УДК 517.5

Бодрая В.И., Новиков О.А., Прокопчук А.Г., Куценко А.А., Кушнир Т.В.

[1] *асистент каф. высшей математики, Киевский национальный университет технологий и дизайна*

[2] *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, ГВУЗ «ДГПУ»*

[3–5] *студенты 5 курса физико-математического факультета, ГВУЗ «ДГПУ»*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФАВАРА И ФЕЙЕРА

Получены элементы суммирующих треугольных матриц операторов повторных методов Валле Пуссена.

Ключевые слова: *ряды Фурье, асимптотические формулы*

Введение

Классификация непрерывных периодических функций по признаку их аппроксимативных свойств на основе учета свойств тригонометрических рядов, полученных преобразованием их рядов Фурье при помощи мультипликаторов и сдвигов по аргументу, была предложена в работах А.И. Степанца в 1983 году [1].

Аналогичные классификации функций многих переменных были построены и применены в работах П.В. Задерея [2], А.И. Степанца, Н.Л. Пачулиа [3], Р.А. Ласурии [4], В.И. Рукасова, О.А. Новикова, В.И. Бодрой [5]. В этих работах изучаются вопросы приближения различными прямоугольными линейными методами классов (ψ, β)-дифференцируемых периодических функций многих переменных. Классы (ψ, β)-дифференцируемых функций многих переменных, в этих работах определялись двумя наборами функций-мультипликаторов и сдвигов по аргументу.

В работе [6] введены классы (ψ, β)-дифференцируемых функций m переменных, определяемых m наборами мультипликаторов (своим для каждого числа переменных).

В данной статье изучаются вопросы приближения элементов таких классов прямоугольными операторами Фавара и Фейера.

Пусть R^m – пространство m-мерных векторов $\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_m)$, $T^m=\prod\limits_{i=1}^{m}[-\pi;\pi]$ – m-мерный куб с ребром 2π,

$$\begin{aligned}
N^m &= \left\{\vec{x}\in R^m | x_i\in N,\ i=1,2,...,m\right\},\\
N_*^m &= \left\{\vec{x}\in R^m | x_i\in N_*=N\cup\{0\},\ i=1,2,...,m\right\},\\
N_i^m &= \left\{\vec{x}\in R^m | x_i\in N,\ x_j\in N_*,\ i\neq j\right\},\\
E^m &= \left\{\vec{x}\in N^m | x_i\in N,\ x_i\in\{0;1\}\right\}.
\end{aligned}$$

Через $L(T^m)$ обозначим множество 2π-периодических по каждой переменной, суммируемых на кубе T^m, функций $f(\vec{x})=f(x_1,x_2,...,x_m)$.

Следуя [1], каждой паре точек $\vec{s}\in E^m$, $\vec{k}\in N_*^m$, поставим в соответствие коэффициент Фурье функции $f\in L(T^m)$

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)=\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m}f(\vec{x})\prod_{i=1}^{m}\cos\left(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)dx_i.$$

Каждому вектору $\vec{k}\in N_*^m$ поставим в соответствие величину

$$A_{\vec{k}}(f;\vec{x})=\sum_{\vec{s}\in E^m}a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)\prod_{i=1}^{m}\cos\left(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\right).$$

Тогда, следуя [3], ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ задается соотношением

$$S[f]=\sum_{\vec{k}\in N_*^m}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}}A_{\vec{k}}(f;\vec{x}), \tag{1}$$

где $q(\vec{k})$ – количество нулевых координат вектора $\vec{k}$.

Пусть $\overline{m}=\{1,2,...,m\}$ и μ – какое-либо подмножество из $\overline{m}$, обозначим через $|\mu|$ количество элементов множества μ и через $\mu(r)$ – всякое r-элементное подмножество из $\overline{m}$ ($|\mu(r)|=r$).

Гармоникой, сопряженной с $A_{\vec{k}}(f;\vec{x})$ по переменной x_r, будем называть величину

$$A_{\vec{k}}^{\vec{e}_r}(f;\vec{x})=\sum_{\vec{s}\in E^m}a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)\prod_{i\in\overline{m}\setminus\{r\}}\cos\left(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)\cos\left(k_rx_r-\frac{(s_r+1)\pi}{2}\right).$$

Следуя работе [6] введем понятие (ψ,β)-производных функций многих переменных следующим образом.

