УДК 512.33

Рябухо О.М., Турка Т.В., Судіна К.О., Плюшко Г.В.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

[3] *студентка 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[4] *студентка 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: tvturka@mail.ru

НАПІВГРУПИ ВІДПОВІДНОСТЕЙ ГРУП ТА НАПІВГРУП

Описано умови ідемпотентності елементів і максимальні підгрупи $\mathcal{D}$–класу напівгрупи відповідностей скінченної групи. Доведена теорема про регулярність напівгрупи відповідностей.

Ключові слова: *напівгрупа відповідностей, ідемпотентність, максимальна підгрупа, регулярність.*

Вступ

Нехай G — універсальна алгебра. Якщо підалгебру з $G\times G$ розглядати як бінарне відношення на G, то множина $S(G)$ всіх підалгебр з $G\times G$ є напівгрупою відносно деморганівського добутку відношень. Напівгрупа $S(G)$ називається *напівгрупою відповідностей* алгебри G.

Задачу вивчення напівгруп відповідностей свого часу ставив Курош (див. [1]).

У роботі [3] показано, що коли G — група, то елементи напівгрупи $S(G)$ можна ототожнити з п'ятірками вигляду $(H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$, де $H_1 \lhd G_1 < G$, $H_2 \lhd G_2 < G$, а φ — ізоморфізм факторгрупи G_1/H_1 на факторгрупу G_2/H_2. При цьому відповідний елемент напівгрупи $S(G)$ — як підмножина із $G\times G$ — має вигляд

$$(H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi) = \bigcup_{a\in G_1} (aH_1 \times \varphi(aH_1)).$$

Множини вигляду $aH_1 \times bH_2$, де $bH_2 = \varphi(aH_1)$, будемо називати блоками елемента $A = (H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$.

1. Ідемпотентність та регулярність

Лема 1. *Для довільного ідемпотента $A = (H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$ напівгрупи $S(G)$ і довільного елемента $b \in G_2$ існує тільки один клас суміжності групи G_1 за підгрупою H_1, який має непорожній перетин з bH_2.*

Доведення. Справді, нехай $bH_2 \cap a'H_1 \neq \varnothing$ і $bH_2 \cap a''H_1 \neq \varnothing$. Розглянемо підмножини $aH_1 \times bH_2$, $a'H_1 \times b'H_2$, $a''H_1 \times b''H_2$ з A. Тоді

$$(aH_1 \times bH_2) \circ (a'H_1 \times b'H_2) = aH_1 \times b'H_2$$

$$(aH_1 \times bH_2) \circ (a''H_1 \times b''H_2) = aH_1 \times b''H_2$$

звідки $b'H_2 = b''H_2$. Але тоді $a'H_1 = a''H_1$. □

Теорема 1. *Нехай G — група. Якщо елемент $(H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$ напівгрупи відповідностей $S(G)$ є ідемпотентом, то виконуються такі умови:*
1) $H_1(G_1 \cap G_2) = G_1$, $H_2(G_1 \cap G_2) = G_2$;
2) для довільного $g \in G_1 \cap G_2$ $\varphi(gH_1) = gH_2$.

Доведення. Нехай елемент $A = (H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$ є ідемпотентом. Тоді для довільного блоку $aH_1 \times bH_2$ із A маємо:

$$(aH_1 \times bH_2) \circ (aH_1 \times bH_2) = (aH_1 \times bH_2).$$

Звідси випливає, що $bH_2 \cap aH_1 = \varnothing$. Отже, для кожного класу суміжності aH_1 групи G_1 за підгрупою H_1 знайдеться такий елемент $c \in aH_1 \cap bH_2 \subseteq G_1 \cap G_2$, що $aH_1 = cH$. Але тоді $H_1(G_1 \cap G_2) \subseteq H_1G_1 = G_1$. Аналогічно доводиться, що $H_2(G_1 \cap G_2) = G_2$. Це доводить умову 1).

Для довільного $g \in G_1 \cap G_2$ елемент A містить блоки вигляду $aH_1 \times gH_2$ і $gH_1 \times bH_2$. Оскільки $g \in gH_1 \times gH_2$, то $gH_1 \cap gH_2 \neq \varnothing$, а тому

$$(aH_1 \times gH_2) \circ (gH_1 \times bH_2) = (aH_1 \times bH_2).$$

З іншого боку, з ідемпотентності елемента A маємо:

$$(aH_1 \times gH_2) \circ (aH_1 \times gH_2) = aH_1 \times gH_2.$$

Отже, A містить блоки $aH_1 \times bH_2$ і $aH_1 \times gH_2$. Оскільки, перші компоненти блоків однакові, то $bH_2 = gH_2$. Аналогічно доводиться, що $aH_1 = gH_1$. Але тоді $\varphi(gH_1) = \varphi(aH_1) = bH_2 = gH_2$, що доводить умову 2).

