

¹ кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»

² студентка 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»

³ вихователь ГПД, Нижньомлинська ЗОШ I-III ступенів

e-mail: kadubovs@ukr.net

ДВОКОЛЬОРОВІ ХОРДОВІ n -ДІАГРАМИ МІНІМАЛЬНОГО РОДУ З $k = 9$ ЦИКЛАМИ ПЕВНОГО КОЛЬОРУ

В роботі розглядається клас планарних двокольорових хордових діаграм з n хордами, що мають точно $k \leq n$ циклів певного кольору. Для $k = 9$ і натуральних $n \geq 9$ встановлено формули підрахунку числа нееквівалентних таких діаграм відносно дії циклічної групи.

Ключові слова: двокольорова хордова діаграма мінімального роду, цикл, циклічна група.

Вступ

Конструкції, схожі до кола з відміченими точками, зокрема хордові діаграми, ефективно використовують в багатьох галузях науки, зокрема математиці, фізиці, біології.

Нагадаємо, що хордовою діаграмою порядку n або, коротко, n -діаграмою називають конфігурацію на площині, що складається з кола, $2n$ точок на ньому (які є вершинами правильного $2n$ -кутника) та n хорд, що сполучають вказані точки. Хордові діаграми називають ізоморфними, якщо одну можна одержати з іншої в результаті повороту. Діаграми називають еквівалентними, якщо їх можна сумістити за допомогою повороту, дзеркального відбиття, або ж їх композиції.

Питаннями переліку певних класів хордових діаграм займалась ціла низка відомих математиків, зокрема автори робіт [1–6]. Задачі про підрахунок числа неізоморфних та нееквівалентних n -діаграм були повністю розв'язані в роботах [4], [5]. Формули для підрахунку числа неізоморфних планарних (роду 0), тороїдальних (роду 1) n -діаграм та $2m$ -діаграм максимального роду t встановлено в [4].

Підрахунок числа неізоморфних, зокрема двокольорових, n -діаграм фіксованого роду є досить складною і в загальному випадку до сьогодні не розв'язаною задачею.

Добре відомо (напр. [11], [12]), що двокольорові хордові O - і N -діаграми знаходять своє застосування в топології, зокрема при топологічній класифікації функцій певного класу на замкнених орієнтовних та відповідно не орієнтовних поверхнях фіксованого роду.

Формули підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних двокольорових O - і N -діаграм відповідно встановлено в роботі [9]. В [10] встановлено формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних O -діаграм, які мають один чорний (або ж білий) цикл. Задача про підрахунок числа неізоморфних O -діаграм максимального роду (з одним чорним та одним білим циклом) повністю розв'язана в [8].

Задачі про підрахунок числа неізоморфних та нееквівалентних планарних O -діаграм (мінімального роду 0) з n хордами повністю розв'язані в роботі [6]. Проте, до сьогодні залишається нерозв'язаною задача про підрахунок числа неізоморфних двокольорових O -діаграм роду 0 з фіксованим числом $1 \leq k \leq n$ циклів певного кольору.

Перші результати, пов'язані з підрахунком числа неізоморфних O -діаграм мінімального роду (з n хордами) для випадків натуральних $1 \leq k \leq 8$ і $n \geq k$ одержано в роботах [11, 12, 13].

В даній роботі для випадку $k = 9$ і натуральних $n \geq 9$ встановлено формули підрахунку числа неізоморфних таких діаграм.

Крім того, більш пильні спостереження за величинами $p(n; k)$ (для натуральних $k \leq 9$ і $n \geq k$), дозволили виявити закономірність та висунути гіпотезу на випадок довільних натуральних $n \geq k \geq 2$.

Основні поняття та попередні відомості

Означення 1. Коло з $2n$ точками на ньому, що є вершинами правильного $2n$ кутника, дуги якого по чергово розфарбовані у два кольори (чорний і білий) та фіксованою нумерацією вершин за годинниковою стрілкою, будемо називати двокольоровим $2n$ -шаблоном – рис. 1 а).

2-кольоровою хордовою n -діаграмою будемо називати n -діаграму, побудовану на основі двокольорового $2n$ -шаблону.

Означення 2. 2-кольорову n -діаграму, яка не містить (містить) хорди, що сполучають вершини з номерами однакової парності, називають O -діаграмою (N -діаграмою) – рис. 1 б), с).

Означення 3. O -діаграму з n хордами, яка не має хорд, що перетинаються, будемо називати діаграмою мінімального роду (роду 0) або ж планарною O -діаграмою – рис. 1 д).

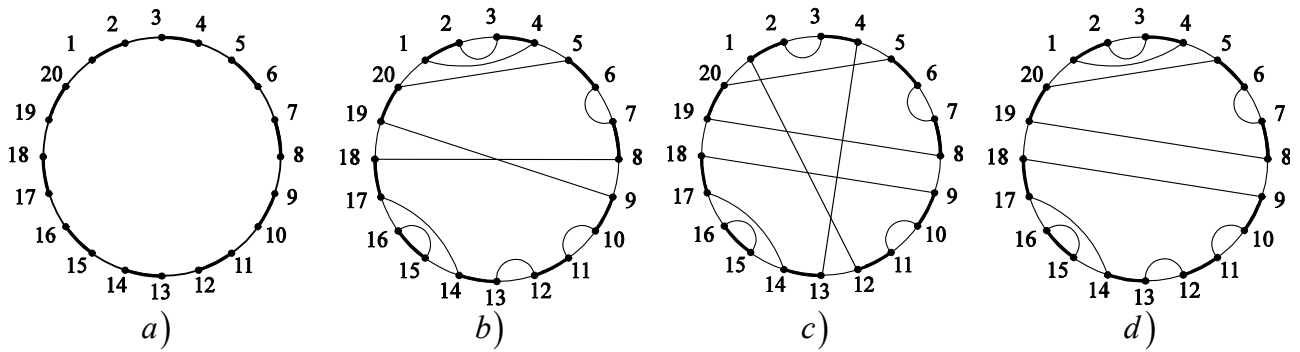


Рис. 1:

- a) двокольоровий 20-шаблон;
- b) N -діаграма (з 10 хордами), яка має 7 білих та 3 чорних циклів;
- c) O -діаграма (з 10 хордами), яка має 6 білих та 3 чорних циклів;
- d) планарна O -діаграма (з 10 хордами), яка має 7 білих та 4 чорних циклів

Означення 4. «Чорним» («білим») циклом 2-кольорової діаграми називатимемо послідовність хорд та чорних (білих) дуг, які утворюють гомеоморфний образ (орієнтованого) кола – рис. 1 b) – d).

