УДК 517.5

Новиков О.А., Кондрашина Г.М., Больбат І.А., Маража О.С., Лащенова А.А.

[1] *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, ГВУЗ «ДГПУ»*

[2–5] *студенты 5 курса физико-математического факультета, ГВУЗ «ДГПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Получены элементы суммирующих треугольных матриц операторов повторных методов Валле Пуссена.

Ключевые слова: *ряды Фурье, асимптотические формулы*

Введение

Достаточно общая классификация непрерывных периодических функций по признаку их аппроксимативных свойств на основе учета свойств тригонометрических рядов, полученных преобразованием их рядов Фурье при помощи мультипликатров и сдвигов по аргументу, была построена в работах А.И. Степанца в 1983 году [1].

Аналогичные классификации функций двух и многих переменных были построены в работах П.В. Задерея [2], А.И. Степанца, Н.Л. Пачулиа [3], Р.А. Ласурии [4], В.И. Рукасова, О.А. Новикова, В.И. Бодрой [5]. В этих работах изучаются вопросы приближения прямоугольными линейными методами классов (ψ, β)-дифференцируемых периодических функций многих переменных. Классы (ψ, β)-дифференцируемых функций многих переменных, в этих работах определялись двумя наборами функций-мультипликаторов и сдвигов по аргументу.

В данной статье изучаются аналогичные вопросы на классах (ψ, β)-дифференцируемых функций m переменных, определяемых m наборами мультипликаторов для каждого числа переменных. Получены асимптотические формулы для верхних граней уклонений различных прямоугольных линейных средних рядов Фурье, взятых по классам функций многих переменных малой гладкости в ситуациях, когда доминирующими в определении гладких свойств функций могут оказаться их смешанные производные.

В частности, в таких случаях найдены асимптотические равенства, которые обеспечивают решение задачи Колмогорова–Никольского [1, с. 8] на этих классах для прямоугольных операторов Фурье, классических и обобщенных операторов Зигмунда, методов Валле Пуссена.

Для дальнейшего изложения введем ряд обозначений и определений.

Пусть R^m – пространство m-мерных векторов $\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_m)$, $T^m=\prod\limits_{i=1}^{m}[-\pi;\pi]$ – m-мерный куб с ребром 2π,

$$N^m=\left\{\vec{x}\in R^m|x_i\in N,\ i=1,2,...,m\right\},$$
$$N_*^m=\left\{\vec{x}\in R^m|x_i\in N_*=N\cup\{0\},\ i=1,2,...,m\right\},$$
$$N_i^m=\left\{\vec{x}\in R^m|x_i\in N,\ x_j\in N_*,\ i\neq j\right\}.$$

Через E^m обозначим множество точек из R^m, координаты которых принимают одно из двух значений: 0 или 1.

Через $L(T^m)$ обозначим множество 2π-периодических по каждой переменной, суммируемых на кубе периодов T^m, функций $f(\vec{x})=f(x_1,x_2,...,x_m)$.

Пусть $f\in L(T^m)$. Следуя [1], каждой паре точек $\vec{s}\in E^m$, $\vec{k}\in N_*^m$, поставим в соответствие коэффициент Фурье функции f

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)=\frac{1}{\pi^m}\int_{T^m}f(\vec{x})\prod_{i=1}^{m}\cos\left(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)dx_i.$$

Каждому вектору $\vec{k}\in N_*^m$ поставим в соответствие гармонику ряда Фурье функции $f(\vec{x})$

$$A_{\vec{k}}(f;\vec{x})=\sum_{\vec{s}\in E^m}a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)\prod_{i=1}^{m}\cos\left(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\right).$$

Следуя [3], ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ определим следующим соотношением

$$S[f]=\sum_{\vec{k}\in N_*^m}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}}A_{\vec{k}}(f;\vec{x}),\tag{1}$$

где $q(\vec{k})$ – количество нулевых координат вектора $\vec{k}$.

