УДК 37.016:[514.122+514.142]

**Кадубовський О.А., Чиркова Н.О.**

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: kadubovs@ukr.net, chirkova_n@ukr.net

# ПРО МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ «ТЕОРІЇ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ» В АФІННИХ КООРДИНАТАХ

В статті висвітлюється один із можливих підходів до вивчення змістового модуля «Метричні задачі теорії прямих і площини у просторі» за хронологією, що базується на найбільш доцільній послідовності ключових задач та їх викладі саме в афінних координатах, на відміну від традиційного викладу в прямокутних декартових координатах.

**Ключові слова:** *афінна система координат у просторі, матриця Грама, метричні задачі на пряму та площину, систематизація.*

## Вступ

Тема «Метричні задачі на ... в афінних координатах» (надалі – «МЗвАК») є невід'ємною змістовою складовою об'єднаного курсу лінійної алгебри та аналітичної геометрії для студентів фізико-математичних спеціальностей «класичних» університетів [6, 1].

Дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» і «Аналітична геометрія» є нормативними дисциплінами освітньо-професійних програм (ОПП) підготовки майбутніх викладачів фізики та математики. Проте, на превеликий жаль, відповідними ОПП підготовки зазначених фахівців для наведених дисциплін не передбачено вивчення змістових модулів «МЗвАК». Можливо тому, в більшості рекомендованих підручників, методичних посібників та збірників задач з аналітичної геометрії для студентів педагогічних ВНЗ метричні задачі розглядають виключно в прямокутних координатах.

Оскільки подальша викладацька діяльність випускників магістратури (педагогічних ВНЗ) за фізико-математичними спеціальностями передбачає готовність до навчання спеціалістів різного профілю, то сьогодні перед вітчизняними ВНЗ, що готують майбутніх викладачів, постало надважливе завдання — формувати фахівців із високим рівнем професійної компетентності [7]. Необхідність отримання студентами більш фундаментальних знань, зокрема із зазначеної теми, й визначає проблему вибору можливих підходів до вирішення поставленого завдання.

Результати кількісного та якісного аналізу дидактичного забезпечення «Метричної теорії прямих і площин у просторі» за найбільш розповсюдженими і рекомендованими підручниками та збірниками задач [6]–[10], [9]–[1] дозволяють констатувати, що:
— систематизація та виокремлення ключових метричних задач «Теорії прямих і площин у просторі» в явному вигляді, навіть для випадку прямокутних координат, залишаються недостатньо висвітленими питаннями;
— «різноманіття» задач, здебільшого, досягається за рахунок розгляду різних способів задання прямої та площини, несуттєвих додаткових умов або ж за рахунок розгляду аналогічних задач з іншими числовими даними;
— задачам без числових даних та задачам дослідницького характеру також приділяється недостатня увага, а їх роль взагалі затушовується;
— в більшості існуючих збірниках відсутні деякі досить важливі задачі, знання та навички розв'язання яких безсумнівно сприятимуть формуванню належного рівня професійної компетентності майбутніх викладачів ВНЗ.

Втішає те, що зазначених вад, принаймні частково, позбавлені збірники задач [6, 4, 9].

Однак окреслений ряд існуючих проблемних питань свідчить про актуальність та необхідність проведення додаткових розвідок, пов'язаних із систематизацією та виокремленням ключових метричних задач «Теорії прямих і площин у просторі», зокрема в афінних координатах. У зв'язку з цим основні завдання нашого дослідження полягали у:
— розв'язуванні наявних задач з обраної теми саме в афінних координатах;
— їх систематизації за найбільш доцільним та ефективним (на думку авторів) для вивчення і засвоєння хронологічним порядком;
— виокремленні з них «ключових».

Як з'ясувалося, розділи «МЗвАК» вперше було запропоновано П.С. Моденовим і О.С. Пархоменком у 1976 р. у збірнику задач [9]. Причому всі задачі таких розділів авторами було віднесено до задач теоретичного характеру та підвищеної складності. Один з можливих підходів до систематизації та виокремлення ключових метричних задач «Теорії прямих на площині» в афінних координатах викладено у роботі [5]. Представлену статтю можна вважати її логічним продовженням.