Означення 5. Множину планарних O -діаграм з n хордами, які мають точно k ($1 \leq k \leq n$) білих ($n - k + 1$ чорних) циклів позначатимемо $\mathfrak{S}_{k,n}$.

Як з'ясувалось (див. напр. [12]), число діаграм з класу $\mathfrak{S}_{k,n}$ дорівнює числу Нараяна

$$|\mathfrak{S}_{k,n}| = N(n; k) = \frac{1}{n} C_n^k \cdot C_n^{k-1}.$$

Більше того, в [11] показано, що число неізоморфних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{k,n}$ співпадає з числом нееквівалентних (відносно дії циклічної групи порядку n) комбінаторних об'єктів з класу $NC_n(k)$, добре відомих як «non-crossing partition of $[n]$ with k blocks» [6]. Зауважимо також, що з огляду на природну бієкцію між елементами множин $\mathfrak{S}_{k,n}$ та $NC_n(k)$, діаграму з класу $\mathfrak{S}_{k,n}$ та відповідне їй розбиття взагалі доцільно ототожнювати.

Основна частина

Теорема 1. Для довільного натурального $n \geq 9$ число неізоморфних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{9,n}$ можна обчислити за допомогою співвідношень

$$P_{9,n}^* = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} C_n^9 \cdot C_n^8 + \sum_{j|(n;9), j \neq 1} \phi(j) \cdot \frac{n-9+j}{n} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{9}{j}} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{9}{j}-1} + \sum_{j|(n;8), j \neq 1} \phi(j) \cdot \frac{8+j}{n} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{8}{j}+1} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{8}{j}} \right), \tag{1}$$

де $(a; b)$ – найбільший спільний дільник натуральних a і b ; $\phi(q)$ – функція Ейлера; а підсумовування у другому і третьому доданках ведеться за всіма дільниками (за винятком 1-ці) чисел $(n; 9)$ і $(n; 8)$ відповідно.

Доведення. Всі типи діаграм з класу $\mathfrak{S}_{9,n}$, які самосуміщаються при повороті (в напрямку за годинниковою стрілкою) на певний кут $\omega_{i,n} = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$, $i = 1, \dots, n - 1$ наведено на рис. 2, 3.

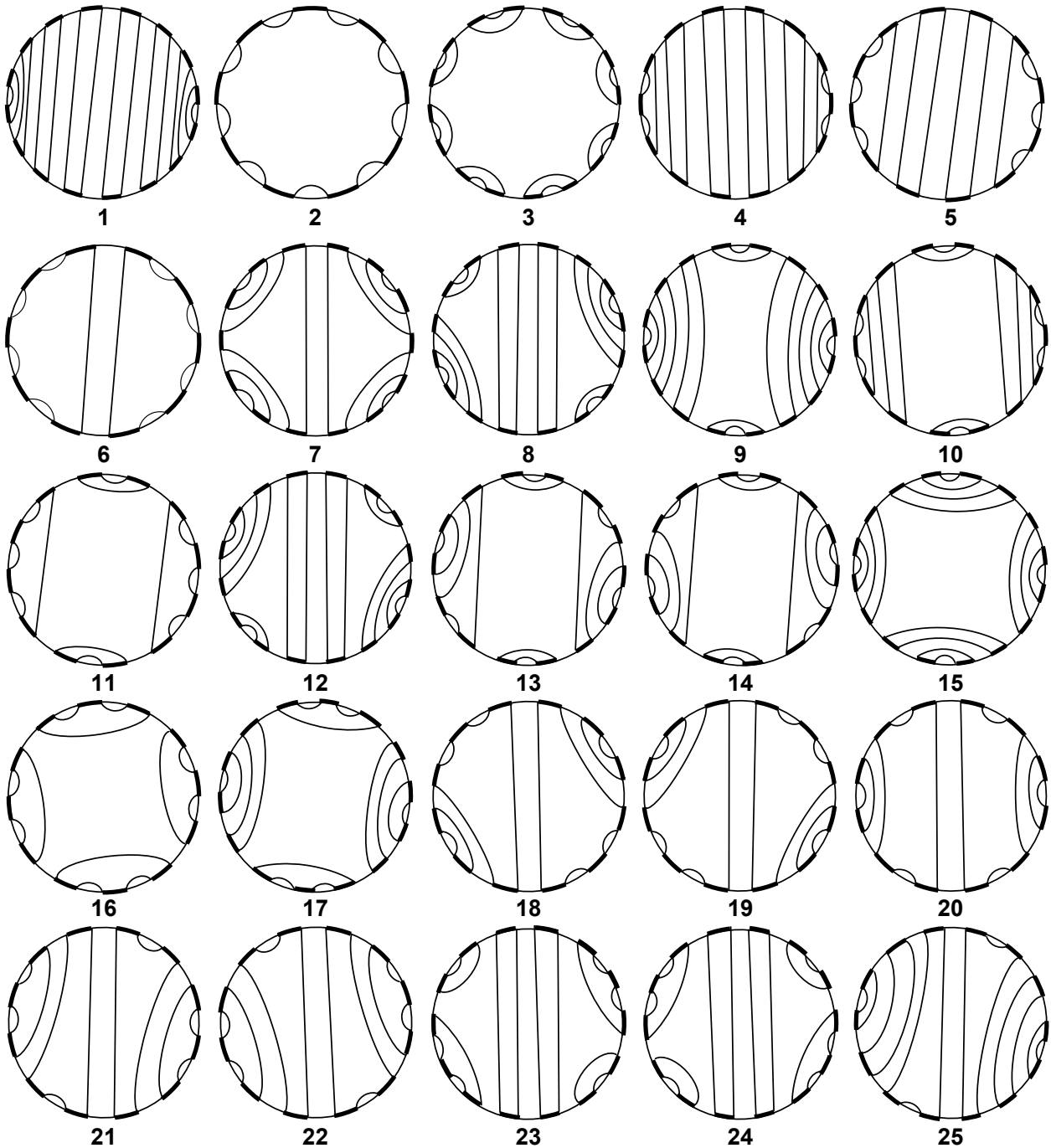


Рис. 2: 25 з 39 можливих типів діаграм з класу $\mathfrak{S}_{9,n}$, які самосуміщаються при повороті на певний кут