Умови теореми 1 не є достатніми. Розглянемо такий приклад: $G = G_1 = G_2 = Z_2 \oplus Z_2$, $H_1 = \{(0,0),(1,0)\}$, $H_2 = \{(0,0),(0,1)\}$. Тоді $G_1/H_1 \simeq G_2/H_2 \simeq Z_2$. Група Z_2 має тільки тотожній автоморфізм, тому ізоморфізм $\varphi : G_1/H_1 \to G_2/H_2$ визначений однозначно. Для елемента $A = (H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$ умови теореми виконуються, бо $H_1(G_1 \cap G_2) = H_1G = G$, $H_2(G_1 \cap G_2) = G$, $\varphi((0,0)H_1) = (0,0)H_2$, $\varphi((1,1)H_1) = (1,1)H_2$. Але $A \neq G \times G$, а $A \circ A = G \times G$. Тому A не є ідемпотентом. □

Теорема 2. *Напівгрупа відповідностей $S(G)$ — регулярна.*

Доведення. Нехай елемент A напівгрупи $S(G)$ має вигляд:

$$A = a_1H_1 \times b_1H_2 + a_2H_1 \times b_2H_2 + ... + a_kH_1 \times b_kH_2.$$

Розглянемо елемент

$$B = b_1H_2 \times a_1H_1 + b_2H_2 \times b_2H_1 + ... + b_kH_2 \times a_kH_1.$$

Для довільного i маємо:

$$(a_iH_1 \times b_iH_2) \circ (b_iH_2 \times a_iH_1) \circ (a_iH_1 \times b_iH_2) = \qquad (1)$$

$$= (a_iH_1 \times a_iH_1) \circ (a_iH_1 \times b_iH_2) = a_iH_1 \times b_iH_2 = S(G).$$

Із рівності 1 та леми 1 випливає, що $A \circ B \circ A = A$. Отже, елемент A є регулярним. Оскільки елемент A — довільний, то напівгрупа $S(G)$ є регулярною. □

Нагадаємо, що напівгрупа називається *ідемпотентною (або зв'язкою)*, якщо всі її елементи є ідемпотентами.

Наслідок 1. *Якщо G — група, то напівгрупа відповідностей $S(G)$ буде зв'язкою тоді і тільки тоді, коли $|G| \leqslant 2$.*

Доведення. Якщо $|G| > 2$, то група G має нетривіальний автоморфізм φ. Виберемо такий елемент $g \in G$, що $\varphi(g) \neq g$. Розглянемо в $S(G)$ елемент $A = \{(g, \varphi(g))|g \in G\}$. Для цього елемента $H_1 = H_2 = E$, $G_1 = G_2 = G$. Позаяк $\varphi(gH_1) = \varphi(g) \neq g = gH_2$, то для A не виконується умова 2 теореми 1. Тому A не є ідемпотентом.

Якщо $|G| \leqslant 2$, то легко перевіряється, що $S(G)$ є звязкою. □

Наступне твердження стосується довільних універсальних алгебр.

Твердження 1. *Якщо алгебра G має власну підалгебру H, то напівгрупа відповідностей $S(G)$ не є інверсною.*

Доведення. Нехай H — власна підалгебра алгебри G. Тоді кожен із елементів $H \times H$ та $G \times G$ є ідемпотентом напівгрупи $S(G)$. Але

$$(H \times H) \circ (G \times G) = H \times G \neq G \times H = (G \times G) \circ (H \times H).$$

Отже, в $S(G)$ є ідемпотентти, які не комутують, а тому $S(G)$ не є інверсною. □

Наслідок 2. *Нехай* G *— напівгрупа. Напівгрупа відповідностей* $S(G)$ *буде інверсною тоді і тільки тоді, коли* $|G|=1$ *.*

Доведення. Нехай $|G|>1$. Якщо в G є ідемпотент e, то в G є власна піднапівгрупа $\{e\}$. Якщо в G немає ідемпотента, то всі елементи мають нескіченний порядок. Тоді для довільного елемента $a\in G$ циклічна піднапівгрупа $\langle a\rangle=\{a^2,a^4,\ldots\}$ є власною. □

2. Максимальні підгрупи $\mathcal{D}$-класу напівгрупи відповідностей

Для довільного ідемпотетна $e\in S$ через G_e позначимо максимальну підгрупу з S, для якої e є одиницею.

