УДК 512.54

Пащенко З.Д., Валюх К.В.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: pashchenko_zd@mail.ru; ksusha_valuh@mail.ru

СУПЕРРОЗ'ЯЗНІСТЬ І СИЛОВСЬКІ СИСТЕМИ

В статті описано властивості силовських множин, розглядаються квазінормальні та суперрозв'язні підгрупи з силовськими системами. Одержано ознаки суперрозв'язності груп.

Ключові слова: *силовські підгрупи, квазінормальні підгрупи, супердодавання, суперрозв'язні підгрупи, силовські множини, силовські системи.*

Вступ

Вивчення групових операцій або, інакше, вивчення груп з точністю до ізоморфізму, є задачею теорії груп. Ця теорія завершила б свій розвиток, якщо б вдалося скласти каталог усіх можливих груп з точністю до ізоморфізму. Але поки що такий каталог не скаладено і мало ймовірно, що це практично можливо. Хоча дана робота присвячена саме цьому напряму.

У теорії скінченних груп важливе місце займають результати, пов'язані з дослідженням існування доповнень до виділених систем підгруп. У класичних роботах Шура, Цассенхауза, Гашюца, Л.А. Шеметкова встановлюються умови, при яких існує доповнення до нормальної підгрупи. У 1978 році в роботі [4] для отримання існування доповнень до нормальної підгрупи Л.А. Шеметков почав розглядати додавання.

Відомо, що скінченні розв'язні групи можна охарактеризувати як скінченні групи, у яких доповнювальні всі силовські підгрупи. Ця теорема Ф. Хола [6] стала джерелом розвитку одного з напрямів теорії груп, що полягає в дослідженні будови груп з виділеними системами доповнюваних підгруп.

Проте умова існування доповнень до окремих підгруп є достатньо сильним обмеженням. Далеко не всі підгрупи володіють доповненнями. Разом з тим кожна підгрупа володіє мінімальним додаванням. Тому для дослідження будови скінченних груп з системами підгруп, що додаються, необхідно вводити додаткові обмеження на мінімальні додавання. Таким обмеженням є існування супердодавання.

Важливим у класі розв'язних груп є підклас суперрозв'язних груп — груп, які володіють нормальним рядом з циклічними факторами. Дослідження суперрозв'язних груп, які володіють супердодаванням, є метою даної статті.

Основна частина

Квазінормальною називають підгрупу K групи G, яка переставна зі всіма підгрупами групи G. Ясно, що нормальні підгрупи завжди квазінормальні. Найменша підгрупа H називається *мінімальним додаванням* до підгрупи K групи G, якщо $G = HK$.

Мінімальне додавання H до підгрупи K групи G назвемо супердодаванням, якщо H_1K є підгрупою для довільної підгрупи H_1 із H. Ясно, що нормальні і квазінормальні підгрупи володіють супердодаваннями. Підгрупу, що володіє супердодаванням, називають *напівнормальною* підгрупою.

Нехай p — просте число. Скінченну групу, порядок якої є степінь числа p називають *p-групою*. Скінченна група називається примарною, якщо вона є p-групою для деякого простого p.

Елементи x, y групи G називаються *спряженими*, якщо існує $a \in G$, що $y = a^{-1}xa$ (позначається $y = x^a$). Підгрупа $P^a = \{x^a | x \in P\}$ називається *спряженою* до підгрупи $P \subset G$.

Силовською p–підгрупою скінченної групи G називають таку p–підгрупу, індекс якої не ділиться на p. Безпосередньо з теореми отримуємо

Теорема 1. (Теорема Силова) *Нехай скінченна група G має порядок $p^m s$, де p – просте число і p не ділить s. Тоді:*

- *існує силовська p–підгрупа і її порядок дорівнює p^m;*
- *кожна p–підгрупа міститься в деякій силовській p–підгрупі;*
- *будь-які дві силовські p–підгрупи спряжені;*
- *число силовських p–підгруп конгруентне одиниці за модулем p і ділить s.*

Теорема 2. *Нехай p — найбільший простий дільник порядку групи G і P — її силовська p-підгрупа. Якщо P володіє супердодаванням в G, то P — нормальна підгрупа групи G.* [3]

Наслідок 1. *Якщо в групі G всі силовські підгрупи мають супердодавання, то G суперрозв'язна.*

Доведення. Нехай P — силовська p-підгрупа для найбільшого простого дільника p порядка групи G і нехай $\pi(G) = \{p, q_1, q_2, \ldots, q_t\}$ і $q_1 < q_2 < \ldots < q_t < p$. За умовою $G = Q_1H_1$, де Q_1 — силовська q_1-підгрупа в G, H_1 — її супердодавання.