Отже, **мета даної статті** полягає у висвітленні авторського досвіду із систематизації та виокремлення «ключових» задач, їх доповненні вправами-наслідками та задачами-наслідками теоретичного характеру, які б (у певному розумінні) «повно» охоплювали метричні задачі «Теорії прямих і площин у просторі».

## Основна частина

Досвід спілкування зі студентами фізико-математичних спеціальностей, на превеликий жаль, свідчить про невисокий рівень геометричної культури. На нашу думку, основна причина — хаотичне нагромадження в пам'яті студентів сукупності понять і фактів з фундаментальних дисциплін та невисокий рівень усвідомлення взаємозв'язків між ними.

Психологи О.В. Скрипченко, Т.М. Лисянська та ін. зазначають, що знання вважаються засвоєними лише тоді, коли вони зберігаються в пам'яті в узагальненому, згорнутому вигляді як вибудовані, усвідомлені, гнучкі теоретичні положення, які виражають світогляд та систему переконань.

Як відомо, особливістю курсу аналітична геометрія є його (майже безпрецедентна) геометрична наочність. І тому, саме через цю обставину, для розвитку більш фундаментальних математичних уявлень, та з метою досягнення наочності алгебраїчних абстракцій і лаконічності геометричних доведень необхідно здійснювати цілеспрямоване навчання взаємопов'язаному використанню і «взаємоперекладам» між природними для лінійної алгебри та аналітичної геометрії формами інформації: геометричною наочністю і символьними образами.

На нашу думку, вивчення змістових модулів «МЗвАК» в курсі аналітичної геометрії сприятиме більш свідомому розумінню студентами наукових ідей та методів аналітичної геометрії взагалі, її місця серед інших математичних дисциплін та взаємозв'язку з ними. Зазначимо, що ще Б.Н. Делоне наголошував на необхідності широкого розвитку афінної точки зору, бо зв'язок аналітичної геометрії з такими важливими розділами математики, як аналіз і алгебра, відбувається саме через афінну і метричну геометрію [3].

Неподинокий досвід використання (адаптації) *технології навчання математиці за Р.Г. Хазанкіним* дозволяє стверджувати, що робота викладача з вибору ключових задач до певного змістового модуля математичної дисципліни дає можливість забезпечити необхідний фундамент для навчання студентів розв'язувати більш складні задачі з відповідної теми.

У зв'язку з цим, пропонований нами підхід базується на використанні конкретної системи «ключових» задач (саме в афінних координатах). Причому, кожну з них «оснащено» вправами-наслідками та задачами-наслідками, які «традиційно» відносять до так званих «типових» задач.

Під *ключовою задачею* ми будемо розуміти задачу, в результаті розв'язання якої встановлюється математичний факт, що часто використовується при розв'язанні інших задач.

Під *вправою-наслідком* — задачу «ілюстративного» характеру, яка є тривіальним тлумаченням відповідної ключової задачі у частинних її проявах та /або інтерпретаціях.

Під *задачею-наслідком* — ту, яка надає зразок застосування (отриманого у відповідній(их) ключовій(их) задачі(ах)) результату чи способу її розв'язування (розкриває суть прийому).

*Одна* із особливостей підходу полягає в тому, що всі пропоновані задачі сформульовано у загальному вигляді (без числових даних). Останнє зовсім не означає, що головною метою є одержання кінцевої формули, як формальне її узагальнення на випадок афінних координат. Навпаки — вона повинна бути результатом свідомого, по-крокового розв'язування, кінцевим продуктом якого є відповідний алгоритм.

Крім того, розв'язання зазначених задач в афінних координатах припускають алгоритми, що майже позбавлені необхідності в апелюванні до геометричної наочності (як вихідного пункту міркувань), які без змін (проте з очевидними значними спрощеннями) доцільно використовувати при розв'язуванні цих задач в косокутних та прямокутних координатах.