Пусть $\overline{m}=\{1,2,...,m\}$ и μ – какое-либо подмножество из $\overline{m}$, обозначим через $|\mu|$ количество элементов множества μ и через $\mu(r)$ – всякое r-элементное подмножество из $\overline{m}$ $(|\mu(r)|=r)$.

По аналогии с одномерным случаем, гармоникой, сопряженной с $A_{\vec{k}}(f;\vec{x})$ по переменной x_r, будем называть величину

$$A_{\vec{k}}^{\vec{e}_r}(f;\vec{x})=\sum_{\vec{s}\in E^m}a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)\prod_{i\in\overline{m}\setminus\{r\}}\cos\left(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)\cos\left(k_rx_r-\frac{(s_r+1)\pi}{2}\right).$$

Определим понятие (ψ,β)-производных функций многих переменных, используя схемы введения (ψ,β)-производных функций одной переменной (см. [1]) и обыкновенных частных производных функций многих переменных.

Пусть $\psi_{i,r}(k_i), i=1,2,...,m, r=1,2,...,m,\ k_i\in N_*$ — фиксированные системы чисел, $\vec{\beta_r}=(\beta_{1,r},\beta_{2,r},...,\beta_{m,r})$ – фиксированный набор векторов ($\beta_{i,r}\in\mathbb{R},\ i=1,2,...,m$). Пусть для фиксированного $r\in\overline{m}$ существует функция $\varphi_i^{(1)}\in L(T^m)$ такая, что

$$S[\varphi_i^{(1)}]=\sum_{\vec{k}\in N_i^m}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}\psi_{i,1}(k_i)}\left[A_{\vec{k}}(f;\vec{x})\cos\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}-A_{\vec{k}}^{\vec{e}_i}(f;\vec{x})\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}\right]. \qquad (2)$$

Тогда эту функцию $\varphi_i^{(1)}(\vec{x})$ будем называть частной $(\psi_{i,1};\beta_{i,1})$–производной функции $f(\vec{x})$ по переменной x_i и будем ее обозначать $f_{\beta_{i,1}}^{\psi_{i,1}}(\vec{x})$.

Для фиксированного r–элементного множества $\mu(r)\subset\overline{m}$, $\mu=\{i_1,...,i_r\}$, смешанной $(\psi_{\mu(r)};\beta)$–производной по переменным $x_i,\ i\in\mu(r)$, будем называть функцию $f_\beta^{\psi_{\mu(r)}}(\vec{x})$, рядом Фурье которой является результат последовательного применения формулы (2), только с использованием для определения производной по переменной x_i вместо функций $\psi_{i,1}(k_i)$ и чисел $\beta_{i,1}$ соответственно, функций $\psi_{i,r}(k_i)$ и чисел $\beta_{i,r}$, $i\in\mu(r), r=2,3,...,m$,

$$f_\beta^{\psi_{\mu(r)}}(\vec{x})=\frac{\partial_{\beta_{i_r,r}}^{\psi_{i_r,r}}\partial_{\beta_{i_{r-1},r}}^{\psi_{i_{r-1},r}}...\partial_{\beta_{i_1,r}}^{\psi_{i_1,r}}f(\vec{x})}{\partial x_{i_r}\partial x_{i_{r-1}}...\partial x_{i_1}}.$$

Множество непрерывных функций $f\in C$ таких, что для всех $i\in\overline{m}$ существуют производные $f_{\beta_{i,1}}^{\psi_{i,1}}(\vec{x})$ и для $r=2,3,...,m,\mu(r)\subset\overline{m}$ существуют смешанные $(\psi_{\mu(r)};\beta)$–производные $f_\beta^{\psi_{\mu(r)}}(\vec{x})$, будем обозначать $C_\beta^{m\psi}$. Множество функций из $C_\beta^{m\psi}$, удовлетворяющих условиям

$$\operatorname{esssup}|f_{\beta_{i,1}}^{\psi_{i,1}}(\vec{x})|\leqslant 1,\ \operatorname{esssup}|f_\beta^{\psi_{\mu(r)}}(\vec{x})|\leqslant 1,\ i\in\overline{m},\ \mu\subset\overline{m},$$

будем обозначать $C_{\beta,\infty}^{m\psi}$.