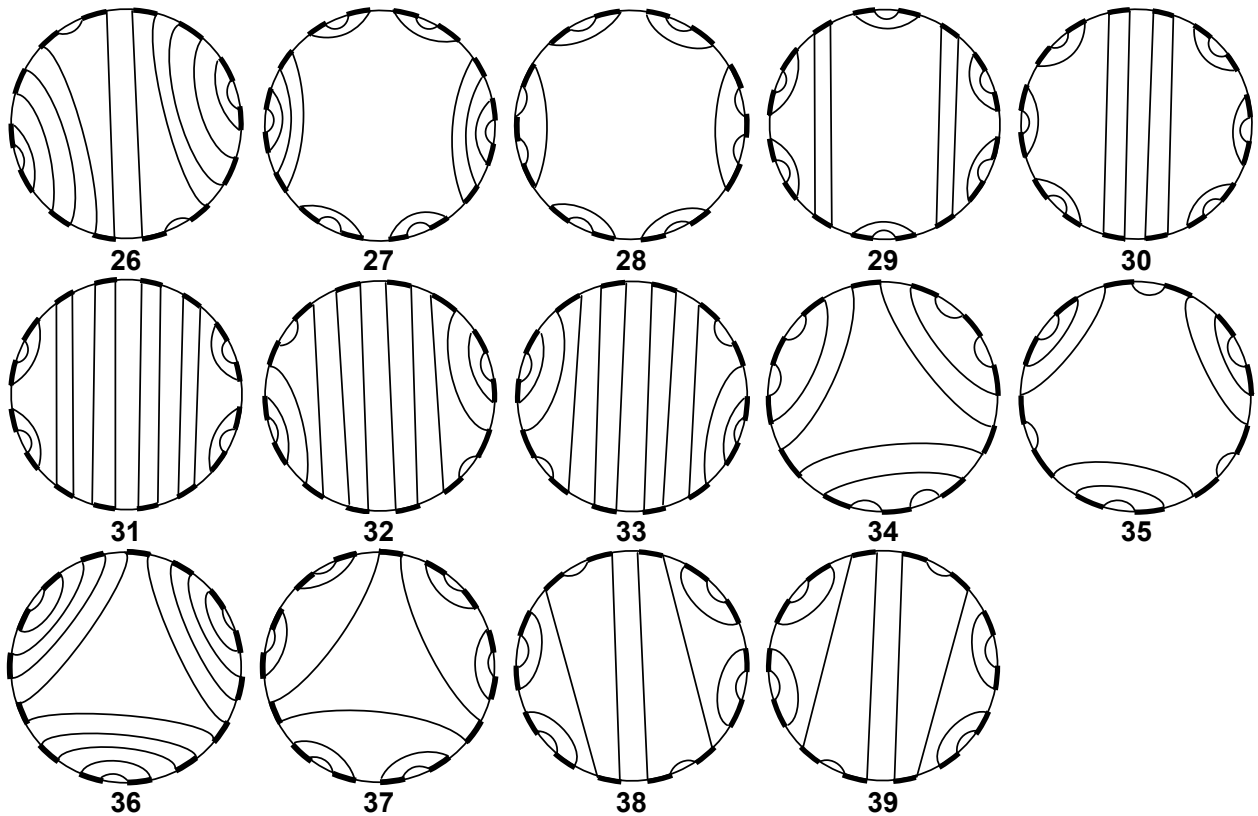


Рис. 3: 14 з 39 можливих типів діаграм з класу $\mathfrak{Z}_{9,n}$, які самосуміщаються при повороті на певний кут

Позначимо через $A_j(n)$ число діаграм j -го типу, а через $A_{j,n}^*$ — число неізоморфних діаграм j -го типу ($j = 1, \dots, 39$). Тоді

$$P_{9,n}^* = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} C_n^9 \cdot C_n^8 - \sum_{j=1}^{39} A_j(n) \right) + \sum_{j=1}^{39} A_{j,n}^* \tag{2}$$

З іншого боку, якщо позначити

$$p(n; 9) = n \cdot \sum_{j=1}^{39} A_{j,n}^* - \sum_{j=1}^{39} A_j(n), \tag{3}$$

то (2) можна подати у вигляді

$$P_{9,n}^* = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} C_n^9 \cdot C_n^8 + p(n; 9) \right). \tag{4}$$

Число неізоморфних діаграм для кожного з 39 зазначених типів обчислимо за лемою Бернсайда.

В подальшому через $a_j(n, i)$ будемо позначати число діаграм j -го типу, які самосуміщаються при повороті на кут $\omega_{i,n} = \frac{2\pi \cdot i}{n}$, $j = 1, \dots, 39$, $i = 1, \dots, n - 1$.

1) Діаграми 1-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$ (при $i = \frac{n}{2}$). Оскільки

$$a_1(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 8C_{\frac{n}{2}}^8, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A_{1,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_1(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_1(n) + 8C_{\frac{n}{2}}^8 \right), & n = 2k \end{cases} \quad (5)$$

2) Діаграми 2-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 3 або на 9, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \frac{2\pi}{3}$ або куту $\omega = \frac{2\pi}{9}$. Оскільки

$$a_2(n, 3) = \begin{cases} 0, & n \neq 3k \\ C_{\frac{n}{3}}^3, & n = 3k, \end{cases} \quad a_2(n, 9) = \begin{cases} 0, & n \neq 9k \\ C_{\frac{n}{9}}^1, & n = 9k, \end{cases} \text{ то}$$

$$A_{2,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_2(n), & n \neq 3k \\ \frac{1}{n} \left(A_2(n) + \phi(3)C_{\frac{n}{3}}^3 \right), & n = 3k \\ \frac{1}{n} \left(A_2(n) + \phi(3)C_{\frac{n}{3}}^3 + \phi(9)C_{\frac{n}{9}}^1 \right), & n = 9k \end{cases} \quad (6)$$