На нашу думку, такий спосіб подачі матеріалу сприятиме формуванню у студентів саме систематизованих знань, які слід розглядати і як засіб, і як мету вивчення змістового модуля «МЗвАК» із зазначеної теми.

Одержані в роботі результати можуть бути теоретичною та дидактичною основою викладання змістового модуля «Метричні задачі теорії прямих і площин у просторі» об'єднаного курсу з аналітичної геометрії та лінійної алгебри для студентів фізико-математичних спеціальностей. Розв'язки запропонованих задач (у загальному вигляді) доцільно використовувати у двох аспектах:

`з одного боку` — під час добору задач із новими числовими даними,

`з іншого боку` — як самостійний інструментарій для розв'язування широкого кола метричних задач на многогранники з відомими довжинами (трьох) ребер зі спільною вершиною та кутами між ними.

Перш ніж перейти до ознайомлення із результатами систематизації та виокремлення ключових метричних задач «Теорії прямих і площин у просторі» в афінних координатах, зазначимо, що студентам, після вивчення змістового модуля «Елементи векторної алгебри», достатньо усвідомлювати базові поняття «Методу координат» та факти, що вичерпуються наступними

**Означення 1.** *Узагальненою декартовою (або ж афінною) системою координат у просторі називають впорядковану сукупність трьох осей координат, що не лежать в одній площині та проходять через одну точку* $O$*, яка є початком координат на кожній з осей.*

Іншими словами — афінна система координат у просторі цілком визначається точкою $O$ (початок координат) та впорядкованою трійкою некомпланарних векторів $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ зі спільним початком у точці $O$. Напрями цих векторів визначають додатні напрями координатних осей $OX$ (*абсцис*), $OY$ (*ординат*) та $OZ$ (*аплікат*) відповідно.

**Означення 2.** *Простір з фіксованою узагальненою декартовою (афінною) системою координат називають (афінним) координатним простором.*

**Означення 3.** *Метричними коефіцієнтами $g_{ij}$ базису $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ (в просторі) називають наступні скалярні добутки*

$$g_{ij} = \langle \overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j} \rangle = |\overrightarrow{e_i}| \cdot |\overrightarrow{e_j}| \cdot \cos\angle(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j}) \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}. \tag{1}$$

Матрицю $G = (g_{ij})$, елементами якої є зазначені добутки, називають матрицею Грама метричних коефіцієнтів базису $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$. Оскільки $g_{ij} = g_{ji}$, то $G^T = G$, де $G^T$ — матриця, транспонована до матриці $G$.

Добре відомо, що якщо два вектори відносно базису $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ задано координатами $\overrightarrow{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\overrightarrow{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, то їх скалярний добуток можна обчислити за формулою

$$\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} g_{ij}a_ib_j = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = A^T \circ G \circ B, \tag{2}$$

де $A$ і $B$ – матриці-стовпці, елементами яких є координати векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ відповідно, $A^T$ – матриця-рядок, що є транспонованою до матриці $A$ [1].

Оскільки $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \rangle = |\overrightarrow{a}|^2$, то

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{A^T \circ G \circ A}. \tag{3}$$

Площу паралелограма, побудованого на двох неколінеарних векторах $\overrightarrow{p} = \{p_1; p_2; p_3\}$ і $\overrightarrow{q} = \{q_1; q_2; q_3\}$ можна обчислити за формулою

$$S_{\square} = \sqrt{\begin{vmatrix} P^T \circ G \circ P & P^T \circ G \circ Q \\ P^T \circ G \circ Q & Q^T \circ G \circ Q \end{vmatrix}}, \tag{4}$$

де $P^T = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$, $Q^T = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}$, а об'єм паралелепіпеда, побудованого на трьох некомпланарних векторах $\overrightarrow{p} = \{p_1; p_2; p_3\}$, $\overrightarrow{q} = \{q_1; q_2; q_3\}$ і $\overrightarrow{r} = \{r_1; r_2; r_3\}$ — за формулою

$$V = \sqrt{|G|} \cdot \mathrm{mod} \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Більш детально з наведеними поняттями та фактами можна ознайомитись, наприклад в [6]–[11], [12], [10], [9]–[1].

