

<sup>1</sup> кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»

<sup>2</sup> студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»

e-mail: kadubovs@ukr.net, anastasiya.aldos@mail.ru

## ПРО ЗМІСТОВЕ НАПОВНЕННЯ ТЕМИ «ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ» ЗАДАЧАМИ КЛАСИФІКАЦІЙНОГО ХАРАКТЕРУ

Висвітлюється авторський досвід впровадження дослідницьких задач на прикладі вивчення «Теорії прямих і площин у просторі» шляхом змістового її наповнення задачами класифікаційного характеру. В якості таких задач в роботі вперше наведена класифікація прямих простору за ознакою взаємного розташування відносно координатних осей і площин декартової системи координат.

**Ключові слова:** науково-дослідницька діяльність, задачі класифікаційного характеру, класифікація прямих простору.

### Вступ

**Постановка проблеми.** Загально визнано, що всебічний розвиток майбутніх вчителів ЗОШ та викладачів ВНЗ, зокрема формування професійних компетентностей, є одними з головних завдань, які сьогодні стоять перед вітчизняними педагогічними ВНЗ. Тому відповідними програмами підготовки фахівців передбачається формування універсальних знань, умінь і навичок, які будуть необхідними для адаптації випускників педагогічних ВНЗ до нових суспільних умов та повноцінної їх самореалізації.

На превеликий жаль, результати діагностик рівня залишкових знань (за результатами ККР) свідчать про те, що значна частина студентів, зокрема математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ, мають труднощі з виконанням саме творчих завдань та розв'язанням нетипових і дослідницьких задач.

Одна з причин, на думку А.І. Савенкова, полягає у тому, що «... традиційне навчання у вишах будується не так на методах самостійного, творчого і дослідницького пошуку, як на репродуктивній діяльності, спрямованій на засвоєння готових, раніше добутих істин. І саме тому навчання студентів втрачає головну рису дослідницької поведінки — пошукової активності. Як результат — втрата допитливості, здібності самостійно мислити, що практично унеможливорює процеси самонавчання, самовиховання, а отже, і саморозвитку.» [11]

Незважаючи на тривалий і поширений досвід викладання **аналітичної геометрії** у ВНЗ та «елементів аналітичної геометрії» і «методу координат» в ЗОШ, слід також визнати, що на сьогодні ще залишається ряд актуальних проблем (зокрема й зазначена «традиційність у навчанні»), пов'язаних із навчанням та викладанням цього розділу математики.

Однією з таких проблем, яка особливо гостро постала останнім часом, є значне зменшення тижневого аудиторного навантаження студентів. У зв'язку з цим — зменшення аудиторних годин, що відводяться навчальними планами на лекційні та практичні заняття. І як наслідок — «аудиторне озброєння» теоретичним «мінімумом» та навичками розв'язання переважно типових задач. Таким чином, викладач вимушений «передавати» досвід з розв'язування дослідницьких задач у позааудиторний час. Такий вид роботи, як правило, реалізується під час індивідуальних консультацій, пов'язаних із виконанням (в ідеалі — захистом) індивідуальних довгострокових завдань, які крім типових задач передбачають і задачі дослідницького характеру. Проте, як свідчить досвід, наявність розв'язків необхідної кількості задач стає самоціллю і далеко не завжди на користь дослідницьких задач.

Але ж «дослідницькі задачі корисні тим, що не містять алгоритмічних підходів і завжди потребують пошуку нових ідей, які стимулюють пізнавальні інтереси студентів, формують навички проведення аналізу, систематизації, висунення гіпотез, допомагають оволодіти дедуктивним методом, активізують самостійну пошукову діяльність.» [12]

Таким чином, проблема вибору методів навчання у контексті розвитку дослідницької компетентності при вивченні геометрії є як ніколи актуальною.

Спробі вирішення (принаймні частково) зазначеної проблеми й присвячена дана стаття, в якій висвітлюється досвід впровадження дослідницьких задач на прикладі вивчення теми «Взаємне розташування прямих і площин у просторі».

Аналіз актуальних досліджень, присвячених *різним аспектам організації науково-дослідної діяльності студентів; проблемам формування дослідницьких умінь студентів; співробітництву викладачів і студентів у наукових дослідженнях*, достатньо повно висвітлений в [13].

Особливу нашу увагу привернула до себе монографія [5], в якій висвітлено теоретико-методологічні засади узагальнення та систематизації знань студентів з аналітичної геометрії.

Більш детально зупинимося на аналізі *дидактичного забезпечення теми*. Традиційно, вивчення та виклад тем «Пряма у просторі», «Взаємне розташування прямих у просторі» та «Взаємне розташування прямих і площин

у просторі» супроводжується розглядом частинних випадків розташування прямої відносно фіксованої декартової системи координат (ДСК).

Якісний та кількісний аналіз теоретичного і дидактичного матеріалу, який міститься в більшості розповсюджених та рекомендованих підручниках і збірниках задач, дозволяє констатувати наступне:

1) Задачі, які відносяться до суттєво різних положень прямої у просторі (за ознакою взаємного розташування відносно координатних осей і площин ДСК), здебільшого, вичерпуються розглядом лише тих випадків, коли пряма є паралельною (співпадає) до певної координатної осі або ж є паралельною (належить) до певної координатної площини [1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10].

2) Прямим загального положення майже не приділяється увага. Винятком, частково позбавленим зазначеної вади, є наприклад збірники [2, 7, 8, 14], в яких у загальному вигляді пропонуються й задачі на дослідження критеріїв взаємного розташування прямих і площин простору.