3) Діаграми 3-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, на 4 або на 8, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$ (при $i = \frac{n}{2}$), куту $\omega = \frac{\pi}{2}$ (при $i = \frac{n}{4}$), куту $\omega = \frac{\pi}{4}$ (при $i = \frac{n}{8}$). Оскільки

$$a_3(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 2C_{\frac{n}{2}}^8, & n = 2k, \end{cases} \quad a_3(n, 4) = \begin{cases} 0, & n \neq 4k \\ 2C_{\frac{n}{4}}^4, & n = 4k, \end{cases}$$

$$a_3(n, 8) = \begin{cases} 0, & n \neq 8k \\ 2C_{\frac{n}{8}}^2, & n = 8k, \end{cases} \text{ то}$$

$$A_{3,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_3(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_3(n) + 2C_{\frac{n}{2}}^8 \right), & n = 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_3(n) + 2C_{\frac{n}{2}}^8 + \phi(4)2C_{\frac{n}{4}}^4 \right), & n = 4k \\ \frac{1}{n} \left(A_3(n) + 2C_{\frac{n}{2}}^8 + \phi(4)2C_{\frac{n}{4}}^4 + \phi(8)2C_{\frac{n}{8}}^2 \right), & n = 8k \end{cases} \quad (7)$$

4) Діаграми 4-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$ (при $i = \frac{n}{2}$). Оскільки

$$a_4(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 7C_{\frac{n}{2}}^7, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A_{4,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_4(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_4(n) + 7C_{\frac{n}{2}}^7 \right), & n = 2k \end{cases} \quad (8)$$

5) Діаграми 5-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$ (при $i = \frac{n}{2}$). Оскільки

$$a_5(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 6C_{\frac{n}{2}}^6, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A_{5,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_5(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}(A_5(n) + 6C_{\frac{n}{2}}^6), & n = 2k \end{cases} \quad (9)$$

6) Діаграми 6-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_6(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 5C_{\frac{n}{2}}^5, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A_{6,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_6(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}(A_6(n) + 5C_{\frac{n}{2}}^5), & n = 2k \end{cases} \quad (10)$$

7) Діаграми 7-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_7(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 7C_{\frac{n}{2}}^7, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A_{7,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_7(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}(A_7(n) + 7C_{\frac{n}{2}}^7), & n = 2k \end{cases} \quad (11)$$

8) Діаграми 8-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_8(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 8C_{\frac{n}{2}}^8, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A_{8,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_8(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}(A_8(n) + 8C_{\frac{n}{2}}^8), & n = 2k \end{cases} \quad (12)$$

9) Діаграми 9-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_9(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 8C_{\frac{n}{2}}^8, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A_{9,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_9(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}(A_9(n) + 8C_{\frac{n}{2}}^8), & n = 2k \end{cases} \quad (13)$$

10) Діаграми 10-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{10}(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 7C_{\frac{n}{2}}^7, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A_{10,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{10}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n}(A_{10}(n) + 7C_{\frac{n}{2}}^7), & n = 2k \end{cases} \quad (14)$$

11) Діаграми 11-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{11}(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 6C_{\frac{n}{2}}^6, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A_{11,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{11}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{11}(n) + 6C_{\frac{n}{2}}^6 \right), & n = 2k \end{cases} \quad (15)$$

12) Діаграми 12-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{12}(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 8C_{\frac{n}{2}}^8, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A_{12,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{12}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{12}(n) + 8C_{\frac{n}{2}}^8 \right), & n = 2k \end{cases} \quad (16)$$

13) Діаграми 13-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{13}(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 7C_{\frac{n}{2}}^7, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A_{13,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{13}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{13}(n) + 7C_{\frac{n}{2}}^7 \right), & n = 2k \end{cases} \quad (17)$$

14) Діаграми 14-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{14}(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 7C_{\frac{n}{2}}^7, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A_{14,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{14}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{14}(n) + 7C_{\frac{n}{2}}^7 \right), & n = 2k \end{cases} \quad (18)$$

15) Діаграми 15-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2 або на 4, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$ або кут, кратний куту $\omega = \frac{\pi}{2}$. Оскільки

$$a_{15}(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 4C_{\frac{n}{2}}^8, & n = 2k, \end{cases} \quad a_{15}(n, 4) = \begin{cases} 0, & n \neq 4k \\ 4C_{\frac{n}{4}}^4, & n = 4k, \end{cases} \text{ то}$$

$$A_{15,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{15}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{15}(n) + 4C_{\frac{n}{2}}^8 \right), & n = 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{15}(n) + 4C_{\frac{n}{2}}^8 + \phi(4)4C_{\frac{n}{4}}^4 \right), & n = 4k \end{cases} \quad (19)$$

16) Діаграми 16-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2 або на 4, а поворот здійснюється на

кут, кратний куту $\omega = \pi$ або кут, кратний куту $\omega = \frac{\pi}{2}$. Оскільки

$$a_{16}(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 3C_{\frac{n}{2}}^6, & n = 2k, \end{cases} \quad a_{16}(n, 4) = \begin{cases} 0, & n \neq 4k \\ 3C_{\frac{n}{4}}^3, & n = 4k, \end{cases} \quad \text{то}$$

$$A_{16,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{16}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{16}(n) + 3C_{\frac{n}{2}}^6 \right), & n = 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{16}(n) + 3C_{\frac{n}{2}}^6 + \phi(4)3C_{\frac{n}{4}}^3 \right), & n = 4k \end{cases} \quad (20)$$

17) Діаграми 17-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{17}(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 7C_{\frac{n}{2}}^7, & n = 2k, \end{cases} \quad \text{то } A_{17,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{17}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{17}(n) + 7C_{\frac{n}{2}}^7 \right), & n = 2k \end{cases} \quad (21)$$

18) Діаграми 18-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{18}(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 6C_{\frac{n}{2}}^6, & n = 2k, \end{cases} \quad \text{то } A_{18,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{18}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{18}(n) + 6C_{\frac{n}{2}}^6 \right), & n = 2k \end{cases} \quad (22)$$