Следуя [1], введем множества $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_0'$, $\mathfrak{M}_C$. Будем полагать, что функции $\psi_{i,r}(v),\ i,r=1,2,...,m;$ являются функциями непрерывного аргумента $v\geqslant 0$, совпадающими при $v\in N_*$ с элементами одноименных систем чисел $\psi_{i,r}(k)$, которые использовались выше для определения классов $C_{\beta,\infty}^{m\psi}$.

Через $\mathfrak{M}$ обозначим множество функций $\psi(x)$, непрерывных при $x\geqslant 0$, монотонно убывающих, выпуклых вниз при $x\geqslant 1$ и исчезающих на бесконечности: $\lim\limits_{x\to\infty}\psi(x)=0$.

Каждой функции $\psi(x)$ поставим в соответствие функцию $\eta(x) = \eta(\psi, x)$, связанную при $x \geqslant 1$ с $\psi(x)$ соотношением $\psi(\eta(x)) = \frac{1}{2}\psi(x)$.

Положим

$$\mu(t) = \mu(\psi, t) = \frac{t}{\eta(t) - t}.$$

Через $\mathfrak{M}_0'$ обозначим множество функций $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых величина $\mu(\psi, t)$ ограничена сверху и выполнено условие

$$\int\limits_1^\infty \frac{\psi(x)}{x} dx < \infty.$$

Следуя [7] (см. также [2–6]), прямоугольные линейные средние рядов Фурье определим следующим образом.

Пусть $\Lambda = \{\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_m\}$ – фиксированный набор суммирующих бесконечных треугольных числовых матриц, $\Lambda_i = \{\lambda_{k_i}^{(n_i)}\}$, $i = 1, 2, ..., m$, $\vec{n} \in N^m$, $\vec{k} \in N_*^m$, $\lambda_0^{(n_i)} = 1$ и $\lambda_{k_i}^{(n_i)} = 0$ для $k_i \geqslant n_i$. Пусть далее $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} = \prod\limits_{i=1}^m \lambda_{k_i}^{(n_i)}$ и $G_{\vec{n}} = \prod\limits_{i=1}^m [0; n_i - 1]$ – прямоугольный параллелепипед, соответствующий вектору $\vec{n} \in N^m$. Заметим, что $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} = 0$ для любых $\vec{k} \notin G_{\vec{n}}$.

Функции $f \in L(T^m)$, имеющей ряд Фурье (1), поставим в соответствие семейство тригонометрических полиномов

$$U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) = \sum_{\vec{k} \in G_{\vec{n}}} 2^{-q(\vec{k})} \lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} A_{\vec{k}}(f; \vec{x}). \tag{3}$$

Если $\lambda_{k_i}^{(n_i)} = 1$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, то соотношение (3) задает прямоугольные частные суммы ряда Фурье $U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) = S_{\vec{n}}(f; \vec{x})$. Пусть $\vec{p} = (p_1, p_2, ..., p_m)$, где $p_i \in N_*$, $p_i \leqslant n_i$, $i = 1, 2, ..., m$. Если величины $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})}$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, $\vec{n} \in N^m$, задаются соотношениями

$$\lambda_{k_i}^{(n_i)} = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant k_i \leqslant n_i - p_i, \\ 1 - \frac{k_i - n_i + p_i}{p_i}, & n_i - p_i \leqslant k_i \leqslant n_i - 1, \, p_i \in N, \, p_i \leqslant n_i, \, i \in \{\overline{1, m}\}, \end{cases}$$

то многочлены $U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) \overset{\mathrm{df}}{=} V_{\vec{n}, \vec{p}}(f; \vec{x})$ являются суммами Валле Пуссена порядка $\vec{p}$.

При $\lambda_{k_i}^{(n_i)} = k_i^{s_i} / n_i^{s_i}$, $s_i > 0$, $i = 1, 2, ..., m$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, многочлены $U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) = Z_{\vec{n}}(f; \vec{x})$ будем называть прямоугольными суммами Зигмунда.