3) Загалом, в тому чи іншому вигляді, зустрічаються щонайбільше 85 із 133 суттєво різних (у зазначеному вище контексті) типів прямих. Проте сам факт типізації прямих, як правило, затушовується.

Класифікація прямих простору за вказаною ознакою в явному вигляді до сьогодні залишалась не висвітленим питанням навіть в теоретичному аспекті.

Отже, **метою** статті є висвітлення авторського досвіду щодо впровадження дослідницьких задач на прикладі вивчення теми «Пряма і площина у просторі» шляхом змістовного її наповнення класифікацією прямих за ознакою взаємного розташування відносно координатних осей і площин ДСК.

### Основна частина

Перш ніж викласти суть класифікації прямих простору за ознакою взаємного розташування відносно координатних осей і площин ДСК наведемо загальні рекомендації стосовно впровадження відповідних типів прямих під час вивчення тем «Взаємне розташування прямих у просторі» та «Взаємне розташування прямих і площин у просторі», які відносяться до обов'язкового змістового модуля «Теорія прямих і площин у просторі»:

1. З основними класами прямих (їх всього 7) пропонованої класифікації студентів необхідно ознайомити вже на перших заняттях теми (можливо навіть під час лекційного заняття). Ознайомлення з певними із суттєво різних типів прямих пропонованої класифікації (надалі – типи прямих) також може відбуватись з перших практичних занять, присвячених вивченню зазначених тем. Різноманіття тематичних задач повинно досягатися не за рахунок розгляду аналогічних задач з різними числовими даними або ж різних способів задання прямих і площин, а за рахунок розгляду відповідних типів прямих.

2. Безпосереднє ознайомлення з певним типом прямих доцільно розпочинати із задач на побудову прямої, заданої канонічним рівнянням із числовими даними; а вже потім запропонувати виявити залежності або закономірності у розташуванні однотипових прямих.

3. Далі необхідно розглянути типові задачі про особливості розташування прямих (заданих канонічними рівнянням з числовими даними): з'ясування питань щодо їх співпадіння, паралельності, перетину або ж мимобіжності. Після чого, в якості частинних випадків, слід розглянути випадки, коли однією із таких прямих є координатна вісь.

Потім для прямої  $l : \frac{x-x_0}{l_1} = \frac{y-y_0}{l_2} = \frac{z-z_0}{l_3}$  (заданої канонічним рівнянням в загальному вигляді) встановити відповідні (необхідні та/або достатні) умови її співпадіння, паралельності, перетину або ж мимобіжності з координатною віссю  $OX$  ( $OY, OZ$ ). Так, наприклад, необхідними і достатніми умовами співпадіння прямої  $l$  з віссю  $OX$  (яка «є представником» типу прямих  $a_{1,1}$ ) є наступні

$$l \equiv OX \cong a_{1,1} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in R, & y_0 = z_0 = 0 \\ l_1 \neq 0, & l_2 = l_3 = 0. \end{cases}$$

Здібним студентам слід запропонувати отримання відповідних аналітичних умов для решти типів таких прямих у вигляді індивідуальних завдань.

4. Деталізовану класифікацію прямих (з усіма 133 суттєво різними типами) доцільно навести на останньому практичному занятті, присвяченому систематизації, узагальненню та конкретизації набутих знань.

5. Коло задач на встановлення критеріїв приналежності прямої (заданої канонічним рівнянням в загальному вигляді) до певного типу прямих можна значно розширити, за рахунок отримання аналогічних критеріїв на випадок прямої, заданої як перетин площин (заданих загальними рівняннями).

6. Наведену класифікацію прямих доцільно доповнити (або ж принаймні запропонувати на самостійне опрацювання) аналогічною класифікацією площин простору (за такою ж самою ознакою).

7. Найбільш здібним студентам можна запропонувати й одержання відповідних аналітичних умов для кожного із суттєво різних типів площин.

Класифікація прямих простору за ознакою взаємного розташування відносно координатних осей і площин ДСК

Пропонована нижче класифікація представлена за допомогою наочної схеми 1 з подальшою деталізацією в термінах введених позначень.

### I. $P$ – множина прямих, паралельних до координатних площин

1.1)  $A$  – клас прямих, паралельних до координатних осей:  $A_1, A_2, A_3$  – підкласи прямих, що є паралельними до координатних осей  $OX, OY$  і  $OZ$  відповідно;

1.2)  $B$  – клас прямих, що перетинають дві піввісі різних координатних осей:  $B_1, B_2, B_3$  – підкласи прямих, що перетинають піввісі осей  $OY$  і  $OZ$ , піввісі осей  $OZ$  і  $OX$  та піввісі осей  $OX$  і  $OY$  відповідно;

1.3)  $C$  – клас прямих, що паралельні одній з координатних площин, не є паралельними до відповідних координатних осей та не перетинають третю вісь:  $C_1, C_2, C_3$  – підкласи прямих, що є паралельними до площин  $YOZ$ ,  $ZOX$  та  $XOY$  відповідно;

1.4)  $D$  – клас прямих, що перетинають координатну піввісь (початок координат), є паралельними (належать) відповідній площині та не є паралельними до жодної з двох інших координатних осей:  $D_1, D_2, D_3$  – підкласи прямих, що перетинають осі  $OX$ ,  $OY$  і  $OZ$  відповідно.