19) Діаграми 19-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{19}(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 6C_{\frac{n}{2}}^6, & n = 2k, \end{cases} \quad \text{то } A_{19,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{19}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{19}(n) + 6C_{\frac{n}{2}}^6 \right), & n = 2k \end{cases} \quad (23)$$

20) Діаграми 20-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{20}(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 6C_{\frac{n}{2}}^6, & n = 2k, \end{cases} \quad \text{то } A_{20,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{20}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{20}(n) + 6C_{\frac{n}{2}}^6 \right), & n = 2k \end{cases} \quad (24)$$

21) Діаграми 21-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{21}(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 6C_{\frac{n}{2}}^6, & n = 2k, \end{cases} \quad \text{то } A_{21,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{21}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{21}(n) + 6C_{\frac{n}{2}}^6 \right), & n = 2k \end{cases} \quad (25)$$

22) Діаграми 22-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{22}(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 6C_{\frac{n}{2}}^6, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A_{22,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{22}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{22}(n) + 6C_{\frac{n}{2}}^6 \right), & n = 2k \end{cases} \quad (26)$$

23) Діаграми 23-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{23}(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 7C_{\frac{n}{2}}^7, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A_{23,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{23}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{23}(n) + 7C_{\frac{n}{2}}^7 \right), & n = 2k \end{cases} \quad (27)$$

24) Діаграми 24-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{24}(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 7C_{\frac{n}{2}}^7, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A_{24,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{24}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{24}(n) + 7C_{\frac{n}{2}}^7 \right), & n = 2k \end{cases} \quad (28)$$

25) Діаграми 25-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{25}(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 7C_{\frac{n}{2}}^7, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A_{25,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{25}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{25}(n) + 7C_{\frac{n}{2}}^7 \right), & n = 2k \end{cases} \quad (29)$$

26) Діаграми 26-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{26}(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 7C_{\frac{n}{2}}^7, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A_{26,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{26}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{26}(n) + 7C_{\frac{n}{2}}^7 \right), & n = 2k \end{cases} \quad (30)$$

27) Діаграми 27-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{27}(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 8C_{\frac{n}{2}}^8, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A_{27,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{27}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{27}(n) + 8C_{\frac{n}{2}}^8 \right), & n = 2k \end{cases} \quad (31)$$

28) Діаграми 28-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{28}(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 7C_{\frac{n}{2}}^7, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A_{28,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{28}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{28}(n) + 7C_{\frac{n}{2}}^7 \right), & n = 2k \end{cases} \quad (32)$$

29) Діаграми 29-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{29}(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 8C_{\frac{n}{2}}^8, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A_{29,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{29}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{29}(n) + 8C_{\frac{n}{2}}^8 \right), & n = 2k \end{cases} \quad (33)$$

30) Діаграми 30-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{30}(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 8C_{\frac{n}{2}}^8, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A_{30,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{30}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{30}(n) + 8C_{\frac{n}{2}}^8 \right), & n = 2k \end{cases} \quad (34)$$

31) Діаграми 31-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{31}(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 8C_{\frac{n}{2}}^8, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A_{31,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{31}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{31}(n) + 8C_{\frac{n}{2}}^8 \right), & n = 2k \end{cases} \quad (35)$$

32) Діаграми 32-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{32}(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 7C_{\frac{n}{2}}^7, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A_{32,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{32}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{32}(n) + 7C_{\frac{n}{2}}^7 \right), & n = 2k \end{cases} \quad (36)$$

33) Діаграми 33-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{33}(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 7C_{\frac{n}{2}}^7, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A_{33,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{33}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{33}(n) + 7C_{\frac{n}{2}}^7 \right), & n = 2k \end{cases} \quad (37)$$

34) Діаграми 34-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 3, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \frac{2\pi}{3}$ (при $i = \frac{n}{3}$). Оскільки

$$a_{34}(n, 3) = \begin{cases} 0, & n \neq 3k \\ 4C_{\frac{n}{3}}^4, & n = 3k, \end{cases} \text{ то } A_{34,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{34}(n), & n \neq 3k \\ \frac{1}{n} \left(A_{34}(n) + \phi(3)4C_{\frac{n}{3}}^4 \right), & n = 3k \end{cases} \quad (38)$$

35) Діаграми 35-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 3, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \frac{2\pi}{3}$. Оскільки

$$a_{35}(n, 3) = \begin{cases} 0, & n \neq 3k \\ 4C_{\frac{n}{3}}^4, & n = 3k, \end{cases} \text{ то } A_{35,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{35}(n), & n \neq 3k \\ \frac{1}{n} \left(A_{35}(n) + \phi(3)4C_{\frac{n}{3}}^4 \right), & n = 3k \end{cases} \quad (39)$$

36) Діаграми 36-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 3, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \frac{2\pi}{3}$. Оскільки

$$a_{36}(n, 3) = \begin{cases} 0, & n \neq 3k \\ 5C_{\frac{n}{3}}^5, & n = 3k, \end{cases} \text{ то } A_{36,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{36}(n), & n \neq 3k \\ \frac{1}{n} \left(A_{36}(n) + \phi(3)5C_{\frac{n}{3}}^5 \right), & n = 3k \end{cases} \quad (40)$$

37) Діаграми 37-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 3, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \frac{2\pi}{3}$. Оскільки

$$a_{37}(n, 3) = \begin{cases} 0, & n \neq 3k \\ 5C_{\frac{n}{3}}^5, & n = 3k, \end{cases} \text{ то } A_{37,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{37}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{37}(n) + \phi(3)5C_{\frac{n}{3}}^5 \right), & n = 3k \end{cases} \quad (41)$$

38) Діаграми 38-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$ (при $i = \frac{n}{2}$). Оскільки

$$a_{38}(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 7C_{\frac{n}{2}}^7, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A_{38,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{38}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{38}(n) + 7C_{\frac{n}{2}}^7 \right), & n = 2k \end{cases} \quad (42)$$

39) Діаграми 39-го типу самосуміщаються при повороті на певний кут $\omega_{i,n}$ лише за умов, коли n ділиться на 2, а поворот здійснюється на кут, кратний куту $\omega = \pi$. Оскільки

$$a_{39}(n, 2) = \begin{cases} 0, & n \neq 2k \\ 7C_{\frac{n}{2}}^7, & n = 2k, \end{cases} \text{ то } A_{39,n}^* = \begin{cases} \frac{1}{n}A_{39}(n), & n \neq 2k \\ \frac{1}{n} \left(A_{39}(n) + 7C_{\frac{n}{2}}^7 \right), & n = 2k \end{cases} \quad (43)$$