Пусть $\varphi_i(x), i = 1, 2, ..., m$ – непрерывные, монотонно возрастающие при $x \in [0; +\infty)$ такие, что $\varphi_i(0) = 0$. Если величины $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})}$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, $\vec{n} \in N^m$, задаются соотношениями

$$\lambda_{k_i}^{(n_i)} = 1 - \frac{\varphi_i(k_i)}{\varphi_i(n_i)},$$

то многочлены $U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda) = Z_{\vec{n}}^{\varphi}(f;\vec{x})$ принято называть обобщенными прямоугольными суммами Зигмунда.

Величины $\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = f(\vec{x}) - U_{\vec{n}}(f;\vec{x})$ являются уклонениями тригонометрических многочленов $U_{\vec{n}}(f;\vec{x})$, $\vec{n} \in N^m$, от функции $f(\vec{x})$.

Целью данной работы является изучение асимптотического при $n_i \to \infty$, $i = 1, 2, ..., m$, поведения величин

$$\mathcal{E}(C^{m\psi}_{\beta,\infty}; U_{\vec{n}}) = \sup_{f \in C^{m\psi}_{\beta,\infty}} ||\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x})||_C$$

при $n_i \to \infty$, $i = 1, 2, ..., m$, где методы $U_{\vec{n}}$ задаются при помощи разнотипных суммирующих матриц.

Основна часть

Теорема 1. *Пусть* $\psi_{i,j} \in \mathfrak{M}'_0$, $\beta_{i,j} \in R$, $i, j = 1, 2, ..., m$, $\mu_1 \bigcup \mu_2 = \overline{m}$, $\mu_1 \bigcap \mu_2 = \varnothing$. *Пусть для* $i \in \mu_1$,

$$\lambda_{k_i}^{(n_i)} = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant k_i \leqslant n_i - p_i, \\ 1 - \frac{k_i - n_i + p_i}{p_i}, & n_i - p_i \leqslant k_i \leqslant n_i - 1,\, p_i \in N,\, p_i \leqslant n_i,\, i \in \{\overline{1,m}\}, \end{cases}$$

$\lim\limits_{n_i \to \infty} \frac{p_i}{n_i} =$, *а для* $i \in \mu_2$, $\lambda_{k_i}^{(n_i)} = k_i^{s_i}/n_i^{s_i}$, $s_i > 0$, $i = 1, 2, ..., m$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, *функции* $\psi_{i,j}(x)x^{s_i}$, *монотонно возрастают и сохраняют характер выпуклости при* $x \geqslant 1$.

Тогда при $n_i \to \infty$, $i = 1, 2, ..., m$, *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C^{m\psi}_{\beta,\infty}; U_{\vec{n}}\right) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{i \in \mu_1} \psi_{i,1}(n_i) \ln \frac{n_i}{p_i} + \frac{2}{\pi} \sum_{i \in \mu_2} \frac{\sin \frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{n_i^{s_i}} \int\limits_1^{n_i} \psi_{i,1}(x) x^{s_i - 1} dx +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{m} \sin \frac{\beta_{i,1}\pi}{2} \int\limits_{n_i}^{\infty} \frac{\psi_{i,1}(x)}{x} dx + O(1) \left(\sum_{i=1}^{m} \psi_{i,1}(n_i) + \right.$$

$$+ \sum_{r=2}^{m} \sum_{\mu(r) \subset \overline{m}} \prod_{j \in \mu(r) \bigcap \mu_1} \left\{ \psi_{j,r}(n_j) + \psi_{j,r}(n_j) \ln \frac{n_j}{p_j} + \sin \frac{\beta_{j,r}\pi}{2} \int\limits_{n_j}^{\infty} \frac{\psi_{j,r}(x)}{x} dx \right\} \times$$

$$\left. \prod_{j \in \mu(r) \bigcap \mu_2} \left\{ \psi_{j,r}(n_j) + \sin \frac{\beta_{j,r}\pi}{2} \left[\int\limits_1^{n_j} \frac{\psi_{j,r}(x) x^{s_j - 1}}{n_j^{s_j}} dx + \int\limits_{n_j}^{\infty} \frac{\psi_{j,r}(x)}{x} dx \right] \right\} \right). \quad (4)$$

Доказательство. Через $\{\lambda_{n_i}(v)\}$, $\vec{n}=(n_1,n_2,...,n_m)\in N^m$, обозначим семейство заданных и непрерывных на [0;1] функций таких, что $\lambda_{k_i}^{(n_i)}=\lambda_{n_i}(\frac{k_i}{n_i})$, $\vec{k}\in G_{\vec{n}}$.