Пусть $\psi_{i,r}(k_i), i=1,2,...,m, r=1,2,...,m,\ k_i\in N_*$ — фиксированные системы чисел, $\vec{\beta}_r=(\beta_{1,r},\beta_{2,r},...,\beta_{m,r})$ – фиксированный набор векторов

($\beta_{i,r} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., m$). Пусть для фиксированного $r \in \overline{m}$ существует функция $\varphi_i \in L(T^m)$ такая, что

$$S[\varphi_i] = \sum_{\vec{k} \in N_i^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})} \psi_{i,1}(k_i)} \left[A_{\vec{k}}(f; \vec{x}) \cos \frac{\beta_{i,1}\pi}{2} - A_{\vec{k}}^{\vec{e}_i}(f; \vec{x}) \sin \frac{\beta_{i,1}\pi}{2} \right].$$

Тогда будем считать, что $f(\vec{x})$ имеет частную $(\psi_{i,1}; \beta_{i,1})$–производную по переменной x_i, функцию $\varphi_i(\vec{x})$, которую будем обозначать $f_{\beta_{i,1}}^{\psi_{i,1}}(\vec{x})$.

Для фиксированного множества $\mu(r) \subset \overline{m}$, $\mu = \{i_1, i_2, ..., i_r\}$, смешанной $(\psi_{\mu(r)}; \beta)$–производной по переменным x_i, $i \in \mu(r)$, будем называть функцию

$$f_{\beta}^{\psi_{\mu(r)}}(\vec{x}) = \frac{\partial_{\beta_{i_r,r}}^{\psi_{i_r,r}} \partial_{\beta_{i_{r-1},r}}^{\psi_{i_{r-1},r}} ... \partial_{\beta_{i_1,r}}^{\psi_{i_1,r}} f(\vec{x})}{\partial x_{i_r} \partial x_{i_{r-1}} ... \partial x_{i_1}}.$$

Множество непрерывных функций $f \in C$ таких, что для всех $i \in \overline{m}$ существуют производные $f_{\beta_{i,1}}^{\psi_{i,1}}(\vec{x})$ и для $r = 2, 3, ..., m, \mu(r) \subset \overline{m}$, существуют смешанные $(\psi_{\mu(r)}; \beta)$–производные $f_{\beta}^{\psi_{\mu(r)}}(\vec{x})$, которые удовлетворяют условиям

$$\operatorname{esssup} |f_{\beta_{i,1}}^{\psi_{i,1}}(\vec{x})| \leqslant 1, \ \operatorname{esssup} |f_{\beta}^{\psi_{\mu(r)}}(\vec{x})| \leqslant 1, \ i \in \overline{m}, \ \mu \subset \overline{m},$$

будем обозначать $C_{\beta,\infty}^{m\psi}$.

Через $\mathfrak{M}$ обозначим множество функций $\psi(x)$, непрерывных при $x \geqslant 0$, монотонно убывающих, выпуклых вниз при $x \geqslant 1$ и исчезающих на бесконечности: $\lim\limits_{x \to \infty} \psi(x) = 0$.

Через $\mathfrak{M}'$ обозначим подмножество функций $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых выполнено $\int\limits_1^{\infty} \psi(x)/x dx < \infty$.

Каждой функции $\psi(x)$ поставим в соответствие функцию $\eta(x)$, связанную при $x \geqslant 1$ с $\psi(x)$ соотношением $\psi(\eta(x)) = \frac{1}{2}\psi(x)$.

Положим

$$\mu(t) = \mu(\psi, t) = \frac{t}{\eta(t) - t}.$$

Через $\mathfrak{M}_0'$ обозначим множество функций $\psi \in \mathfrak{M}'$, для которых величина $\mu(\psi, t)$ ограничена сверху.

Следуя [7], прямоугольные линейные средние рядов Фурье определим следующим образом.

Пусть $\Lambda = \{\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_m\}$ – фиксированный набор бесконечных треугольных числовых матриц, $\Lambda_i = \{\lambda_{k_i}^{(n_i)}\}$, $i = 1, 2, ..., m$, $\vec{n} \in N^m$, $\vec{k} \in N_*^m$,

$\lambda_0^{(n_i)} = 1$ и $\lambda_{k_i}^{(n_i)} = 0$ для $k_i \geqslant n_i$. Пусть далее $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} = \prod\limits_{i=1}^{m} \lambda_{k_i}^{(n_i)}$ и $G_{\vec{n}} = \prod\limits_{i=1}^{m} [0; n_i - 1]$. Так, что $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} = 0$ для любых $\vec{k} \notin G_{\vec{n}}$.

Функции $f \in L(T^m)$, имеющей ряд Фурье (1), поставим в соответствие семейство тригонометрических полиномов

$$U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) = \sum_{\vec{k} \in G_{\vec{n}}} 2^{-q(\vec{k})} \lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} A_{\vec{k}}(f; \vec{x}). \tag{2}$$

При $\lambda_{k_i}^{(n_i)} = k_i/n_i$, $i = 1, 2, ..., m$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, многочлены $U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) = \sigma_{\vec{n}}(f; \vec{x})$ будем называть прямоугольными суммами Фейера.