Нехай Q_2 — силовська q_2-підгрупа із H_1. Так як Q_2 — силовська q_2-підгрупа в G, то Q_2 напівнормальна в G. За лемою 1 Q_2 напівнормальна в H_1, тобто $H_1 = Q_2H_2$, де H_2 – супердодавання Q_2 в H_1. За лемою 2 добуток Q_1Q_2 є напівнормальною в G підгрупо і $G = (Q_1Q_2)H_2$, причому H_2 є супердодавання до Q_1Q_2 в G. Через t кроків одержимо, що $H = Q_1Q_2 \ldots Q_t$ — напівнормальна в G підгрупа, де Q_i — силовська q_i-підгрупа для $i = 1, \ldots, t$. Ясно, що $G = PH$ і $P \in S_G(H)$.

Нехай P_1 — підгрупа простого порядку із P, нормальна в P. Із того, що H напівнормальна в G випливає, що HP_1 — підгрупа групи G. Так як $P \lhd G$, то $P_1 \lhd HP_1$ і $P_1 \lhd G$. Отже, в групі G міститься нормальна підгрупа P_1 простого порядку p. За лемою 1 умова твердження, яке доводиться, розповсюджується і на факторгрупу G/P_1. За індукцією G/P_1 суперрозв'язна. Тепер G суперрозв'язна. Наслідок доведено. □

Якщо G — група порядку $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}$, то прийнято позначати $\pi(G) = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Множина Σ, що складається з попарно переставних силовських p-підгруп з G, в точності по одній підгрупі для кожного $p \in \pi(G)$, разом з самою групою G, називається *силовською системою* групи G.

Силовською множиною групи назвемо множину силовських підгруп, узятих по одній для кожного простого дільника порядку групи, разом з одиничною підгрупою.

Таким чином, якщо G — група порядку $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, то множина $\Sigma = \{E, G_{p_1}, G_{p_2}, \ldots, G_{p_n}\}$ буде силовською множиною. Тут E — одинична підгрупа групи G, G_{p_i} — силовська p_i-підгрупа групи G і всі числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$ різні.

З теореми Силова випливає, що кожна група G містить силовську множину Σ. Якщо додатково $G_{p_i}G_{p_j} = G_{p_j}G_{p_i}$ для всіх підгруп з Σ, то силовська множина перетворюється на силовську систему.

Відомо, що будь-яка розв'язна група має силовську систему, і навпаки, якщо в групі є силовська система, то група розв'язна. Крім того, якщо Σ і Σ' — силовські системи розв'язної групи G, то $\Sigma^g = \Sigma'$ для деякого $g \in G$.

Нехай Ω — деяка множина підгруп групи G і N — нормальна підгрупа групи G. Скористаємося наступними позначеннями:

$$\Omega N = \{XN | X \in \Omega\},$$
$$\Omega N/N = \{XN/N | X \in \Omega\},$$
$$\Omega \cap N = \{X \cap N | X \in \Omega\},$$
$$\Omega^\theta = \{X^\theta | X \in \Omega\},$$

де θ — деякий гомоморфізм групи G в деяку групу G^θ.

Нехай Ω — деяка множина підгруп групи G. Підгрупа H групи G називається Ω-*квазінормальною*, якщо $HX = XH$, для всіх $X \in \Omega$. Якщо Ω — множина всіх підгруп групи G, то Ω-квазінормальна підгрупа є квазінормальною.

Лема 1. *Нехай G_p — силовська p-підгрупа групи G і $N \triangleleft G$. Тоді $G_p \cap N$ — силовська p-підгрупа групи N, а G_pN/N — силовська p-підгрупа факторгрупи G/N.* [5]

Властивості силовських множин описано в наступних лемах.

Лема 2. *Нехай N — нормальна підгрупа групи G.*

- *Якщо Σ — силовська множина групи G, то $\Sigma N/N$ є силовською множиною факторгрупи G/N.*
- *Якщо Σ — силовська множина групи G, то $\Sigma \cap N$ є силовською множиною підгрупи N.*
- *Якщо факторгрупа G/N має силовську множину $\overline{\Sigma}$, то знайдеться в групі G така силовська множина Σ, що $\overline{\Sigma} = \Sigma N/N$.*
- *Якщо нормальна підгрупа H групи G має силовську множину Σ_H, то знайдеться в групі G така силовська множина Σ, що $\Sigma_H = \Sigma \cap H$.*
- *Якщо Σ — силовська множина групи G і θ — деякий гомоморфізм групи G в групу G^θ, то Σ^θ є силовською множиною групи G^θ.* [5]

Лема 3. *Нехай Σ — силовська множина групи G і $H - \Sigma$ — квазінормальна підгрупа групи G. Тоді вірні наступні твердження:*