Нижче, без додаткових пояснень, представлено результат систематизації та виокремлення «ключових» метричних задач теорії прямих і площин у просторі в афінних координатах. Також наведено вправи-наслідки та задачі-наслідки теоретичного і дослідницького характеру, які, по суті, й складають основу авторського підходу до вивчення та викладання змістового модуля «МЗвАК» з відповідної теми у курсі лінійної алгебри та/або аналітичної геометрії для студентів фізико-математичних спеціальностей.

В умовах всіх наведених нижче задач координати даних точок і векторів та рівняння прямих і площин задано відносно фіксованої афінної системи координат з матрицею Грама $G = (g_{ij})$.

**Ключова задача 1.** *Знайти рівняння площини, яка проходить через дану точку та має даний нормальний вектор.*

**Вправа-наслідок 1-1.** Знайти рівняння площини, яка проходить через дану точку перпендикулярно прямій, заданій канонічним рівнянням.

**Вправа-наслідок 1-2.** Знайти рівняння площини, яка проходить через дану точку перпендикулярно прямій, заданій як перетин двох площин.

**Ключова задача 2.** *Знайти координати нормального вектора площини, заданої параметричним рівнянням.*

**Задача-наслідок 2.1.** Знайти координати нормального вектора площини, заданої загальним рівнянням.

**Ключова задача 3.** *Знайти необхідну та достатню умову перпендикулярності*

1) *прямих, заданих канонічними рівняннями;*
2) *площин, заданих загальними рівняннями;*
3) *прямої і площини, заданих канонічним та загальним рівняннями відповідно.*

**Вправа-наслідок 3-1.** Знайти необхідну та достатню умову перпендикулярності

1.1) прямої, заданої як перетин двох площин, та прямої, заданої канонічним рівнянням;
1.2) прямих, що є перетином відповідних пар площин, заданих загальними рівняннями;
2.1) площин, заданих параметричним та загальним рівняннями відповідно;
2.2) площин, заданих параметричними рівняннями;

3.1) прямої і площини, заданих канонічним та параметричним рівняннями відповідно;
3.2) прямої, заданої як перетин двох площин, і площини, заданої параметричним рівнянням.

**Задача-наслідок 3.1.** Знайти рівняння прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до площини, заданої загальним рівнянням.

**Задача-наслідок 3.2.** Знайти рівняння площини, що проходить через дану точку перпендикулярно до кожної з двох непаралельних площин, заданих загальними рівняннями.

**Задача-наслідок 3.3.** Знайти рівняння площини, що містить пряму, задану канонічним рівнянням, та є перпендикулярною до площини, заданої загальним рівнянням.

**Ключова задача 4.** *Знайти косинус (синус) гострого кута між*
1) *прямими, заданими канонічними рівняннями;*
2) *площинами, заданими загальними рівняннями;*
3) *прямою, заданою канонічним рівнянням, та площиною, заданою загальним рівнянням.*

**Вправа-наслідок 4-1.** Знайти косинус (синус) гострого кута між
1) прямою, заданою канонічним рівнянням, та координатними осями;
2) площиною, заданою загальним рівнянням, та координатними осями;
3) координатною віссю та координатною площиною, яка її не містить;
4) координатними осями та координатними площинами відповідно;
5) координатними площинами
5.1) $ZOX$ та $XOY$; 5.2) $XOY$ та $YOZ$; 5.3) $YOZ$ та $ZOX$;
6) координатними осями
6.1) $OX$ та $OY$; 6.2) $OY$ та $OZ$; 6.3) $OZ$ та $OX$.

**Ключова задача 5.** *Знайти рівняння прямих, які проходять через дану точку та перетинають пряму, задану канонічним рівнянням, під даним гострим кутом.*

**Вправа-наслідок 5-1.** Знайти рівняння прямих, що проходять через дану точку та утворюють даний кут з координатною віссю
1) $OX$; 2) $OY$; 3) $OZ$.