З урахуванням співвідношень (5) – (43) маємо справедливість співвідношення (44).

$$\begin{aligned}
 & p(n; 9) = \\
 & \left\{ \begin{array}{ll}
 0, & n \neq 2k \neq 3p \\
 5C_{\frac{n}{2}}^5 + 45C_{\frac{n}{2}}^6 + 105C_{\frac{n}{2}}^7 + 70C_{\frac{n}{2}}^8, & n = 2k \neq 3p \\
 \phi(3)(C_{\frac{n}{3}}^3 + 8C_{\frac{n}{3}}^4 + 10C_{\frac{n}{3}}^5), & n = 3k \neq 2p \\
 5C_{\frac{n}{2}}^5 + 45C_{\frac{n}{2}}^6 + 105C_{\frac{n}{2}}^7 + 70C_{\frac{n}{2}}^8 + \phi(4)(6C_{\frac{n}{4}}^4 + 3C_{\frac{n}{4}}^3), & n = 4k \neq 3p \\
 5C_{\frac{n}{2}}^5 + 45C_{\frac{n}{2}}^6 + 105C_{\frac{n}{2}}^7 + 70C_{\frac{n}{2}}^8 + \\
 \quad + \phi(3)(C_{\frac{n}{3}}^3 + 8C_{\frac{n}{3}}^4 + 10C_{\frac{n}{3}}^5), & n = 6k \\
 5C_{\frac{n}{2}}^5 + 45C_{\frac{n}{2}}^6 + 105C_{\frac{n}{2}}^7 + 70C_{\frac{n}{2}}^8 + \\
 \quad + \phi(4)(6C_{\frac{n}{4}}^4 + 3C_{\frac{n}{4}}^3) + \phi(8)2C_{\frac{n}{8}}^2, & n = 8k \neq 3p \\
 \phi(3)(C_{\frac{n}{3}}^3 + 8C_{\frac{n}{3}}^4 + 10C_{\frac{n}{3}}^5) + \phi(9)C_{\frac{n}{9}}^1, & n = 9k \neq 2p \\
 5C_{\frac{n}{2}}^5 + 45C_{\frac{n}{2}}^6 + 105C_{\frac{n}{2}}^7 + 70C_{\frac{n}{2}}^8 + \\
 \quad + \phi(3)(C_{\frac{n}{3}}^3 + 8C_{\frac{n}{3}}^4 + 10C_{\frac{n}{3}}^5) + \phi(4)(6C_{\frac{n}{4}}^4 + 3C_{\frac{n}{4}}^3), & n = 12k \\
 5C_{\frac{n}{2}}^5 + 45C_{\frac{n}{2}}^6 + 105C_{\frac{n}{2}}^7 + 70C_{\frac{n}{2}}^8 + \\
 \quad + \phi(3)(C_{\frac{n}{3}}^3 + 8C_{\frac{n}{3}}^4 + 10C_{\frac{n}{3}}^5) + \phi(9)C_{\frac{n}{9}}^1, & n = 18k \\
 5C_{\frac{n}{2}}^5 + 45C_{\frac{n}{2}}^6 + 105C_{\frac{n}{2}}^7 + 70C_{\frac{n}{2}}^8 + \\
 \quad + \phi(3)C_{\frac{n}{3}}^3 + \phi(4)(6C_{\frac{n}{4}}^4 + 3C_{\frac{n}{4}}^3) + \phi(8)2C_{\frac{n}{8}}^2, & n = 24k \\
 5C_{\frac{n}{2}}^5 + 45C_{\frac{n}{2}}^6 + 105C_{\frac{n}{2}}^7 + 70C_{\frac{n}{2}}^8 + \phi(4)(6C_{\frac{n}{4}}^4 + 3C_{\frac{n}{4}}^3) + \\
 \quad + \phi(3)(C_{\frac{n}{3}}^3 + 8C_{\frac{n}{3}}^4 + 10C_{\frac{n}{3}}^5) + \phi(9)C_{\frac{n}{9}}^1, & n = 36k \\
 5C_{\frac{n}{2}}^5 + 45C_{\frac{n}{2}}^6 + 105C_{\frac{n}{2}}^7 + 70C_{\frac{n}{2}}^8 + \phi(4)(6C_{\frac{n}{4}}^4 + 3C_{\frac{n}{4}}^3) + \\
 \quad + \phi(3)(C_{\frac{n}{3}}^3 + 8C_{\frac{n}{3}}^4 + 10C_{\frac{n}{3}}^5) + \phi(8)2C_{\frac{n}{8}}^2 + \phi(9)C_{\frac{n}{9}}^1, & n = 72k
 \end{array} \right.
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

За допомогою безпосередньої перевірки не важко встановити справедливість наступних тотожностей

$$\begin{aligned}
 C_{\frac{n}{9}}^1 &= \frac{n-9+9}{n} \cdot C_{\frac{n}{9}}^9 \cdot C_{\frac{n}{9}}^{\frac{9}{9}-1}, & k = 9, j|(n; 9), j = 9 \\
 C_{\frac{n}{3}}^3 + 8C_{\frac{n}{3}}^4 + 10C_{\frac{n}{3}}^5 &= \frac{n-9+3}{n} \cdot C_{\frac{n}{3}}^9 \cdot C_{\frac{n}{3}}^{\frac{9}{3}-1}, & k = 9, j|(n; 9), j = 3 \\
 2C_{\frac{n}{8}}^2 &= \frac{9-1+8}{n} \cdot C_{\frac{n}{8}}^{\frac{9-1}{8}+1} \cdot C_{\frac{n}{8}}^{\frac{9-1}{8}}, & k = 9, j|(n; 8), j = 8 \\
 6C_{\frac{n}{4}}^4 + 3C_{\frac{n}{4}}^3 &= \frac{9-1+4}{n} \cdot C_{\frac{n}{4}}^{\frac{9-1}{4}+1} \cdot C_{\frac{n}{4}}^{\frac{9-1}{4}}, & k = 9, j|(n; 8), j = 4 \\
 5C_{\frac{n}{2}}^5 + 45C_{\frac{n}{2}}^6 + 105C_{\frac{n}{2}}^7 + 70C_{\frac{n}{2}}^8 &= \frac{9-1+2}{n} \cdot C_{\frac{n}{2}}^{\frac{9-1}{2}+1} \cdot C_{\frac{n}{2}}^{\frac{9-1}{2}}, & k = 9, j|(n; 8), j = 2
 \end{aligned}
 \tag{45}$$

З урахуванням співвідношень (4), (44), (45) має місце формула (1).