**II.  $Q$  – множина прямих, що не є паралельними до жодної з координатних площин**

2.1)  $E$  – клас прямих, що проходять через початок координат, не співпадають з жодною із координатних осей та не належать жодній з координатних площин;

2.2)  $F$  – клас прямих, що перетинають координатну піввісь та є мимобіжними до двох інших координатних осей:  $F_1, F_2, F_3$  – підкласи прямих, що перетинають піввісь осей  $OX$ ,  $OY$  і  $OZ$  відповідно;

2.3)  $G$  – клас прямих, що не є паралельними до жодної з координатних площин та не проходять через початок координат:  $G_1, G_2, G_3, G_4$  – підкласи прямих, що перетинають чверть площини  $X_+OY_+$ ,  $Y_+OX_-$ ,  $X_-OY_-$  і  $Y_-OX_+$  відповідно.

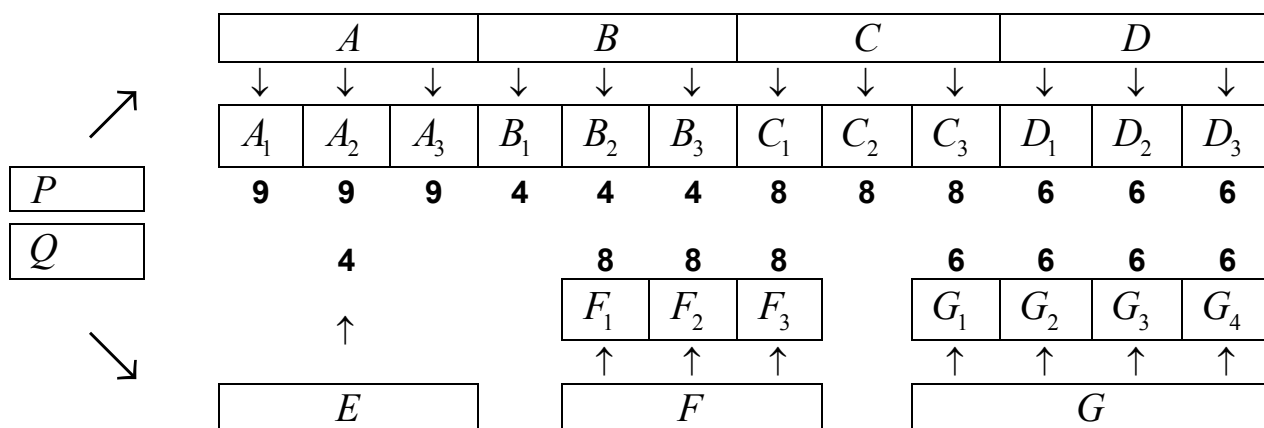


Схема 1: до класифікації прямих простору за ознакою взаємного розташування відносно координатних осей і площин АСК

В подальшому без додаткових пояснень для наведених типів прямих будуть наведені графічні ілюстрації із зображенням відповідних положень їх представників відносно фіксованої ДСК.

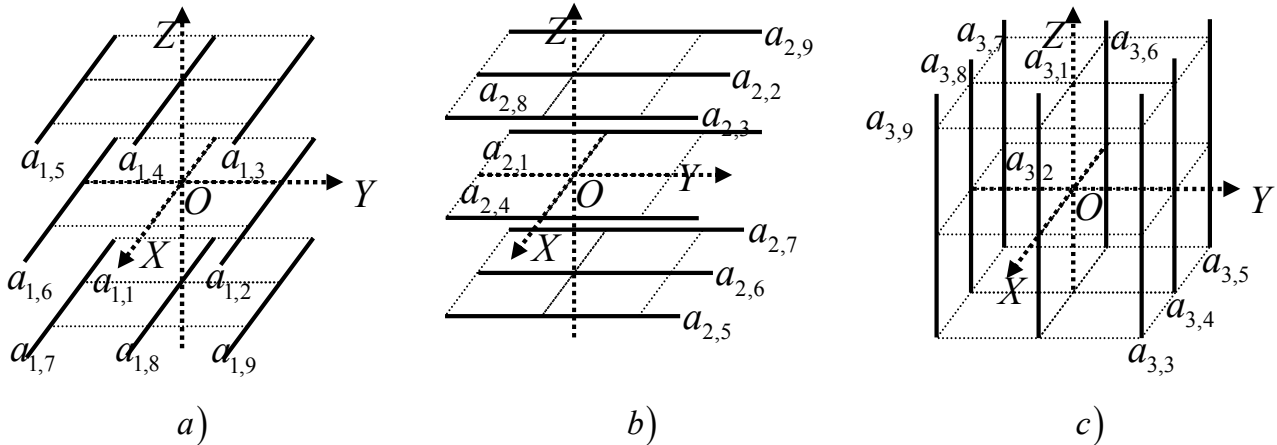


Рис. 1: прями з класу  $A$

$a_{1,i}$  — представники 9 можливих типів прямих підкласу  $A_1$  (що є паралельними до осі  $OX$ ) — рис. 1 а);  
 $a_{2,i}$  — представники 9 можливих типів прямих підкласу  $A_2$  (що є паралельними до осі  $OY$ ) — рис. 1 б);  
 $a_{3,i}$  — представники 9 можливих типів прямих підкласу  $A_3$  (що є паралельними до осі  $OZ$ ) — рис. 1 с).