**Задача-наслідок 5.1.** Знайти рівняння прямої, яка проходить через дану точку перпендикулярно до прямої, заданої канонічним рівнянням.

**Ключова задача 6.** *Знайти відстань від даної точки до*
1) *площини, заданої загальним рівнянням;*
2) *прямої, заданої канонічним рівнянням.*

**Вправа-наслідок 6-1.** Обчислити відстань

1.1) від даної точки до площини, заданої загальним рівнянням;
1.2) від даної точки до координатних площин;
1.3) від початку координат до площини, заданої загальним рівнянням;
1.4) між паралельними площинами, заданими загальними рівняннями;
1.5) між мимобіжними прямими, заданими канонічними рівняннями;
1.6) між паралельними прямими, заданими канонічними рівняннями;
1.7) від даної точки до певної координатної осі.

**Задача-наслідок 6.1.** Знайти рівняння бісекторних площин двогранних кутів, утворених площинами, заданими загальними рівняннями.

**Задача-наслідок 6.2.** Знайти рівняння бісекторних площин двогранних кутів, утворених координатними площинами

1) $YOZ$ та $ZOX$; 2) $ZOX$ та $XOY$; 3) $XOY$ та $YOZ$.

**Ключова задача 7.** *Визначити координати ортогональної проекції даної точки на*

1) *площину, задану загальним рівнянням;*
2) *пряму, задану канонічним рівнянням.*

**Вправа-наслідок 7-1.** Знайти координати ортогональної проекції точки

1) на координатні площини;
2) на координатні вісі.

**Задача-наслідок 7.1.** Знайти координати точки, симетричної даній точці відносно

1) площини, заданої загальним рівнянням;
2) прямої, заданої канонічним рівнянням.

**Задача-наслідок 7.2.** Знайти рівняння ортогональної проекції прямої, заданої канонічним рівнянням, на площину, задану загальним рівнянням.

**Задача-наслідок 7.3.** Знайти рівняння площини, симетричної до площини, заданої загальним рівнянням, відносно площини, заданої загальним рівнянням.

**Ключова задача 8.** *Знайти координати основ спільного перпендикуляра до двох мимобіжних прямих.*

**Задача-наслідок 8.1.** Знайти рівняння прямої, яка містить спільний перпендикуляр двох мимобіжних прямих, заданих канонічними рівняннями.

**Ключова задача 9.** *Знайти рівняння прямої, симетричної прямій, заданій канонічним рівнянням, відносно*

1) *площини, заданої загальним рівнянням;*
2) *прямої, заданої канонічним рівнянням.*

**Вправа-наслідок 9-1.** Знайти рівняння прямої, симетричної прямій, заданій канонічним рівнянням, відносно координатних площин.

**Вправа-наслідок 9-2.** Знайти рівняння прямої, симетричної прямій, заданій канонічним рівнянням відносно певної координатної осі.

**Ключова задача 10.** *Знайти рівняння площини, яка відстоїть від початку координат на відстані* $p$ *та утворює з осями координат кути* $\psi_1$, $\psi_2$ *і* $\psi_3$ *відповідно.*

**Задача-наслідок 10.1.** Звести загальне рівняння площини до нормального виду.

**Задача-наслідок 10.2.** Знайти синуси кутів між площиною, заданою загальним рівнянням, та координатними осями.

**Задача-наслідок 10.3.** Знайти необхідні та достатні умови, яким повинні задовольняти кути $\psi_1$, $\psi_2$ і $\psi_3$ із задачі 10.

**Ключова задача 11.** *Знайти рівняння площин, які містять пряму, задану канонічним рівнянням, та утворюють даний гострий кут з площиною, заданою загальним рівнянням.*

**Ключова задача 12.** *Знайти рівняння площини, яка містить пряму, задану канонічним рівнянням, і відстоїть від даної точки на даній відстані.*

Зауважимо, що вправи- і задачі-наслідки повинні добиратися викладачем з урахуванням не лише суб'єктивних чинників а й реального бюджету часу.

