{N}$. Беручи до уваги інформацію о нулях $\overline{x}_k$ функції $\Phi_2(x) = \int\limits_x^\infty \frac{1}{t}\int\limits_1^\infty \psi_1'(\sigma s)\sin st\ ds$ та застосовуючи другу частину леми 1, одержуємо

$$\|I_3\|_{\widehat{L}} \stackrel{df}{=} \left\| \int\limits_0^\infty \frac{\delta(x,t)}{t} \int\limits_\sigma^\infty \psi_1'(s)\sin st\ ds\ dt \right\|_{\widehat{L}} \leqslant$$

$$\leqslant \sigma \left\| \int\limits_0^{\overline{x}_1} \frac{\delta(x,t/\sigma)}{t} \int\limits_1^\infty \psi_1'(\sigma s)\sin st\ dsdt \right\|_{\widehat{L}} + \frac{\omega(\Delta)}{\pi} \int\limits_{\overline{x}_1}^\infty \left| \frac{\sigma}{t}\int\limits_1^\infty \psi_1'(\sigma s)\sin st\ ds \right| dt. \tag{22}$$

В силу монотонності функції $\psi_1'(\sigma s)$ та періодичності тригонометричних функцій, маємо

$$\left| \frac{\sigma}{t}\int\limits_1^\infty \psi_1'(\sigma s)\sin st\ ds \right| \leqslant \left| \frac{\sigma}{t}\int\limits_1^{1+2\pi/t} \psi_1'(\sigma)\ ds \right| \leqslant \frac{K\sigma|\psi_1'(\sigma)|}{t^2} \leqslant K\frac{|\psi_1(\sigma)|}{t^2}. \tag{23}$$

Оскільки $\Delta \leqslant \frac{2\pi}{\sigma}$, то, застосовуючи оцінки (16) і (23) до нерівності (22), отримаємо $\|I_3\|_{\widehat{L}} \leqslant K\omega(1/\sigma)|\psi_1(\sigma)|$. Зрозуміло, що така ж сама оцінка справедлива і для інтеграла по проміжку $t<0$, тому

$$\|R_{\mathfrak{N}}^{\psi_1}(f,x)\|_{\widehat{L}} \leqslant K\omega(1/\sigma)|\psi_1(\sigma)|. \tag{24}$$

Отже, враховуючи оцінки (17), (21) та (24), бачимо, що $||b_{\widehat{H}_{\omega_L}}^{\psi_1}(f,x)||_{\widehat{L}} = = O(1)|\psi_1(\sigma)|\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right)$.

Розмірковуючи аналогічним чином, переконуємося, що, за умов теореми, мають місце співвідношення (15).

Для завершення дослідження величини $\rho_{\sigma,\sigma-h}^*(f,x)$ нам треба спростити два перших доданка рівності (12). За допомогою леми 1 переконуємося в справедливості наступної рівності:

$$\int\limits_{a/\sigma\leqslant|t|\leqslant\pi/h} \delta(x,t)\frac{-2\sin\left(\frac{(2\sigma-h)t}{2}-\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin\frac{ht}{2}}{ht^2}\,dt =$$

$$= -\int\limits_{a/\sigma\leqslant|t|\leqslant\pi/h} \delta(x,t)\frac{\sin(\sigma t-\frac{\beta\pi}{2})}{t}\,dt + O(1)\zeta(\mathfrak{N}), \tag{25}$$

де $\zeta(\mathfrak{N}) = \omega\left(\frac{1}{\sigma}\right)$, якщо $f\in \widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{H}_{\omega_L}$ і $\zeta(\mathfrak{N})=1$, якщо $f\in \widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{S}_L$; через $O(1)$ позначена величина, рівномірно обмежена щодо σ, h і β.

Поклавши у співвідношенні (25) спочатку $\beta=0$, а потім $\beta=1$, згідно з рівностями (12) і (15), остаточно одержимо

$$\rho_{\sigma,\sigma-h}^*(f,x) = \frac{-\psi_1(\sigma)}{\pi}\int\limits_{\frac{a}{\sigma}\leqslant|t|\leqslant\frac{\pi}{h}} \delta(x,t)\frac{\sin t}{t}dt + \frac{\psi_2(\sigma)}{\pi}\int\limits_{\frac{a}{\sigma}\leqslant|t|\leqslant\frac{\pi}{h}} \delta(x,t)\frac{\cos t}{t}dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant\frac{a}{\sigma}} \delta(x,t)\int\limits_\sigma^\infty \psi_2(s)\sin stdsdt + O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|\zeta(\mathfrak{N}). \tag{26}$$