Введем функции

$$\tau_{i,r}^{(\mu_1)}(v)=\begin{cases}0, & 0\leqslant v\leqslant \frac{n_i-p_i}{n_i};\\ \frac{n_i(v-1)+p_1}{p_i}\psi_{i,r}(n_iv), & \frac{n_i-p_i}{n_i}\leqslant v\leqslant 1;\\ \psi_{i,r}(n_iv), & 1\leqslant v, i=1,2,...,m;\end{cases} \tag{5}$$

$$\tau_{i,r}^{(\mu_2)}(v)=\begin{cases}\frac{\varphi_i(1)\psi_{i,r}(1)}{\varphi_i(n_i)}vn_i, & 0\leqslant v\leqslant \frac{1}{n_i};\\ \frac{\varphi_i(n_iv)\psi_{i,r}(n_iv)}{\varphi_i(n_i)}, & \frac{1}{n_i}\leqslant v\leqslant 1;\\ \psi_{i,r}(n_iv), & 1\leqslant v, i=1,2,...,m.\end{cases} \tag{6}$$

Пусть

$$\tau_{i,r}(v)=\begin{cases}\tau_{i,r}^{(\mu_1)}(v), & i\in\mu_1;\\ \tau_{i,r}^{(\mu_2)}(v), & i\in\mu_2.\end{cases}$$

В работе [5] показано, что для верхних граней уклонений многочленов $U_{\vec{n}}(f,\vec{x})$ на класах $C_{\beta,\infty}^{m\psi}$ при помощи функций $\tau_{i,r}^{(\mu_1)}$, $\tau_{i,r}^{(\mu_2)}$, $i,r=1,2,...,m$, заданных соотношениеми (5), (6) при $n_i\to\infty$, $i=1,2,...,m$, можно записать:

$$\mathcal{E}\Big(C_{\beta,\infty}^{m\psi};U_{\vec{n}}\Big)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_{1}^{\infty}\psi_{i,1}(n_ix)\sin xtdx\right|dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant 1}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,1}(x)\cos(xt+\frac{\beta_{i,1}\pi}{2})dx\right|dt+O(1)\Big(\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,1}(x)\cos xtdx\right|dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_{0}^{1}\tau_{i,1}(x)\sin xtdx\right|dt+\sum_{i=1}^{m}a(\tau_{i,1})+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}A(\tau_{j,r})\Big),$$

где

$$a(\tau_{i,1})=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant\frac{\pi n_i}{2}}^{\infty}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,1}(x)\cos(xt+\frac{\beta_{i,1}\pi}{2})dx\right|dt.$$

Поэтому

$$\mathcal{E}\Big(C_{\beta,\infty}^{m\psi};U_{\vec{n}}\Big)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_{1}^{\infty}\psi_{i,1}(n_ix)\sin xtdx\right|dt+$$

$$+\sum_{i\in\mu_1}\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant 1}\left|\int\limits_0^\infty \tau_{i,1}^{(\mu_1)}(x)\cos(xt+\frac{\beta_{i,1}\pi}{2})dx\right|dt+$$

$$+\sum_{i\in\mu_2}\int\limits_{|t|\geqslant 1}\left|\int\limits_0^\infty \frac{\tau_{i,1}^{(\mu_2)}(x)}{\pi}\cos(xt+\frac{\beta_{i,1}\pi}{2})dx\right|dt+O(1)\Big(\sum_{i\in\mu_1}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_0^\infty \tau_{i,1}^{(\mu_1)}(x)\cos xtdx\right|dt+$$