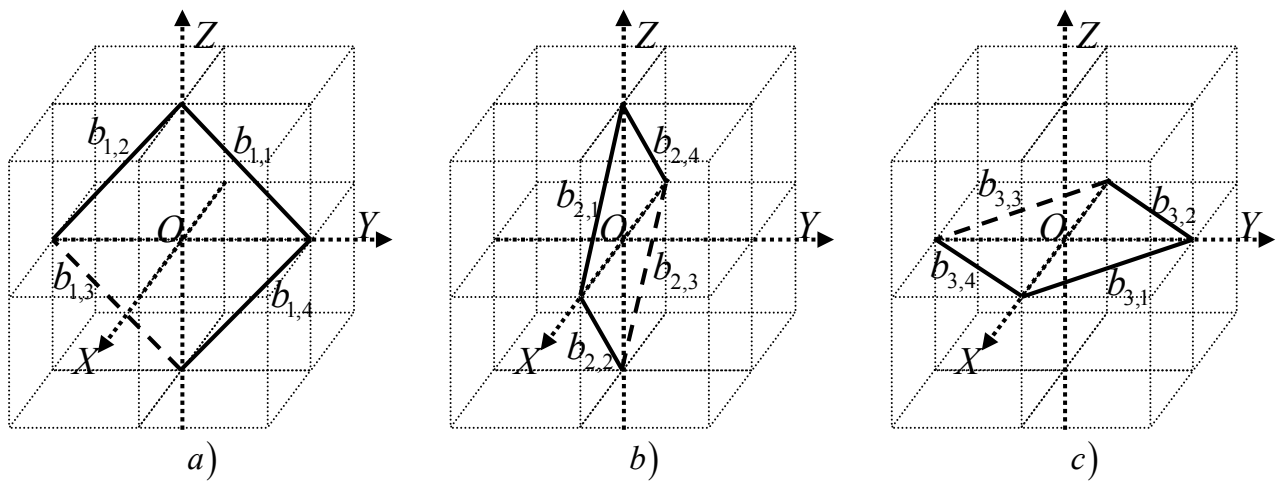


Рис. 2: прями з класу  $B$

$b_{1,i}$  — представники 4 можливих типів прямих підкласу  $B_1$  (що перетинають піввісі осей  $OY$  і  $OZ$ ) — рис. 2 а);  
 $b_{2,i}$  — представники 4 можливих типів прямих підкласу  $B_2$  (що перетинають піввісі осей  $OZ$  і  $OX$ ) — рис. 2 б);  
 $b_{3,i}$  — представники 4 можливих типів прямих підкласу  $B_3$  (що перетинають піввісі осей  $OX$  і  $OY$ ) — рис. 2 с).

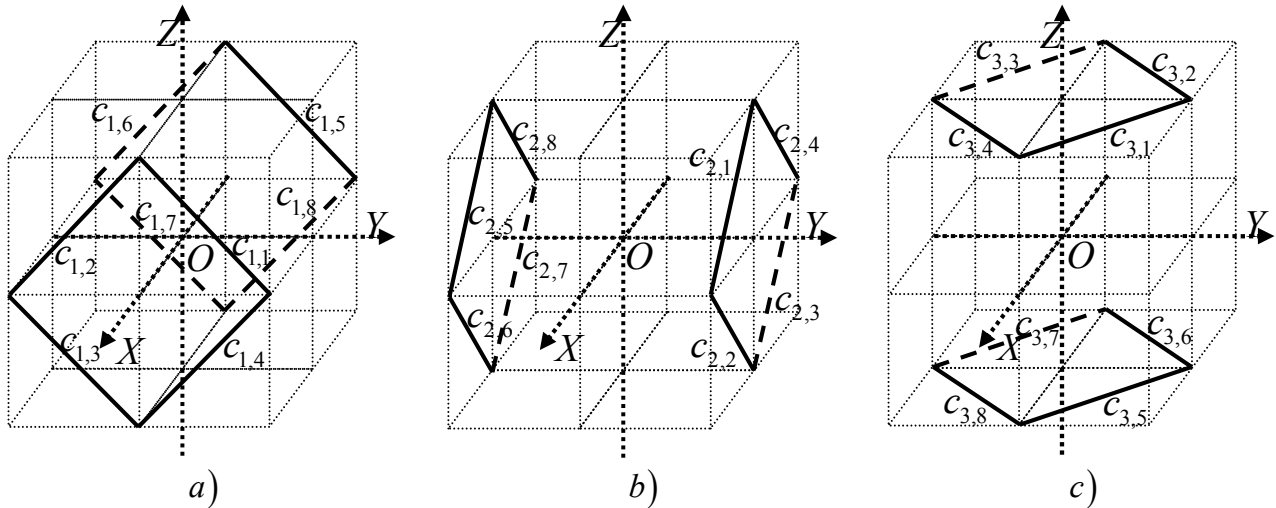


Рис. 3: прямі з класу  $C$

$c_{1,i}$  — представники 8 можливих типів прямих підкласу  $C_1$  (що є паралельними до площини  $YOZ$ ) — рис. 3 а);  
 $c_{2,i}$  — представники 8 можливих типів прямих підкласу  $C_2$  (що є паралельними до площини  $ZOX$ ) — рис. 3 б);  
 $c_{3,i}$  — представники 8 можливих типів прямих підкласу  $C_3$  (що є паралельними до площини  $XOY$ ) — рис. 3 с).