- *якщо θ — гомоморфізм групи G, тоді підгрупа H^θ є Σ^θ-квазінормальною в групі G^θ;*
- *якщо $G \geqslant K \geqslant H$ і K — нормальна підгрупа групи G, то підгрупа $H\Sigma \cap K$ — квазінормальна в групі K;*
- *якщо N – довільна нормальна підгрупа групи G, то в факторгрупі G/N підгрупа HN/N буде $\Sigma N/N$-квазінормальною.* [5]

Лема 4. *Нехай група G з силовською множиною Σ, H — підгрупа групи G. Якщо підгрупа H^x є Σ-квазінормальна, то сама підгрупа H буде $\Sigma^{x^{-1}}$ — квазінормальною для будь-якого елемента x групи G.* [5]

Нехай Σ — силовська множина групи G. Вище перетин $\Sigma \cap N$ визначався для нормальної підгрупи N групи G. У цьому випадку за лемою 2 перетин є силовськиою множиною групи N. Якщо H — довільна, не обов'язково нормальна, підгрупа групи G, то припустимо $\Sigma \cap H = \{X \cap H | X \in \Sigma\}$. Відзначимо, що в цьому випадку $\Sigma \cap H$ може не бути силовською множиною групи H.

Лема 5. *Нехай* G *— група,* Σ *— її силовська множина. Якщо* $H - \Sigma$ *— квазінормальна підгрупа групи* G, *причому* $H \cap \Sigma = \{E\}$ *і індекс* H *в групі* G *примарний, то* G *— примарна група.* [5]

Лема 6. *Нехай* N *— нормальна підгрупа групи* G. *Якщо* A/N *— циклічна* p*-підгрупа факторгрупи* G/N, *то існує елемент* $h \in A$ *такий, що* $\langle h \rangle - p$*-підгрупа і* $\langle h \rangle N = A$. [5]

Будемо використовувати запис Σ_G для позначення деякої силовської множини групи G. Має місце наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай* H, K *— надрозв'язні підгрупи групи* G. *І нехай* Σ_H *і* Σ_K *— силовські системи підгруп* H *і* K, *і* $G = HK$. *Якщо циклічні примарні підгрупи з* H *є* Σ_K *— квазінормальні і циклічні примарні підгрупи з* K *є* Σ_H*-квазінормальні, то група* G *суперрозв'яна.*

Так як квазінормальна підгрупа переставна зі всіма іншими підгрупами, то із лем 2-6 та теореми 3 випливають наступні твердження.

Наслідок 2. *Нехай* H *і* K *— суперрозв'яні підгрупи групи* G *такі, що* $G = HK$. *І нехай* H *квазінормальна в* K *і* K *квазінормальна в* H. *Тоді* G *суперрозв'яна.*

Наслідок 3. *Нехай група* $G = HK$, *де* H, K *— суперрозв'яні пігрупи групи* G *взаємно простих порядків з силовськими системами* Σ_H *і* Σ_K *відповідно. Якщо* H *і циклічні підгрупи з* H *є* Σ_K *— квазінормальні,* K *і циклічні підгрупи з* K *є* Σ_H*-квазінормальні, то група* G *суперрозв'яна.*

Наслідок 4. *Нехай група* $G = HK$, *де* H, K *— суперрозв'яні підгрупи групи* G *з силовськими системами* Σ_H *і* Σ_K *відповідно. Якщо елементи силовських систем* Σ_H *і* Σ_K *попарно переставні, циклічні підгрупи з* H *є* Σ_K*-квазінормальні, циклічні підгрупи з* K *є* Σ_H*-квазінормальні, то група* G *суперрозв'яна.*

Висновки

В статті досліджено суперрозв'язність групи, у якої силовські підгрупи володіють супердодаванням. За допомогою введеного поняття силовська множина розглянуто ознаку суперрозв'язності факторизовних груп з переставними циклічними підгрупами з факторів. Одержано наслідки цього твердження, що можуть вважатися самостійними ознаками суперрозв'язності групи.

Література

1. *Каргаполов М.И.* Основы теории групп / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков // М.: Наука, 1977. — 238 с.
2. *Курносенко Н.М.* О факторизации конечных групп сверхразрешимыми и нильпотентными подгруппами / Н.М. Курносенко // Вопросы алгебры. — Гомель: Изд-во ГГУ им. Ф. Скорины. Вып. 12, 1998. — С. 113–122.
3. *Подгорная В.В.* Минимальные добавления к подгруппам конечных групп. Курс лекций — Гомель: Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, 2003. — 65 с.
4. *Шеметков Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков // М.: Наука, 1978. — 272 с.
5. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups Walter de Gruyter. — Berlin – New York, 1992. — 889 p.
6. *Hall P.* A characteristic property of soluble groups / P. Hall // J. London Math. Soc. — 1937. — №12. — P. 198–200.