$$+\sum_{i\in\mu_2}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_0^\infty \tau_{i,1}^{(\mu_2)}(x)\cos xtdx\right|dt+\sum_{i\in\mu_1}\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_0^1 \tau_{i,1}^{(\mu_1)}(x)\sin xtdx\right|dt+$$

$$+\sum_{i\in\mu_2}\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_0^1 \tau_{i,1}^{(\mu_2)}(x)\sin xtdx\right|dt+\sum_{i=1}^m a(\tau_{i,1})+$$

$$+\sum_{r=2}^m\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)\bigcap\mu_1}A(\tau_{j,r}^{(\mu_1)})\prod_{j\in\mu(r)\bigcap\mu_2}A(\tau_{j,r}^{(\mu_2)})\Big). \qquad (7)$$

Применяя рассуждения работы [8], получаем асимптотические формулы

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_1^\infty \psi_{i,1}(n_ix)\sin xtdx\right|dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_{n_i}^\infty\frac{\psi_{i,1}(x)}{x}dx+O(1)\psi_{i,1}(n_i),$$

для $i\in\mu_1$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant 1}\left|\int\limits_0^\infty \tau_{i,1}^{(\mu_1)}(x)\cos(xt+\frac{\beta_{i,1}\pi}{2})dx\right|dt=\frac{4}{\pi^2}\psi_{i,r}(n_i)\ln\frac{n_i}{p_i}+O(1)\psi_{i,1}(n_i),$$

$$A(\tau_{i,r}^{(\mu_1)})=O(1)\left(\sin\frac{\beta_{i,r}\pi}{2}\int\limits_{n_i}^\infty\frac{\psi_{i,r}(x)}{x}dx+\psi_{i,r}(n_i)\ln\frac{n_i}{p_i}+\psi_{i,r}(n_i)\right),$$

$$a(\tau_{i,1}^{(\mu_1)})=O(1)\psi_{i,1}(n_i),\quad \int\limits_{|t|<1}\left|\int\limits_0^\infty \tau_{i,1}^{(\mu_1)}(v)\cos vtdv\right|dt=O(1)\psi_{i,1}(n_i),$$

$$\int\limits_{|t|\geqslant 1}\left|\int\limits_0^\infty \tau_{i,1}^{(\mu_1)}(x)\cos xtdx=O(1)\psi_{i,1}(n_i),\quad \int\limits_{|t|\leqslant 1}\right|\int\limits_0^1 \tau_{i,1}^{(\mu_1)}(x)\sin xtdx=O(1)\psi_{i,1}(n_i),$$

для $i \in \mu_2$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant 1}\left|\int\limits_0^\infty \tau_{i,1}^{(\mu_2)}(x)\cos(xt+\frac{\beta_{i,1}\pi}{2})dx\right|dt=\frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{n_i^{s_i}}\int\limits_1^{n_i}\psi_{i,1}(x)x^{s_i-1}dx+O(1)\psi_{i,1}(n_i),$$

$$A(\tau_{i,r}^{(\mu_2)})=O(1)\left(\sin\frac{\beta_{i,r}\pi}{2}\int\limits_{n_i}^\infty\frac{\psi_{i,r}(x)}{x}dx+\frac{\sin\frac{\beta_{i,r}\pi}{2}}{n_i^{s_i}}\int\limits_1^{n_i}\psi_{i,r}(x)x^{s_i-1}dx+\psi_{i,r}(n_i)\right),$$

$$\int\limits_{|t|<1}\left|\int\limits_0^\infty\tau_{i,1}^{(\mu_2)}(v)\cos vtdv\right|dt=O(1)\psi_{i,1}(n_i),a(\tau_{i,1}^{(\mu_2)})=O(1)\psi_{i,1}(n_i),$$

$$\int\limits_{|t|\geqslant 1}\left|\int\limits_0^\infty\tau_{i,1}^{(\mu_2)}(x)\cos xtdx=O(1)\psi_{i,1}(n_i),\int\limits_{|t|\leqslant 1}\right|\int\limits_0^1\tau_{i,1}^{(\mu_2)}(x)\sin xtdx=O(1)\psi_{i,1}(n_i).$$