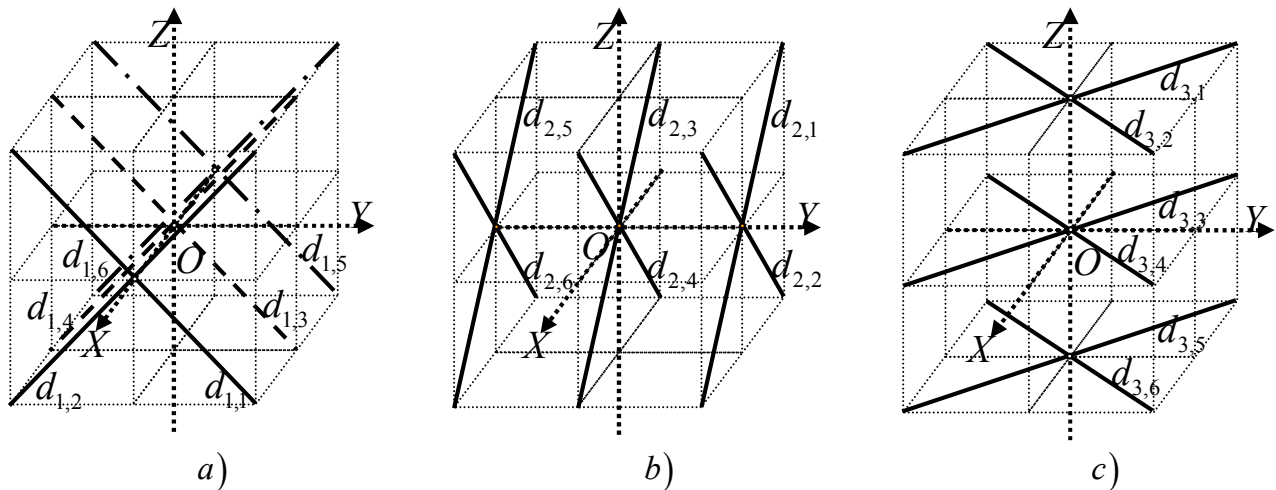


Рис. 4: прямі з класу  $D$

$d_{1,i}$  — представники 6 можливих типів прямих підкласу  $D_1$  (що перетинають вісь  $OX$ ) — рис. 4 а);  
 $d_{2,i}$  — представники 6 можливих типів прямих підкласу  $D_2$  (що перетинають вісь  $OY$ ) — рис. 4 б);  
 $d_{3,i}$  — представники 6 можливих типів прямих підкласу  $D_3$  (що перетинають вісь  $OZ$ ) — рис. 4 с).

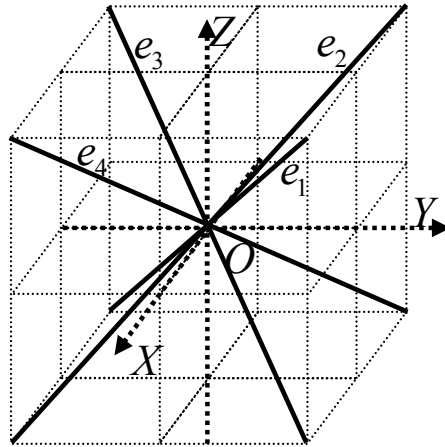
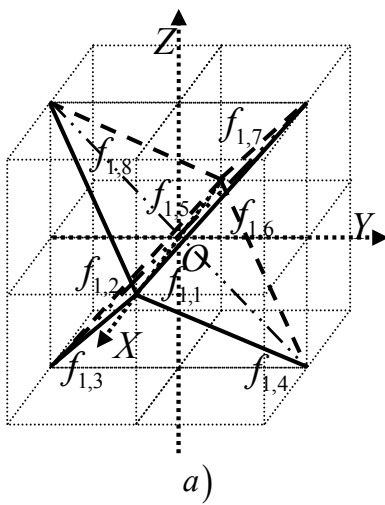
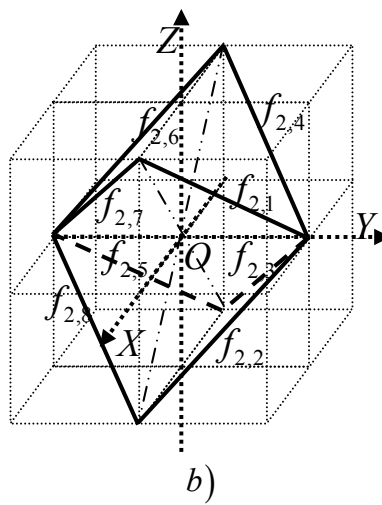


Рис. 5: прямі з класу  $E$

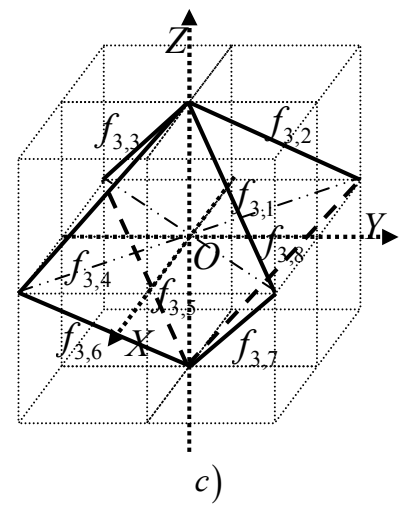
$e_i$  — представники 4 можливих типів прямих, що проходять через початок координат, не співпадають з жодною із координатних осей та не належать жодній з координатних площин (цілком розташовані у двох протилежних октантах)



a)



b)



c)

Рис. 6: прямі з класу  $F$

$f_{1,i}$  — представники 8 можливих типів прямих підкласу  $F_1$  (що перетинають піввісь осі  $OX$ ) — рис. 6 a);

$f_{2,i}$  — представники 8 можливих типів прямих підкласу  $F_2$  (що перетинають піввісь осі  $OY$ ) — рис. 6 b);

$f_{3,i}$  — представники 8 можливих типів прямих підкласу  $F_3$  (що перетинають піввісь осі  $OZ$ ) — рис. 6 c).