З урахуванням результатів, одержаних в роботах [11] – [13] (для випадків $k = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$) та справедливості наступних рівностей

$$\begin{aligned}
 C_{\frac{n}{8}}^1 &= \frac{n-8+8}{n} \cdot C_{\frac{n}{8}}^8 \cdot C_{\frac{n}{8}}^{8-1}, & k = 8, j|(n; 8), j = 8 \\
 C_{\frac{n}{4}}^2 + 3C_{\frac{n}{4}}^3 &= \frac{n-8+4}{n} \cdot C_{\frac{n}{4}}^4 \cdot C_{\frac{n}{4}}^{4-1}, & k = 8, j|(n; 8), j = 4 \\
 C_{\frac{n}{2}}^4 + 15C_{\frac{n}{2}}^5 + 45C_{\frac{n}{2}}^6 + 35C_{\frac{n}{2}}^7 &= \frac{n-8+2}{n} \cdot C_{\frac{n}{2}}^2 \cdot C_{\frac{n}{2}}^{2-1}, & k = 8, j|(n; 8), j = 2 \\
 2C_{\frac{n}{7}}^2 &= \frac{8-1+7}{n} \cdot C_{\frac{n}{7}}^{8-1+1} \cdot C_{\frac{n}{7}}^{\frac{8-1}{7}}, & k = 8, j|(n; 7), j = 7
 \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
 C_{\frac{n}{7}}^1 &= \frac{n-7+7}{n} \cdot C_{\frac{n}{7}}^7 \cdot C_{\frac{n}{7}}^{7-1}, & k = 7, j|(n; 7), j = 7 \\
 2C_{\frac{n}{6}}^2 &= \frac{7-1+6}{n} \cdot C_{\frac{n}{6}}^{\frac{7-1}{6}+1} \cdot C_{\frac{n}{6}}^{\frac{7-1}{6}}, & k = 7, j|(n; 6), j = 6 \\
 3C_{\frac{n}{3}}^3 + 6C_{\frac{n}{3}}^4 &= \frac{7-1+3}{n} \cdot C_{\frac{n}{3}}^{\frac{7-1}{3}+1} \cdot C_{\frac{n}{3}}^{\frac{7-1}{3}}, & k = 7, j|(n; 6), j = 3 \\
 4C_{\frac{n}{2}}^4 + 20C_{\frac{n}{2}}^5 + 20C_{\frac{n}{2}}^6 &= \frac{7-1+2}{n} \cdot C_{\frac{n}{6}}^{\frac{7-1}{2}+1} \cdot C_{\frac{n}{6}}^{\frac{7-1}{6}}, & k = 7, j|(n; 6), j = 2
 \end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}
 C_{\frac{n}{6}}^1 &= \frac{n-6+6}{n} \cdot C_{\frac{n}{6}}^6 \cdot C_{\frac{n}{6}}^{6-1}, & k = 6, j|(n; 6), j = 6 \\
 C_{\frac{n}{3}}^2 + 3C_{\frac{n}{3}}^3 &= \frac{n-6+3}{n} \cdot C_{\frac{n}{3}}^{\frac{6}{3}} \cdot C_{\frac{n}{3}}^{\frac{6}{3}-1}, & k = 6, j|(n; 6), j = 3 \\
 C_{\frac{n}{2}}^3 + 8C_{\frac{n}{2}}^4 + 10C_{\frac{n}{2}}^5 &= \frac{n-6+2}{n} \cdot C_{\frac{n}{6}}^{\frac{6}{2}} \cdot C_{\frac{n}{6}}^{\frac{6}{2}-1}, & k = 6, j|(n; 6), j = 2 \\
 2C_{\frac{n}{5}}^2 &= \frac{6-1+5}{n} \cdot C_{\frac{n}{5}}^{\frac{6-1}{5}+1} \cdot C_{\frac{n}{5}}^{\frac{6-1}{5}}, & k = 6, j|(n; 5), j = 5
 \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
 C_{\frac{n}{5}}^1 &= \frac{n-5+5}{n} \cdot C_{\frac{n}{5}}^5 \cdot C_{\frac{n}{5}}^{5-1}, & k = 5, j|(n; 5), j = 5 \\
 2C_{\frac{n}{2}}^4 &= \frac{5-1+4}{n} \cdot C_{\frac{n}{4}}^{\frac{5-1}{4}+1} \cdot C_{\frac{n}{4}}^{\frac{5-1}{4}}, & k = 5, j|(n; 4), j = 4 \\
 3C_{\frac{n}{2}}^3 + 6C_{\frac{n}{2}}^4 &= \frac{5-1+2}{n} \cdot C_{\frac{n}{4}}^{\frac{5-1}{2}+1} \cdot C_{\frac{n}{4}}^{\frac{5-1}{4}}, & k = 5, j|(n; 4), j = 2
 \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
 C_{\frac{n}{4}}^1 &= \frac{n-4+4}{n} \cdot C_{\frac{n}{4}}^4 \cdot C_{\frac{n}{4}}^{4-1}, & k = 4, j|(n; 4), j = 4 \\
 C_{\frac{n}{2}}^2 + 3C_{\frac{n}{2}}^3 &= \frac{n-4+2}{n} \cdot C_{\frac{n}{2}}^{\frac{4}{2}} \cdot C_{\frac{n}{2}}^{\frac{4}{2}-1}, & k = 4, j|(n; 4), j = 2 \\
 2C_{\frac{n}{3}}^2 &= \frac{4-1+3}{n} \cdot C_{\frac{n}{3}}^{\frac{4-1}{3}+1} \cdot C_{\frac{n}{3}}^{\frac{4-1}{3}}, & k = 4, j|(n; 3), j = 3
 \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}
 C_{\frac{n}{3}}^1 &= \frac{n-3+3}{n} \cdot C_{\frac{n}{3}}^3 \cdot C_{\frac{n}{3}}^{3-1}, & k = 3, j|(n; 3), j = 3 \\
 2C_{\frac{n}{2}}^2 &= \frac{3-1+2}{n} \cdot C_{\frac{n}{2}}^{\frac{3-1}{2}+1} \cdot C_{\frac{n}{2}}^{\frac{3-1}{2}}, & k = 3, j|(n; 2), j = 2
 \end{aligned} \tag{51}$$