Суммами Фавара порядка $\vec{r} = (r_1, r_2, ..., r_m)$ будем называть полиномы $U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \tilde{\Lambda}) = \Phi_{\vec{n},\vec{r}}(f; \vec{x})$, которые определяются треугольными матрицами $\tilde{\Lambda}_i$, $i = 1, 2, ..., m$, с элементами

$$\tilde{\lambda}_{k_i, r_i}^{(n_i)} = \begin{cases} 1 - k_i^{r_i} \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \left(\frac{1}{(2\nu n_i - k_i)^{r_i}} + \frac{1}{(2\nu n_i + k_i)^{r_i}} \right), & r_i = 2l,\ l \in N, \\ 1 - k_i^{r_i} \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2\nu n_i - k_i)^{r_i}} - \frac{1}{(2\nu n_i + k_i)^{r_i}} \right), & r_i = 2l - 1,\ l \in N. \end{cases} \tag{3}$$

Величины $\delta_{\vec{n}}(f; \vec{x}) = f(\vec{x}) - U_{\vec{n}}(f; \vec{x})$ являются уклонениями тригонометрических многочленов $U_{\vec{n}}(f; \vec{x})$, $\vec{n} \in N^m$, от функции $f(\vec{x})$.

Целью данной работы является изучение асимптотического при $n_i \to \infty$, $i = 1, 2, ..., m$, поведения величин

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{m\psi}; U_{\vec{n}}) = \sup_{f \in C_{\beta,\infty}^{m\psi}} ||\delta_{\vec{n}}(f; \vec{x})||_C$$

при $n_i \to \infty$, $i = 1, 2, ..., m$, где методы $U_{\vec{n}}$ задаются при помощи суммирующих матриц разных типов.

Основна часть

Теорема 1. *Пусть* $\psi_{i,j} \in \mathfrak{M}'_0$, $\beta_{i,j} \in R$, $\mu_1 \bigcup \mu_2 = \overline{m}$, $\mu_1 \bigcap \mu_2 = \varnothing$. *Пусть для* $i \in \mu_1$, *выполнено* $r_i = 1$, *величины* $\lambda_{k_i}^{(n_i)}$ *определяются соотношением (3), функции* $\psi_{i,j}(x)x^2$, *монотонно возрастают и сохраняют характер выпуклости при* $x \geqslant 1$, *для* $i \in \mu_2$, $\lambda_{k_i}^{(n_i)} = k_i/n_i$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, *функции* $\psi_{i,j}(x)x$, *монотонно возрастают и сохраняют характер выпуклости при* $x \geqslant 1$. *Тогда при* $n_i \to \infty$, $i = 1, 2, ..., m$, *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^{m\psi}; U_{\vec{n}}\right) = \frac{\pi}{6} \sum_{i \in \mu_1} \frac{\sin \frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{n_i^2} \int\limits_1^{n_i} \psi_{i,1}(x) x dx + \frac{2}{\pi} \sum_{i \in \mu_2} \frac{\sin \frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{n_i} \int\limits_1^{n_i} \psi_{i,1}(x) dx +$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}\int\limits_{n_i}^{\infty}\frac{\psi_{i,1}(x)}{x}dx+O(1)\Bigg(\sum_{i=1}^{m}\psi_{i,1}(n_i)+$$

$$+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)\bigcap\mu_1}\left\{\psi_{j,r}(n_j)+\sin\frac{\beta_{j,r}\pi}{2}\left[\int\limits_{1}^{n_j}\frac{\psi_{j,r}(x)x}{n_j^2}dx+\int\limits_{n_j}^{\infty}\frac{\psi_{j,r}(x)}{x}dx\right]\right\}\times$$

$$\times\prod_{j\in\mu(r)\bigcap\mu_2}\left\{\psi_{j,r}(n_j)+\sin\frac{\beta_{j,r}\pi}{2}\left[\frac{1}{n_j}\int\limits_{1}^{n_j}\psi_{j,r}(x)dx+\int\limits_{n_j}^{\infty}\frac{\psi_{j,r}(x)}{x}dx\right]\right\}\Bigg). \qquad (4)$$

Доказательство. Через $\{\lambda_{n_i}(v)\}$, $\vec{n}=(n_1,n_2,...,n_m)\in N^m$, обозначим семейство непрерывных на [0;1] суммирующих функций так, что $\lambda_{k_i}^{(n_i)}=\lambda_{n_i}(\frac{k_i}{n_i})$, $\vec{k}\in G_{\vec{n}}$.