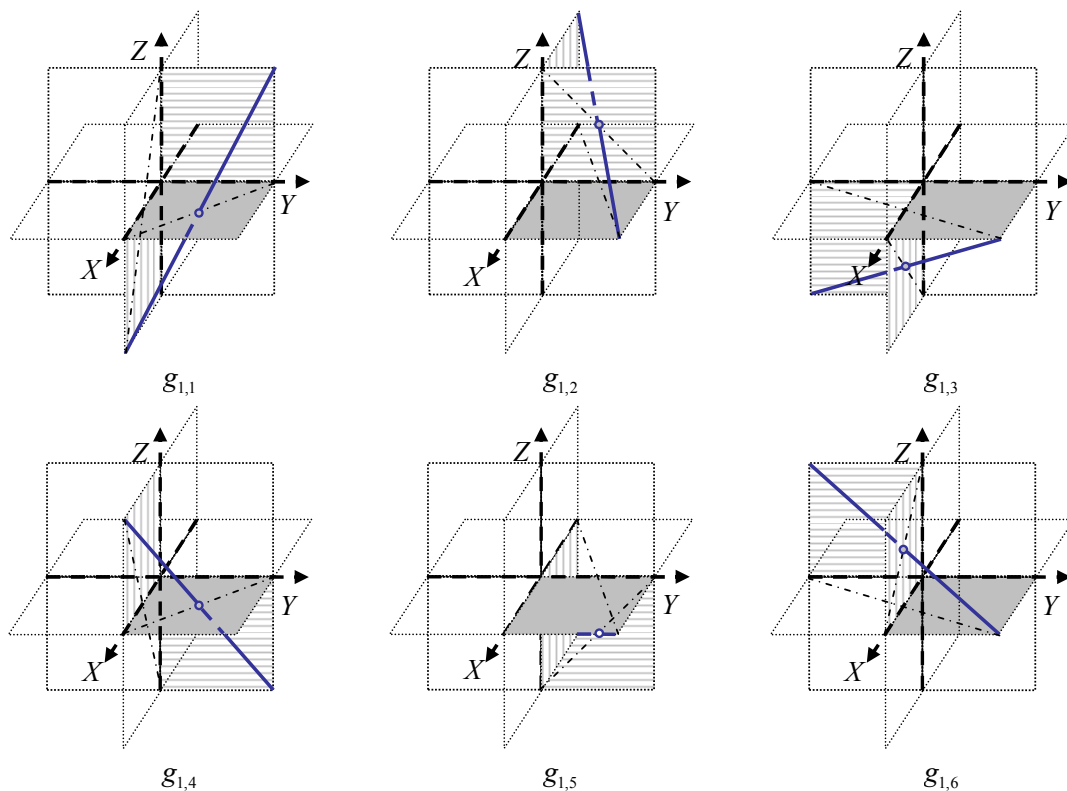


Рис. 7:  $g_{1,i}$  — представники 6 можливих типів прямих підкласу  $G_1$  (що перетинають чверть площину  $X_+OY_+$ )

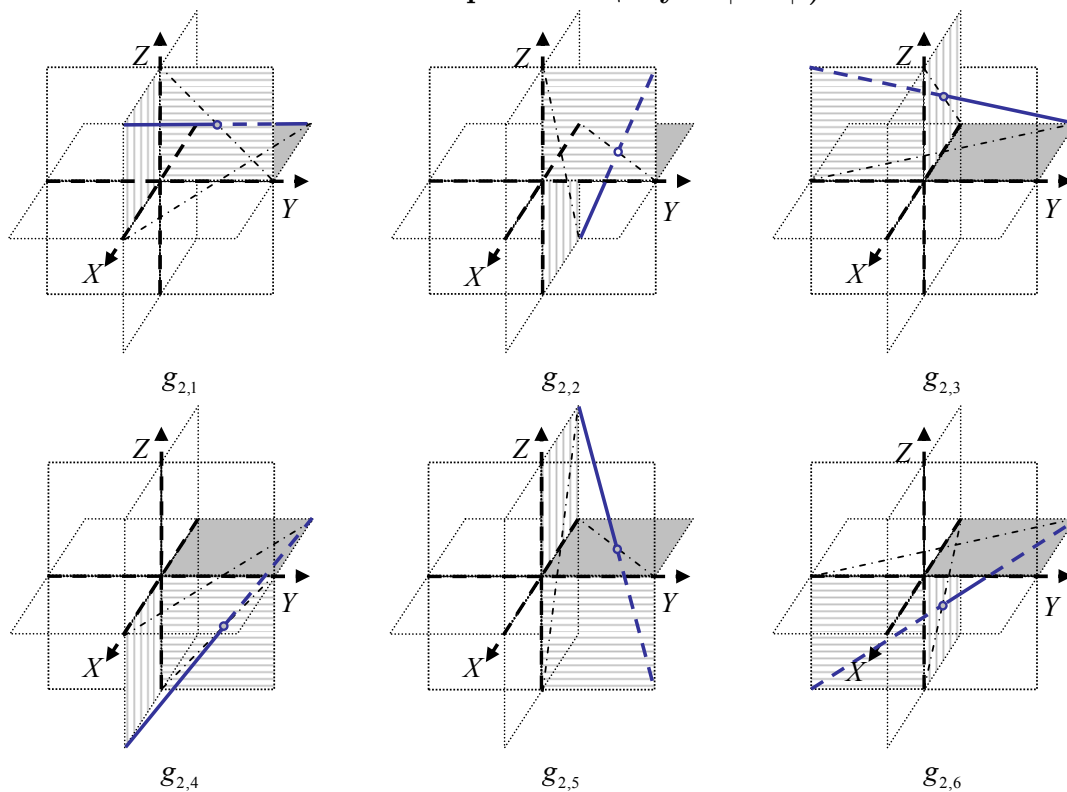


Рис. 8:  $g_{2,i}$  — представники 6 можливих типів прямих підкласу  $G_2$  (що перетинають чверть площину  $Y_+OX_-$ )