$$C_{\frac{n}{2}}^1 = \frac{n-2+2}{n} \cdot C_{\frac{n}{2}}^{\frac{2}{2}} \cdot C_{\frac{n}{2}}^{\frac{2}{2}-1}, \quad k = 2, j|(n; 2), j = 2 \tag{52}$$

справедливим є твердження

Теорема 2. Для натуральних $1 < k \leq 9$ і $n \geq k$ число неізоморфних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{k,n}$ можна обчислити за допомогою співвідношень

$$P_{k,n}^* = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} C_n^k \cdot C_n^{k-1} + \sum_{j|(n;k), j \neq 1} \phi(j) \cdot \frac{n-k+j}{n} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j}} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j}-1} + \sum_{j|(n;k-1), j \neq 1} \phi(j) \cdot \frac{k-1+j}{n} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k-1}{j}+1} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k-1}{j}} \right), \tag{53}$$

де $(a; b)$ – найбільший спільний дільник натуральних a і b ; $\phi(q)$ – функція Ейлера (кількість натуральних чисел, які менші за q та є взаємнопрости-ми з q) а підсумовування у другому і третьому доданках ведеться за всіма дільниками (за винятком 1-ці) чисел $(n; k)$ і $(n; k - 1)$ відповідно.

Таким чином є всі підстави висунути гіпотезу стосовно узагальненої формули підрахунку числа неізоморфних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{k,n}$. А саме

Теорема 3. (Гіпотеза на випадок натуральних $n \geq k \geq 2$)

Для натуральних $n \geq k \geq 2$ число неізоморфних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{k,n}$ можна обчислити за допомогою співвідношень

$$P_{n,k}^* = \frac{1}{n} \left(N(n; k) + \sum_{j|(n,k), j \neq 1} \phi(j) \cdot \left(\frac{n-k}{j} + 1 \right) \cdot N \left(\frac{n}{j}; \frac{n-k}{j} + 1 \right) + \sum_{j|(n,k-1), j \neq 1} \phi(j) \cdot \left(\frac{k-1}{j} + 1 \right) \cdot N \left(\frac{n}{j}; \frac{k-1}{j} + 1 \right) \right), \tag{54}$$

де $N(p; q)$ – числа Нараяна, що визначаються за формулою

$$N(p; q) = \frac{1}{p} C_p^q C_p^{q-1}. \tag{55}$$

Висновки

З урахуванням співпадіння початкових значень величини $P_{n,k}^*$ (при $11 \geq n \geq k > 1$) з членами відповідної послідовності A209805 [7], одержаних автором виключно програмним шляхом, висунута нами гіпотеза є доволі небезпідставно.

На нашу думку, цілком досяжним здається одержання й строгого доведення висунутої гіпотези (для загального випадку $n \geq k \geq 2$).

Література

1. *Walsh T.R.S.* Counting rooted maps by genus I, II / T.R.S. Walsh, A.B. Lehman // Journal of Combinatorial Theory, Series B. — 1972. — Vol. 13, №2,3. — P. 192–218, 122–141.
2. *Riordan J.* The distribution of crossings of chords joining pairs of $2n$ points on a circle / J. Riordan // Mathematics of Computation. — 1975. — Vol. 29, № 129. — P. 215–222.
3. *Harer J.* The Euler characteristic of the moduli space of curves / J. Harer, D. Zagier // Inventiones mathematical. — 1986. — Vol. 85. — P. 457–485.
4. *Cori R.* Counting non-isomorphic chord diagrams / R. Cori, M. Marcus // Theoretical Computer Science. — 1998. — Vol. 204. — P. 55–73.
5. *Stoimenow A.* On the number of chord diagrams / A. Stoimenov // Discrete Mathematics. — 2000. — Vol. 218, №1–3. — P. 209–233.
6. *Callan D., Smiley L.* Non-crossing Partitions under Rotation and Reflection, 2005, publ. electronically at <http://arXiv.org/abs/math/0510447v3>
7. The OEIS Foundation Inc., «The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences», published electronically at <http://oeis.org>.
8. Кадубовський О. Про один клас хордових діаграм максимального роду / О. Кадубовський // Вісник Київського університету Серія: фізико-математичні науки. — 2006. — Вип. 1. — С. 17–27.
9. *Кадубовський О.А.* Двокольорові O - і N -діаграми / О.А. Кадубовський, О.В. Сторожилова, Н.В. Сторожилова // Пошуки і знахідки. СЕРІЯ: фізико-математичні науки. — 2010. — Том I, Вип. 10. — С. 41–50.
10. *Кадубовський О.А.* Двокольорові N -діаграми з одним чорним циклом / О.А. Кадубовський, Ю.С. Саприкіна, С.Ю. Мазур // Пошуки і знахідки. СЕРІЯ: фізико-математичні науки. — 2010. — Том I, Вип. 10. — С. 51–60.
11. *Кадубовський О.* Про число топологічно нееквівалентних функцій з однією виродженою критичною точкою типу сідла на двовимірній сфері / О. Кадубовський // Геометрія та топологія функцій: Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2010. — Т. 7, № 4. — С. 87–107.
12. *Кадубовський О.А.* Про один клас гладких функцій на двовимірній сфері / О.А. Кадубовський // Вісник СДПУ. Математика. — 2010. — Вип. 1(4). — С. 39–57.
13. *Кадубовський О.А.* Двокольорові хордові діаграми мінімального роду / О.А. Кадубовський, Ю.В. Гладищук // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ. — 2011. — Випуск 1. — С. 49–60.