МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

Новиков О.А., Ровенская О.Г., Шулик Т.В., Шаповалов М.С.

[1] *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, ГВУЗ «ДГПУ»*

[2] *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, ДГМА*

[3] *секретарь научного отдела, ГВУЗ «ДГПУ»*

[4] *студент 3 курса физико-математического факультета, ГВУЗ «ДГПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОВТОРНИХ МЕТОДОВ ВАЛЛЕ ПУССЕНА В ВИДЕ λ–МЕТОДОВ

Получены элементы суммирующих треугольных матриц операторов повторных методов Валле Пуссена.

Ключевые слова: *ряды Фурье, повторные суммы Валле Пуссена*

Введение

Пусть L — множество суммируемых 2π–периодических функций, $f \in L$ и

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x) \qquad (1)$$

— ряд Фурье функции f,

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\ dt, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\ dt, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

— коэффициенты Фурье функции f.

Обозначим через $S_n(f;x)$ частичные суммы ряда Фурье

$$S_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\cos kx + b_k\sin kx. \qquad (2)$$

Суммы Валле Пуссена функции $f \in L$ (см. [1, с. 47]) могут быть заданы соотношением

$$V_{n,p}(f,x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f,x). \tag{3}$$

Пусть p_1, p_2 — произвольные натуральные числа такие, что $p_1+p_2 < n$. Повторными суммами Валле Пуссена [2] называются тригонометрические многочлены, которые задаются следующим соотношением

$$V_{n,p_1,p_2}(f,x) = V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f,x) = \frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{p_2}\sum_{m=k-p_2+1}^{k} S_m(f,x). \tag{4}$$

Для применения методов изучения интегральних представлений при исследовании свойств приближающих операторов эти операторы следует представить в виде так называемых λ–методов, которые порождаются бесконечными треугольными матрицами следующим образом.

При помощи бесконечной треугольной матрицы чисел $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, $k,n = 0,1,2,\ldots$, $\lambda_0^{(n)} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda_k^{(n)} = 0$ при $k \geqslant n$, каждой функции f, имеющей ряд Фурье (1), поставим в соответствие последовательность тригонометрических полиномов:

$$U_n(f;x;\Lambda) = \frac{a_0}{2}\lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{(n)}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx). \tag{5}$$

В виде тригонометрических полиномов (5) суммы Валле Пуссена $V_{n,p}(f;x)$ функции $f(x)$, задаваемые соотношением (3), можно задать при помощи матрицы $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, элементы которой задаются следующим соотношением

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant k \leqslant n-p; \\ 1 - \frac{k-n+p}{p}, & n-p < k \leqslant n,\ n,\ p \in \mathbb{N},\ p < n. \end{cases}$$

Задача представления повторных методов Валле Пуссена в виде λ–методов состоит в том, чтобы построить матрицу $\Lambda = \{\lambda_k^{(n,\overline{p})}\}$, при помощи которой суммы $V_{n,p_1,p_2}(f,x)$ задаются соотношением (5).

Основна часть

Теорема 1. *Пусть $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$, $p_1 \leqslant p_2 < n$. Тогда если*

$$\lambda_k^{(n,\overline{p})} = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant k \leqslant n-p_1-p_2+1; \\ 1 - \frac{(k-n+p_1+p_2)(k-n+p_1+p_2-1)}{2p_1p_2}, & n-p_1-p_2+1 \leqslant k \leqslant n-p_2; \\ 1 - \frac{2k-2n+2p_2+p_1-1}{2p_2}, & n-p_2 \leqslant k \leqslant n-p_1; \\ 1 - \frac{2p_1p_2-(n-k)(n-k+1)}{2p_1p_2}, & n-p_1 \leqslant k \leqslant n-1. \end{cases} \tag{6}$$

то повторные методы Валле Пуссена задаются соотношением

$$V_{n,p_1,p_2}(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(n,\overline{p})}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx).$$

Доказательство.

Пусть $p_1 \leqslant p_2$. Тогда требуемые числа $\lambda_k^{(n,\overline{p})}$ удовлетворяют условие

$$\frac{1}{p_1p_2}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\sum_{m=k-p_2+1}^{k} S_m(f,x) =$$

$$\frac{1}{p_1p_2}\begin{pmatrix} S_{n-p_1-p_2+1}+ & S_{n-p_1-p_2+2}+ & S_{n-p_1-p_2+3}+ & ... & S_{n-p_2}+ & ... & S_{n-p_1}+ \\ S_{n-p_1-p_2+2}+ & S_{n-p_1-p_2+3}+ & S_{n-p_1-p_2+4}+ & ... & S_{n-p_2+1}+ & ... & S_{n-p_1+1}+ \\ S_{n-p_1-p_2+3}+ & S_{n-p_1-p_2+4}+ & S_{n-p_1-p_2+5}+ & ... & S_{n-p_2+2}+ & ... & S_{n-p_1+2}+ \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ S_{n-p_2}+ & S_{n-p_2+1}+ & S_{n-p_2+2}+ & ... & S_{n-p_2+p_1}+ & ... & S_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= 1\cdot S_{n-p_1-p_2+1} + 2\cdot S_{n-p_1-p_2+2} + 3\cdot S_{n-p_1-p_2+3} + ... + p_1\cdot S_{n-p_2} + p_1\cdot S_{n-p_2+1} + ...$$

$$... + p_1\cdot S_{n-p_1} + (p_1-1)\cdot S_{n-p_1+1} + ... + 1\cdot S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k^{(n)}A_k(f;x).$$