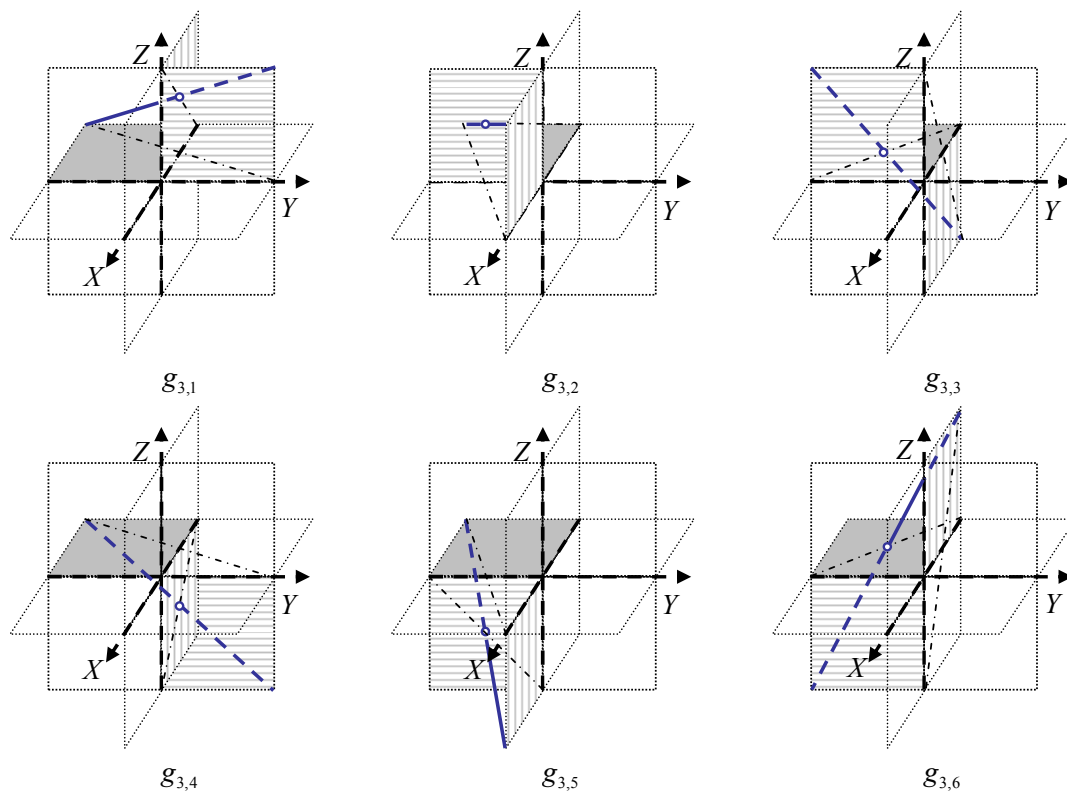


Рис. 9:  $g_{3,i}$  — представники 6 можливих типів прямих підкласу  $G_3$  (що перетинають чверть площину  $X-OY_-$ )

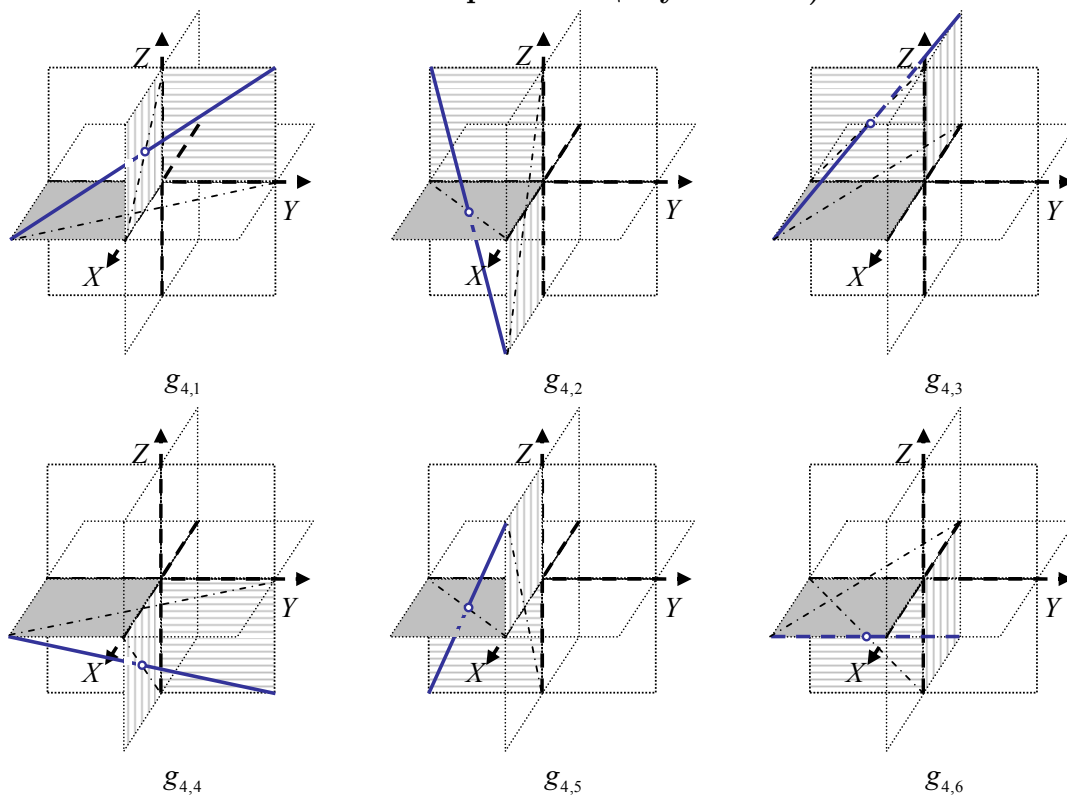


Рис. 10:  $g_{4,i}$  — представники 6 можливих типів прямих підкласу  $G_4$  (що перетинають чверть площину  $Y-OX_+$ )