Далі знайдемо оцінку доданка $\Delta_{\sigma,\sigma-h}$ з правої частини співвідношення (11). Розмірковуючи як і при доведенні леми 2 роботи [6, с. 166 – 168], маємо

$$||\Delta_{\sigma,\sigma-h}||_{\widehat{L}} = E(f^{\overline{\psi}})_{\widehat{L}} \int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{d}_{\sigma,\sigma-h}|dt, \tag{27}$$

де $E(f^{\overline{\psi}})_{\widehat{L}} = \inf\limits_{\varphi\in W^2_{\sigma-h}} \|f^{\overline{\psi}}(\cdot) - \varphi(\cdot)\|_{\widehat{L}}$, $W^2_\sigma = \{\varphi \in \varepsilon_\sigma : \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|\varphi(t)|^2}{(1+|t|)^2}dt < \infty\}$,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{d}_{\sigma,\sigma-h}|dt \leqslant K \sum_{i=1}^{2} (\psi_i(\sigma-h) - \psi_i(\sigma)). \tag{28}$$

Оскільки $\forall\psi \in \mathfrak{A}_0$ за умови $\Theta \in [0,1)$ справедлива нерівність $\psi(\sigma-h) \leqslant \leqslant K\psi(\sigma)$, то, згідно зі співвідношеннями (27), (28) та нерівностями Джексона $E(f^{\overline{\psi}})_{\widehat{L}} \leqslant 1$, якщо $f \in \widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{S}_L$ і $E(f^{\overline{\psi}})_{\widehat{L}} \leqslant \omega(\frac{1}{\sigma-h})$, $\forall f \in \widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{H}_{\omega_L}$, знаходимо:

$$\|\Delta_{\sigma,\sigma-h}(f,x)\|_{\widehat{L}} = O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|\zeta(\mathfrak{N}), \quad \forall f \in \widehat{L}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}. \tag{29}$$

Згідно до рівності $-a\sin\alpha + b\cos\alpha = -\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha-\gamma)$, $\gamma = \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$ і співвідношень (11), (26) та (29), отримуємо

$$\rho_{\sigma,\sigma-h}(f,x) = \frac{-|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi} \int\limits_{a/\sigma\leqslant|t|\leqslant\pi/h} \delta(x,t)\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{t}dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant a/\sigma} \delta(x,t)\int\limits_0^\infty \psi_2(s)\sin st ds dt + O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|\zeta(\mathfrak{N}), \gamma_\sigma = \mathrm{arctg}\frac{\psi_1(\sigma)}{\psi_2(\sigma)}. \tag{30}$$

Спираючись на (30) знайдемо асимптотичні рівності для величин (5).

Нехай

$$x_k = \tfrac{k\pi+\gamma_\sigma}{\sigma},\ t_k = x_k - \tfrac{\pi}{2\sigma},\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots,\ \gamma_\sigma \in \mathbb{R},\ \sigma > 0. \tag{31}$$

Через k_0 позначимо те значення k, для якого t_{k_0} є найближча справа від точки $(a+\pi)/\sigma$ точка, в якій $\sin(\sigma t-\gamma_\sigma) = 1$, а через k_1 — найбільше зі значень k таких, що $t_k < \pi/h$. Далі, через k_2 позначимо таке число, що точка t_{k_2} буде найближча зліва від точки $-(a+\pi)/\sigma$ серед тих, в яких $\sin(\sigma t-\gamma_\sigma) = -1$, а через k_3 — найменше зі значень k, що задовольняють умову $t_k > -\pi/h$, і покладемо $l_{\sigma,h}(t) = x_k$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = k_0, \ldots, k_1-1$, $k = k_3, k_3+1, \ldots, k_2-1$,

$$i_{3,1} = [t_{k_3}, t_{k_2}] \cup [t_{k_0}, t_{k_1}]. \tag{32}$$

Далі, повторюючи міркування з монографії [2, с. 232 – 234] та використовуючи замість леми 5.1.3 лему 1, отримуємо, що для довільного числа $a > 0$, $\gamma_\sigma \in \mathbb{R}$ і обраних згідно до умови теореми дійсних чисел σ та h

$$\int\limits_{\frac{a}{\sigma}\leqslant|t|\leqslant\frac{\pi}{h}} \delta(x,t)\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{t}dt = \int\limits_{i_{3,1}} \delta(x,t)\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{l_{\sigma,h}(t)}dt + O(1)\zeta(\mathfrak{N}). \tag{33}$$