## Висновки

В представленій роботі запропоновано один із можливих підходів до вивчення метричних задач «Теорії прямих та площини в просторі». Зокрема, наведено 12 ключових задач, 44 вправ-наслідків та 21 задач-наслідків теоретичного характеру, які (в певному розумінні) «повно» охоплюють метричні задачі на пряму і площину в просторі в афінних координатах.

Одержані авторами алгоритми до розв'язання наведених задач без змін, проте з *очевидними значними спрощеннями*, доцільно і зручно використовувати при розв'язуванні цих задач в косокутних та прямокутних координатах. Тому запропонований підхід, безсумнівно, можна і доцільно використовувати й при традиційному вивченні відповідної теми в прямокутних координатах.

Апробація запропонованого підходу відбувалась під час викладання спецкурсу «Вибрані питання математики» для студентів 5 курсу фізико-математичного факультету ДДПУ. Результати впровадження наведеної системи задач дозволяють констатувати, що ознайомлення студентів з метричними задачами в афінних координатах викликало інтерес, спонукало їх до творчої діяльності та посилювало розуміння ними міжпредметних зв'язків.

Студенти (за порівняно нетривалий час) опанували необхідні навички та показали достатній рівень залишкових знань.

На нашу думку, цікавим і цілком досяжним здається проведення досліджень, присвячених оберненим задачам — «на знаходження метричних коефіцієнтів». Маємо надію, що наведений матеріал буде корисний студентам ВНЗ під час вивчення відповідної теми курсу «Аналітична геометрія» та зацікавить викладачів, які викладають цю дисципліну, як довідково-дидактичний матеріал, який значно доповнює відповідні параграфи [8], [7]–[1].

## Література


1. *Алания Л.А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре /Л.А. Алания, И.А. Дынников, В.М. Мануйлов; под ред. Ю.М. Смирнова. — [2-е изд.] — М.: Логос, 2005. — 376 с.
2. *Атанасян Л.С.* Геометрія. Частина 1: Навч. посібник для студентів фіз.-мат. фак. пед. ін-тів / Л.С. Атанасян. — К.: Вища школа, 1976. — 456 с.
3. *Делоне Б.Н.* Аналитическая геометрия / Б.Н. Делоне, Д.А. Райков. — Ленинград: ОГИЗ, 1948. — Т. 1. — 456 с.
4. Збірник задач з аналітичної геометрії: Навч. посібник / [уклад.: В.М. Бабич, С.В. Білун, В.М. Журавльов та ін.]; за ред. В.В. Кириченка. — [3-є вид.], пер. та випр. — Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2013. — 200 с.
5. *Кадубовський О.А.* Основні метричні задачі на прямі у площині в афінних координатах / О.А. Кадубовський, М.В. Романкевич // Зб. наук. праць фіз.-мат. факультету ДДПУ. — 2013. — Вип. 3. — С. 154–177.
6. *Ким Г.Д.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи / Г.Д. Ким, Л.В. Крицков. — М.: Планета знаний, 2007. — Т. 1. — 469 с.
7. *Лосєва Н.М.* Прикладна спрямованість навчання аналітичної геометрії як основа формування професійної компетентності викладача математики / Н.М. Лосєва, О.А. Ніколаєва // Дидактика математики: проблеми і дослідження: між. зб. наук. робіт. — 2012. — № 38. — С. 46–50.
8. *Моденов П.С.* Аналитическая геометрия / П.С. Моденов. — М.: МГУ, 1969. — 699 с.
9. *Моденов П.С.* Сборник задач по аналитической геометрии / П.С. Моденов, А.С. Пархоменко. — М.: Наука, 1976. — 384 с.
10. *Мусхелишвили Н.И.* Курс аналитической геометрии / Н.И. Мусхелишвили. — [4-е изд.] — М.: Высшая школа, 1967. — 655 с.
11. *Постников М.М.* Аналитическая геометрия / М.М. Постников. — М.: Наука, 1973. — 384 с.
12. *Цубербиллер О.Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии / О.Н. Цубербиллер. — М.: Наука, 1964. — 336 с.