Подставляя эти соотношения в формулу (7), получаем асимптотическую формулу (4). $\square$

Применяя аналогичные рассуждения, получаем следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть* $\psi_{i,r}\in\mathfrak{M}_0'$, $\beta_{i,r}\in R$, $i,r=1,2,...,m$, $\mu_1\bigcup\mu_2=\overline{m}$, $\mu_1\bigcap\mu_2=\varnothing$, *функции* $\psi_{i,r}(x)x^{s_i}$, $i\in\mu_1$, *монотонно возрастают и сохраняют характер выпуклости, а для* $i\in\mu_2, j=1,2,...,m$; *монотонно убывают и выпуклы вниз при* $x\geqslant 1$.
Тогда при $n_i\to\infty$, $i=1,2,...,m$, *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^{m\psi};Z_{\vec{n}}^{\vec{s}}\right)=\sum_{i\in\mu_2}\frac{1}{n_i^{s_i}}\sup_{f\in C_{\beta_{i,1},\infty}^{\psi_{i,1}}}\left\|f^{(s_i)}\right\|_C+\frac{2}{\pi}\sum_{i\in\mu_1}\frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{n_i^{s_i}}\int\limits_1^{n_i}\psi_{i,1}(x)x^{s_i-1}dx+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^m\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}\int\limits_{n_i}^\infty\frac{\psi_{i,1}(x)}{x}dx+O(1)\left(\sum_{i=1}^m\psi_{i,1}(n_i)+\right.$$

$$+\sum_{r=2}^m\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)\bigcap\mu_1}\left[\frac{1}{n_j^{s_j}}\int\limits_1^{n_j}\psi_{j,r}(x)x^{s_j-1}dx+\int\limits_{n_j}^\infty\frac{\psi_{j,r}(x)}{x}dx+\psi_{j,r}(n_j)\right]\times$$

$$\left.\times\prod_{j\in\mu(r)\bigcap\mu_2}\left[\frac{1}{n_j^{s_j}}+\int\limits_{n_j}^\infty\frac{\psi_{j,r}(x)}{x}dx\right]\right).$$

где $f^{(s_i)}(x)$ *производная функции* $f(x)$ *в смысле Вейля порядка* $s_i>0$.

Теорема 3. *Пусть* $\psi_{i,r} \in \mathfrak{M}'_0$, $\beta_{i,r} \in R$, $i,r = 1,2,...,m$, $\mu_1 \bigcup \mu_2 = \overline{m}$, $\mu_1 \bigcap \mu_2 = \varnothing$, *для* $i \in \mu_1$ *выполнено условие* $\lim_{n_i \to \infty} \frac{p_i}{n_i} = 0$, *а для* $i \in \mu_2$, $p_i = n_i$.
Тогда при $n_i \to \infty$, $i = 1,2,...,m$, *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C^{m\psi}_{\beta,\infty}; V_{\vec{n},\vec{p}}\right) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{i\in\mu_1}\psi_{i,1}(n_i)\ln\frac{n_i}{p_i} + \sum_{i\in\mu_2}\frac{1}{n_i}\sup_{f\in C^{\psi_{i,1}}_{\beta_{i,1},\infty}}\|f'\|_C +$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}\int\limits_{n_i}^{\infty}\frac{\psi_{i,1}(x)}{x}dx + O(1)\Bigg(\sum_{i=1}^{m}\psi_{i,1}(n_i) +$$

$$+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)\bigcap\mu_1}\left[\psi_{j,r}(n_j)\ln\frac{n_j}{p_j} + \int\limits_{n_j}^{\infty}\frac{\psi_{j,r}(x)}{x}dx + \psi_{j,r}(n_j)\right]\times$$

$$\times\prod_{j\in\mu(r)\bigcap\mu_2}\left[\frac{1}{n_j} + \int\limits_{n_j}^{\infty}\frac{\psi_{j,r}(x)}{x}dx\right]\Bigg).$$