Тому, згідно до співвідношень (30) і (33), маємо

$$\rho_{\sigma,\sigma-h}(f,x) = \frac{-|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi}\int\limits_{i_{3,1}} \delta(x,t)\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{l_{\sigma,h}(t)}\ dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant\frac{a}{\sigma}} \delta(x,t)\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi_2(s)\sin st\ dsdt + O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|\zeta(\mathfrak{N}). \tag{34}$$

Перейдемо безпосередньо до одержання рівностей (6) та (7). Розглянемо спочатку випадок $f \in \widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{S}_L$. Застосовуючи нерівність (16) до співвідношення (34), отримуємо

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{S}_L, V_{\sigma,\sigma-h}) \leqslant \frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi}\int\limits_{i_{3,1}}\left|\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{l_{\sigma,h}(t)}\right|dt+$$

$$+\int\limits_{|t|\leqslant\frac{a}{\sigma}}\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi_2(s)\sin stds\right|dt + O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|. \tag{35}$$

Покажемо, що останнє співвідношення насправді є рівністю. Для цього використаємо наступне твердження з роботи [10].

Лема A ([10, лема 3, с. 29]). *Нехай* $K \in L[a,b]$. *Тоді*

$$\mathcal{E}(K) \overset{df}{=} \sup_{\varphi\in\widehat{S}_L}\int\limits_a^b\left|\int\limits_a^b\varphi(x-t)K(t)dt\right|\ dx \geqslant \int\limits_a^b|K(t)|\ dt. \tag{36}$$

Покладемо

$$K(t) = \begin{cases} \int\limits_\sigma^\infty \psi_2(s)\sin st\ ds\ dt, & |t| < \frac{a}{\sigma}, \\ \frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{l_{\sigma,h}(t)}, & t\in i_{3,1}, \\ 0, & t\notin(-a/\sigma,a/\sigma)\bigcup i_{3,1}. \end{cases} \tag{37}$$

Тоді зі співвідношень (35) – (37) отримуємо

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{S}_L, V_{\sigma,\sigma-h}) = \frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi}\int\limits_{i_{3,1}}\left|\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{l_{\sigma,h}(t)}\right| dt+$$

$$+\int\limits_{|t|\leqslant\frac{a}{\sigma}}\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi_2(s)\sin st\; ds\right| dt + O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|. \tag{38}$$

В роботі [5, с. 397] показано, що

$$\int\limits_{i_{3,1}}\left|\tfrac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{l_{\sigma,h}(t)}\right| dt = \tfrac{4}{\pi}\ln\tfrac{\sigma}{h} + O(1). \tag{39}$$

$$\tfrac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant\frac{a}{\sigma}}\left|\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi_2(s)\sin st\; ds\right| dt = \tfrac{2}{\pi}\int\limits_{\sigma}^{\infty}\tfrac{|\psi_2(t)|}{t}\, dt + O(1), \tag{40}$$

Поєднуючи співвідношення (38) – (40), завершуємо доведення рівності (6).

Розглянемо випадок $f\in\widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{H}_{\omega_L}$. Згідно зі співвідношенням (34)

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{H}_{\omega_L}, V_{\sigma,\sigma-h}) \leqslant \sup_{\varphi\in\widehat{H}_{\omega_L}}\left\|\frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi}\int\limits_{i_{3,1}}(\varphi(t)-\varphi(0))\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{l_{\sigma,h}(t)}dt\right\|_{\widehat{L}}+$$

$$+\sup_{\varphi\in\widehat{H}_{\omega_L}}\left\|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{a}{\sigma}}^{\frac{a}{\sigma}}(\varphi(t)-\varphi(0))\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi_2(s)\sin st ds dt\right\|_{\widehat{L}} + O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

Тому, виходячи із побудови функції $l_{\sigma,h}(t)$, маємо

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{H}_{\omega_L}, V_{\sigma,\sigma-h}) \leqslant \left(\sum_{k=k_3}^{k_2-1}\frac{1}{|x_k|}\sup_{\varphi\in\widehat{H}_{\omega_L}}\left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi(t)\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)\; dt\right|+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=k_0}^{k_1-1}\frac{1}{x_k}\sup_{\varphi\in\widehat{H}_{\omega_L}}\left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi(t)\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)\; dt\right|\right)\frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sup_{\varphi\in\widehat{H}_{\omega_L}}\int\limits_{-\frac{a}{\sigma}}^{\frac{a}{\sigma}}(\varphi(t)-\varphi(0))\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi_2(s)\sin st\; ds dt + O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