## Висновки

Апробація запропонованого змістового наповнення теми «Пряма і площина у просторі» відбувалась під час викладання протягом першого семестру 2013–2014 н.р. спецкурсу (варіативної дисципліни за вибором студентів) «Вибрані питання математики» для студентів 5 курсу фізико-математичного факультету ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет», що навчаються за освітньо-професійною програмою підготовки магістра, спеціальність 8.04020101 Математика\*.

Результати апробації дозволяють стверджувати, що залучення студентів до розв'язування класифікаційних задач є саме тим видом навчально-наукової діяльності, який сприяє:

- розвитку відповідних практичних навичок;
- більш свідомому засвоєнню базових понять та геометричних властивостей і ознак, а не перетворюється у формальну їх перевірку шляхом підстановки вихідних даних у необхідні аналітичні рівності.

Проте слід констатувати, що отримання критеріїв (необхідних і достатніх умов у вигляді відповідної системи аналітичних рівностей та/або нерівностей) на початковому етапі викликали неабиякі труднощі навіть у сильних студентів.

На нашу думку подальша розробка теми може бути пов'язана з виявленням і систематизацією задач класифікаційного характеру в курсі аналітичної геометрії, зокрема що відносяться до «Теорії прямих і площин у просторі». Однак слід розуміти, що задачі класифікаційного характеру не повинні стати самоціллю. Для викладача будь-яка класифікація повинна мати практичний сенс, причому у тій мірі, в якій вона допоможе йому здійснювати цілеспрямований вибір відповідного методу навчання для розв'язання конкретних дидактичних задач.

Крім того, цікавим, навіть з математичної точки зору, здається з'ясування питання про задання в явному вигляді відношення еквівалентності, яке розширює множину прямих тривимірного простору з фіксованою ДСК на сфери (класи еквівалентності), кожен з яких містить лише ті прямі, що відносяться до одного зі 133 суттєво різних типів прямих за наведеною класифікацією.

Автори переконані у тому, що дослідницька діяльність, пов'язана із розв'язанням класифікаційних задач, має стати одним з основних видів роботи не лише під час викладання спецкурсів (з фундаментальних та фахових дисциплін за вибором студентів), але й під час проведення курсів підвищення кваліфікації вчителів математики.

## Література

1. *Александров П.С.* Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры / П.С. Александров. — М.: Наука, 1968. — 912 с.
2. *Атанасян Л.С.* Геометрія. Частина 1: Навчальний посібник для студентів фізмат факультетів педінститутів / Л.С. Атанасян. — К.: Вища школа, 1976. — 456 с.
3. *Бахвалов С.В.* Аналитическая геометрия: Учебник для педагогических институтов / С.В. Бахвалов, Л.И. Бабушкин, В.П. Иваницкая. — М.: Просвещение, 1970. — 376 с.
4. Збірник задач з аналітичної геометрії: Навч. посібник / [уклад.: В.М. Бабич, С.В. Білун, В.М. Журавльов та ін.]; за ред. В.В. Кириченка. — [3-є вид.], пер. та випр. — Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2013. — 200 с.
5. *Клочко В.І.* Комп'ютерно-орієнтована методика узагальнення і систематизації знань та вмінь в процесі навчання студентів аналітичної геометрії: Монографія / В.І. Клочко, М.Б. Ковальчук. — Вінниця : ВНТУ, 2009. — 116 с.
6. *Моденов П.С.* Аналитическая геометрия / П.С. Моденов. — М.: МГУ, 1969. — 699 с.
7. *Моденов П.С.* Сборник задач по аналитической геометрии / П.С. Моденов, А.С. Пархоменко. — М.: Наука, 1976. — 384 с.
8. *Мусхелишвили Н.И.* Курс аналитической геометрии / Н.И. Мусхелишвили. — [4-е изд.] — М.: Высшая школа, 1967. — 655 с.
9. *Погорелов А.В.* Аналитическая геометрия / А.В. Погорелов. — [3 изд.] — М., Наука, 1968. — 176 с.
10. *Резниченко С.В.* Аналитическая геометрия в примерах и задачах (Алгебраические главы) / С.В. Резниченко. — М.: МФТИ, 2001. — 576 с.
11. *Савенков А.І.* Психологічні основи дослідницького підходу до навчання / А.І. Савенков. — [2 изд.] — М., 2006. — 512 с.
12. *Сгібнєв А.* Як на уроці математики розвивати дослідницькі уміння / А.Сгібнєв // Математика. — 2009. — №6. — С. 18–21.
13. *Фролова І.В.* Науково-дослідницька діяльність студентів — передумова випереджувального саморозвитку фахівця [Електронний ресурс] / І.В. Фролова. // Наукові записки [Ніжинського державного університету ім. Миколи Гоголя]. Сер. : Психолого-педагогічні науки. — 2012. — № 7. — Режим доступу: [http://nbuv.gov.ua/j-pdf/Nzspp\\_2012\\_7\\_46.pdf](http://nbuv.gov.ua/j-pdf/Nzspp_2012_7_46.pdf)
14. *Цубербиллер О.Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии / О.Н. Цубербиллер. — М.: Наука, 1964. — 336 с.