Теорема 4. *Пусть* $\psi_{i,r} \in \mathfrak{M}'_0$, $\beta_{i,r} \in R$, $i,j = 1,2,...,m$, $\mu_1 \bigcup \mu_2 = \overline{m}$, $\mu_1 \bigcap \mu_2 = \varnothing$ *функции* $\psi_{i,r}(x)x^{s_i}$, $i \in \mu_1$, *монотонно возрастают и сохраняют характер выпуклости, а для* $i \in \mu_2, j = 1,2,...,m$; *монотонно убывают и выпуклы вниз при* $x \geqslant 1$.
Тогда при $n_i \to \infty$, $i = 1,2,...,m$, *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C^{m\psi}_{\beta,\infty}; Z^{\varphi}_{\vec{n}}\right) = \sum_{i\in\mu_2}\frac{1}{n_i^{s_i}}\sup_{f\in C^{\psi_{i,1}}_{\beta_{i,1},\infty}}\left\|f^{(\varphi_i)}\right\|_C + \frac{2}{\pi}\sum_{i\in\mu_1}\frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{\varphi_i(n_i)}\int\limits_{1}^{n_i}\frac{\psi_{i,1}(x)\varphi_i(x)}{x}dx +$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}\int\limits_{n_i}^{\infty}\frac{\psi_{i,1}(x)}{x}dx + O(1)\Bigg(\sum_{i=1}^{m}\psi_{i,1}(n_i) +$$

$$+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)\bigcap\mu_1}\left[\frac{1}{\varphi_i(n_j)}\int\limits_{1}^{n_j}\frac{\psi_{j,r}(x)\varphi_j(x)}{x}dx + \int\limits_{n_j}^{\infty}\frac{\psi_{j,r}(x)}{x}dx + \psi_{j,r}(n_j)\right]\times$$

$$\times\prod_{j\in\mu(r)\bigcap\mu_2}\left[\frac{1}{n_j^{s_j}} + \int\limits_{n_j}^{\infty}\frac{\psi_{j,r}(x)}{x}dx\right]\Bigg),$$

где

$$S[f^{\varphi_i}] = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_i(k) A_k(f; x).$$

Литература

[1] *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций / А.И. Степанец. — К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.

[2] *Задерей П.В.* Интегральные представления уклонений линейных средних рядов Фурье на классах дифференцируемых периодических функций двух переменных / П.В. Задерей // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций: Сб. научн. трудов. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1985. — С. 16 – 28.

[3] *Степанец А.И.* Кратные суммы Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций / А.И. Степанец, Н.Л. Пачулиа // Укр. мат. журнал. — 1991. — 43, № 4. — С. 545 – 555.

[4] *Ласурия Р.А.* Кратные суммы Фурье на множествах $\overline{\psi}$-дифференцируемых функций / Р.А. Ласурия // Укр. мат. журнал. — 2003. — 55, № 7. — С. 911 – 918.

[5] *Рукасов В.И.* Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных прямоугольными линейными средними их рядов Фурье / В.И. Рукасов, О.А. Новиков, В.И. Бодрая // Укр. мат. журнал. — 2005. — 57, № 4. — С. 564 – 570.

[6] *Рукасов В.И.* Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций двух переменных линейными методами / В.И. Рукасов, О.А. Новиков, В.И. Бодрая // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т. 1, № 1. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. — С. 250 – 269.

[7] *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. — К.: Наук. думка, 1981. — 340 с.

[8] *Рукасов В.И.* Приближение функций с небольшой гладкостью из классов $C^{\overline{\psi}}_{\infty}$ линейными методами / В.И. Рукасов, О.А. Новиков // Теорія наближень та гармонічний аналіз: праці Українського математичного конгресу. — 2001. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. — С. 184 – 193.

[9] *Бодрая В.И.* Приближение классов периодических функций многих переменных с малой гладкостью прямоугольными линейными средними их рядов Фурье / В.И. Бодрая // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т. 2, № 2. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. — С. 7 – 26.