Повторюючи міркування роботи [2, с. 239 – 240], знаходимо

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\overline{\psi}}\widehat{H}_{\omega_L}, V_{\sigma,\sigma-h}) \leqslant \frac{|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2\sigma}\omega(2t)\sin\sigma t\,dt\left(\sum_{k=k_3}^{k_2-1}\frac{1}{|x_k|}+\sum_{k=k_0}^{k_1-1}\frac{1}{x_k}\right)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_0^{\frac{a}{\sigma}}\omega(2t)\int\limits_\sigma^\infty\psi_2(s)\sin st\,ds\,dt\right|+O(1)|\overline{\psi}(\sigma)|\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right). \tag{41}$$

Покажемо, що у випадку, коли $\omega(t)$ опуклий модуль неперервності $\exists\ \varphi^*(t)\in\widehat{H}_{\omega_L}$ для якої нерівність (41) обертається на рівність. Покладемо

$$\varphi_1(t)=\begin{cases}\frac{1}{4}\omega(2t), & t\in[0,\frac{\pi}{2\sigma}),\\ -\frac{1}{4}\omega(2|t|), & t\in(-\frac{\pi}{2\sigma},0],\\ 0, & t\notin(-\pi/2\sigma,\pi/2\sigma).\end{cases} \tag{42}$$

Тоді шукана функція $\varphi^*(t)$ визначається рівністю $\varphi^*(t)=\varphi_1'(t)$. Користуючись схемою доведення роботи [2, стор. 258 – 259], переконуємося, що функція $\varphi^*(t)\in\widehat{H}_{\omega_L}$ і для неї має місце (41). Якщо ж $\omega(t)$ — довільний (не обов'язково опуклий) модуль неперервності, то співвідношення (41) буде рівністю, якщо його праву частину помножити на деяку величину $\Theta_\omega\in[\frac{1}{2},1]$.

Оскільки

$$\sum_{k=k_3}^{k_2-1}\tfrac{1}{|x_k|}+\sum_{k=k_0}^{k_1-1}\tfrac{1}{x_k}=\sigma\left(\tfrac{2}{\pi}\ln\tfrac{\sigma}{h}+O(1)\right),$$

$\left|\int\limits_a^1\omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\int\limits_1^\infty\psi_2(\sigma s)\sin st\,ds\,dt\right|=O(1)\psi_2(\sigma)\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right)$, то згідно зі співвідношенням (41) рівність (7), а з нею і теорема 1 доведені.

□

Література

1. *Stepanets A.I.* Approximation of locally integrable function on the real line / A.I. Stepanets, Wang Kunyang, Zhang Xirong // Український математичний журнал. — 1999. — Т. 51, №11. — С. 1549–1561.
2. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: в 2 т. — Киев: Институт математики НАН Украины, 2002. — Т.1. — 426 с.
3. *Дрозд В.В.* Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье в среднем / В.В. Дрозд // Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье. — Киев, 1989. — 59 с. — (препр./ АН УССР. Ин-т математики; 89.17).

4. *Степанец А.И.* Приближение в пространствах локально интегрируемых функций / А.И. Степанец // Український математичний журнал. — 1994. — Т. 46, №5. — С. 597 – 625.
5. *Рукасов В.И.* Приближение непрерывных функций небольшой гладкости операторами Валле Пуссена / В.И. Рукасов, Е.С. Силин // Український математичний журнал. — 2005.— Т. 57, №3 — С. 394–400.
6. *Рукасов В.И.* Приближение ψ-интегралов периодических функций в равномерной и интегральной метриках / В.И. Рукасов, С.О. Чайченко // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. — 2003. — С. 156 – 191.
7. *Рукасов В.И.* Приближение непрерывных периодических функций суммами Валле Пуссена (небольшая гладкость) / В.И. Рукасов, С.О. Чайченко // Теорія наближення функцій та суміжні питання. — Київ, 2002. — С. 134 – 150. — (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 35).
8. *Степанець О.І.* Наближення операторами Фур'є $\overline{\psi}$-інтегралів функцій, заданих на дійсній осі / О.І. Степанець, І.В. Соколенко // Український математичний журнал. — 2004. — Т. 56, №7. — С. 960–965.
9. *Соколенко І.В.* Наближення операторами Фур'є $\overline{\psi}$-інтегралів неперервних функцій, заданих на дійсній осі / І.В. Соколенко // Український математичний журнал. — 2004. — Т. 56, №5. — С. 663 – 676.
10. *Степанец А.И.* Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье в равномерной метрике / А.И. Степанец, В.В. Дрозд // Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье. — Киев, 1989. — 59 с. — (препр./ АН УССР. Ин-т математики; 89.17).