Гармоники $A_k(f;x)$, у которых $0 \leqslant k \leqslant n-p_1-p_2+1$, содержатся по одной в каждой из сумм S_m, $n-p_1-p_2+1 \leqslant m \leqslant n-1$. Поэтому для $0 \leqslant k \leqslant n-p_1-p_2+1$ выполнено $\lambda_k^{(n)} = 1$. Гармоника $A_{n-p_1-p_2+2}(f;x)$ не содержится в одной сумме $1\cdot S_{n-p_1-p_2+1}$, поэтому $\lambda_{n-p_1-p_2+2}^{(n)} = \frac{p_1p_2-1}{p_1p_2} = 1-\frac{1}{p_1p_2}$. Гармоника $A_{n-p_1-p_2+3}(f;x)$ не содержится в трех суммах в $1\cdot S_{n-p_1-p_2+1}$ и в $2\cdot S_{n-p_1-p_2+2}$, поэтому $\lambda_{n-p_1-p_2+3}^{(n)} = \frac{p_1p_2-(1+2)}{p_1p_2} = 1-\frac{(1+2)}{p_1p_2}$. Продолжая по аналогии получаем, что для $1 \leqslant i \leqslant p_1$ выполняется

$$\lambda_{n-p_1-p_2+i}^{(n)} = \frac{p_1p_2-(1+2+3+...+i-1)}{p_1p_2} = \frac{p_1p_2-\frac{(i-1)i}{2}}{p_1p_2} = 1-\frac{(i-1)i}{2p_1p_2}.$$

Поэтому, применяя замену $i = k-n+p_1+p_2$, для $n-p_1-p_2+1 \leqslant k \leqslant n-p_2$ получаем

$$\lambda_k^{(n,\overline{p})} = 1-\frac{(k-n+p_1+p_2)(k-n+p_1+p_2-1)}{2p_1p_2}.$$

Гармоника A_{n-p_2+1} содержится в суммах

$$p_1\cdot S_{n-p_2+1} + ... + p_1\cdot S_{n-p_1} + (p_1-1)\cdot S_{n-p_1+1} + ... + 1\cdot S_{n-1}.$$

Поэтому $\lambda_{n-p_2+1}^{(n)}=\frac{(p_2-p_1)p_1+\frac{(p_1-1)p_1}{2}}{p_1p_2}$.

Гармоника $A_{n-p_2+2}(f;x)$ содержится по одной в каждой из сумм

$$p_1\cdot S_{n-p_2+2}+...+p_1\cdot S_{n-p_1}+(p_1-1)\cdot S_{n-p_1+1}+...+1\cdot S_{n-1}$$

поэтому $\lambda_{n-p_2+2}^{(n,\overline{p})}=\frac{(p_2-p_1-1)p_1+\frac{(p_1-1)p_1}{2}}{p_1p_2}$. Для $0\leqslant i\leqslant p_2-p_1$ гармоника $A_{n-p_2+i}(f;x)$ содержится в суммах

$$p_1\cdot S_{n-p_2+i}+...+p_1\cdot S_{n-p_1}+(p_1-1)\cdot S_{n-p_1+1}+...+1\cdot S_{n-1}.$$

Поэтому $\lambda_{n-p_2+i}^{(n,\overline{p})}=\frac{(p_2-p_1-i+1)p_1+\frac{(p_1-1)p_1}{2}}{p_1p_2}$.

Следовательно, применяя замену $i=k-n+p_2$, для $n-p_2+1\leqslant k\leqslant n-p_1$ получаем

$\lambda_{k}^{(n)}=\frac{(p_2-p_1-k+n-p_2+1)p_1+\frac{(p_1-1)p_1}{2}}{p_1p_2}=\frac{2(n-p_1-k+1)p_1+(p_1-1)p_1}{2p_1p_2}=$

$$=\frac{2(n-p_1-k+1)+(p_1-1)}{2p_2}=1-\frac{2p_2+p_1-1-2(n-k)}{2p_2}$$

$$=1-\frac{2(k-n+p_2)+p_1-1}{2p_2}.$$

Гармоника $A_{n-p_1+1}(f;x)$ содержится в суммах

$$(p_1-1)\cdot S_{n-p_1+1}+(p_1-2)\cdot S_{n-p_1+2}...+1\cdot S_{n-1}$$

поэтому $\lambda_{n-p_1+1}^{(n)}=\frac{\frac{(p_1-1)p_1}{2}}{p_1p_2}$.

Гармоника $A_{n-p_1+2}(f;x)$ содержатся в суммах

$$(p_1-2)\cdot S_{n-p_1+2}+(p_1-3)\cdot S_{n-p_1+3}...+1\cdot S_{n-1}$$

поэтому $\lambda_{n-p_1+2}^{(n,\overline{p})}=\frac{\frac{(p_1-2)(p_1-1)}{2}}{p_1p_2}$ и по аналогии $\lambda_{n-p_1+i}^{(n,\overline{p})}=\frac{\frac{(p_1-i)(p_1-(i-1))}{2}}{p_1p_2}$. Следовательно, применяя замену $i=k-n+p_1$, для $n-p_2+1\leqslant k\leqslant n-p_1$ получаем

$$\lambda_{k}^{(n,\overline{p})}=\frac{(p_1-k+n-p_1)(p_1-k+n-p_1+1)}{p_1p_2}=\frac{(n-k)(n-k+1)}{p_1p_2}.$$

Таким образом, для случая $p_1\leqslant p_2$ элементы суммирующей матрицы повторных методов Валле Пуссена задаются соотношением (2). $\square$

Литература

[1] *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций / А.И. Степанец. — К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.

[2] *Ровенская О.Г.* Приближение интегралов Пуассона повторными суммами Валле Пуссена / О.Г. Ровенская, О.А. Новиков // Нелінійні коливання. — 2010. — Т. 13, № 1. — С. 96 – 99.