Теорема 3. *Нехай* G *— скінченна група, а елемент* $e=(H_1,G_1,H_2,G_2,\varphi)$ *напівгрупи відповідностей* $S(G)$ *є ідемпотентом. Тоді*

$$G_e=\{(H_1,G_1,H_2,G_2,\psi\varphi)|\psi\in\ Aut(G_1/H_1)\}=$$

$$=\{(H_1,G_1,H_2,G_2,\varphi\psi)|\psi\in\ Aut(G_2/H_2)\}.$$

Зокрема, якщо $G_1=G_2=G$ *,* $H_1=H_2=H$ *,* $\varphi=\varepsilon$ *— тотожний автоморфізм, то*

$$G_e=\{(G,H,G,H,\psi)|\psi\in\ Aut(G/H)\}.$$

Доведення. Легко перевіряється, що елемент $f=(H_1,G_1,H_1,G_1,\varepsilon)$, де ε — тотожний автоморфізм факторгрупи G_1/H_1, буде ідемпотентом.

В [4] показано, що елементи $A'=(H_1',G_1',H_2',G_2',\varphi')$ і $A''=(H_1'',G_1'',H_2'',G_2'',\varphi'')$ належать одному $\mathcal{D}$–класу напівгрупи $S(G)$ тоді і тільки тоді, коли $G_1'/H_1'\simeq G_2'/H_2'\simeq G_1''/H_1''\simeq G_2''/H_2''$. Якщо $G_1'/H_1'\simeq F$, то будемо казати, що відповідний $\mathcal{D}$–клас визначається фактором F.

Тому ідемпотенти e і f будуть $\mathcal{D}$–еквівалентні. За теоремою Гріна (див. [2], теор. 2.20) максимальні підгрупи G_e і G_f ізоморфні. Тому має сенс спочатку розібратися із заключною частиною теореми.

Отже, нехай $e=(G,H,G,H,\varepsilon)$, де ε — тотожний автоморфізм факторгрупи G/H. За наслідком 1 із теореми 1 з [4] $\mathcal{H}$–клас $\mathcal{H}(e)$, який збігається з G_e, містить $|\mathrm{Aut}(G/H)|$ елементів. Тому для доведення заключної частини теореми досить показати, що кожен елемент вигляду $A=(G,H,G,H,\varphi)$, де $\varphi\in Aut(G/H)$, належить G_e. Маємо:

$$(gH,\varphi(gH))\circ(\varphi(gH),gH)=(gH,gH). \tag{2}$$

З іншого боку, якщо $gH \neq g'H$, то $gH \cap g'H = \varnothing$, звідки $\varphi(gH) \cap \varphi(g'H) = \varnothing$ і

$$(gH, \varphi(gH)) \circ (\varphi(g'H), g'H) = \varnothing. \tag{3}$$

Із рівностей 2 і 3 випливає, що для елемента $A^{-1} = (G, H, G, H, \varphi^{-1})$ буде $A \circ A^{-1} = e$. Тому $A \in G_e$.

Нехай тепер $e = (G_1, H_1, G_2, H_2, \varphi)$ — довільний ідемпотент. Із уже доведеного випливає, що

$$|G_e| = |\{(G_1, H_1, G_2, H_2, \varphi\psi) | \psi \in \mathrm{Aut}(G_2/H_2)\}|. \tag{4}$$

З іншого боку, оскільки для елемента $A = (G_1, H_1, G_2, H_2, \varphi\psi)$ та ідемпотента $e = (G_1, H_1, G_2, H_2, \varphi)$ четвірка (G_1, H_1, G_2, H_2) одна і та ж, то за наслідком 1 із теореми 1 з [4] $A \in \mathcal{H}(e)$. Оскільки $\mathcal{H}(e) = G_e$, то разом із 4 це завершує доведення теореми. □

Наслідок 3. *Якщо в напівгрупі відповідностей $S(G)$ ідемпотент e належить $\mathcal{D}$-класу, який визначається фактором F, то $G_e = \mathrm{Aut}\ F$.*

Література

1. *Курош А.Г.* Общая алгебра. Лекции 1969–70 учебного года / А.Г. Курош. — М.: Наука, 1974. — 160 с.
2. *Клиффорд А.* Алгебраическая теория полугрупп / А. Клиффорд, Г. Престон // Том 1. — Изд-во «Мир», Москва, 1972. — 283 с.
3. *Ганюшкін О.Г.* Порядок напівгрупи відповідностей скінченної групи / О.Г. Ганюшкін, Т.В. Турка // Вісник Київського університету, випуск № 3. Серія: фіз.-мат. науки, 2009. — С. 9–13.
4. *Турка Т.* Відношення Гріна на напівгрупі відповідностей скінченної групи / Т. Турка // Вісник Київського університету, випуск № 4. Серія: фіз.-мат. науки, 2010. — С. 38–42.
5. *Рябухо О.М.* Напівгрупа відповідностей скінченної групи / О.М. Рябухо, Т.В. Турка, Л.П. Литвиненко // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ. — 2012. — Випуск 2. — С. 69–72.