Введем функции

$$\tau_{i,r}(v)=\begin{cases}(1-\lambda_{n_i}(v))\psi_{i,r}(n_iv), & \frac{1}{n_i}\leqslant v\leqslant 1;\\ \psi_{i,r}(n_iv), & 1\leqslant v, i=1,2,...,m;\end{cases} \qquad (5)$$

которые на $[0;\frac{1}{n_i}]$ заданы так, что $\tau_{i,r}(v)$ непрерывны на положительной полуоси и выполнено условие $\tau_{i,r}(0)=0$, $i,r=1,2,...,m$.

Известно [5], что функций $\tau_{i,r}$, $i,r=1,2,...,m$, заданных соотношенем (5) в которых для метода Фейера $\lambda_{n_i}(v)=v$ и для метода Фавара при $r_i=1$ $\lambda_{n_i}(v)=\frac{\pi v}{2}\mathrm{ctg}\frac{\pi v}{2}$, таковы, что

$$A(\tau_{i,r})=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,r}(x)\cos(xt+\frac{\beta\pi}{2})dx\right|dt<\infty,$$

и при $n_i\to\infty$, $i=1,2,...,m$, справедливо равенство:

$$\mathcal{E}\Big(C_{\beta,\infty}^{m\psi};U_{\vec{n}}\Big)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_{1}^{\infty}\psi_{i,1}(n_ix)\sin xtdx\right|dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant 1}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,1}(x)\cos(xt+\frac{\beta_{i,1}\pi}{2})dx\right|dt+O(1)\Bigg(\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,1}(x)\cos xtdx\right|dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_{0}^{1}\tau_{i,1}(x)\sin xtdx\right|dt+\sum_{i=1}^{m}a(\tau_{i,1})+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}A(\tau_{j,r})\Bigg),$$

где

$$a(\tau_{i,1})=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant\frac{\pi n_i}{2}}^{\infty}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,1}(x)\cos(xt+\frac{\beta_{i,1}\pi}{2})dx\right|dt.$$

Введем функции

$$\tau_{i,r}^{(\mu_1)}(v)=\begin{cases} n_i v\psi_{i,r}(1)\sum_{j=0}^{\infty}c_j n_i^{-2j}, & 0\leqslant v\leqslant\frac{1}{n_i};\\ v^2\psi_{i,r}(n_i v)\sum_{j=0}^{\infty}c_j v^{2j}, & \frac{1}{n_i}\leqslant v\leqslant 1;\\ \psi_{i,r}(n_i v), & 1\leqslant v, i=1,2,...,m,\end{cases} \tag{5}$$

где

$$c_j=\frac{\prod_{k=0}^{j}(2j+1)}{(2j+1)!}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2}{(2\nu)^{2j+2}};$$

$$\tau_{i,r}^{(\mu_2)}(v)=\begin{cases} \frac{\varphi_i(1)\psi_{i,r}(1)}{\varphi_i(n_i)}vn_i, & \frac{1}{n_i}\leqslant v\leqslant\frac{1}{n_i};\\ \frac{\varphi_i(n_i x)\psi_{i,r}(n_i v)}{\varphi_i(n_i)}, & \frac{1}{n_i}\leqslant v\leqslant 1;\\ \psi_{i,r}(n_i v), & 1\leqslant v, i=1,2,...,m.\end{cases} \tag{6}$$

Пусть

$$\tau_{i,r}(v)=\begin{cases}\tau_{i,r}^{(\mu_1)}(v), & i\in\mu_1;\\ \tau_{i,r}^{(\mu_2)}(v), & i\in\mu_2.\end{cases}$$

Тогда

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^{m\psi};U_{\vec{n}}\right)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_{1}^{\infty}\psi_{i,1}(n_i x)\sin xtdx\right|dt+$$

$$+\sum_{i\in\mu_1}\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant 1}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,1}^{(\mu_1)}(x)\cos(xt+\frac{\beta_{i,1}\pi}{2})dx\right|dt+$$

$$+\sum_{i\in\mu_2}\int\limits_{|t|\geqslant 1}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\tau_{i,1}^{(\mu_2)}(x)}{\pi}\cos(xt+\frac{\beta_{i,1}\pi}{2})dx\right|dt+O(1)\Bigg(\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,1}(x)\cos xtdx\right|dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_{0}^{1}\tau_{i,1}(x)\sin xtdx\right|dt+\sum_{i=1}^{m}a(\tau_{i,1})+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}A(\tau_{j,r})\Bigg). \tag{6}$$

Применяя рассуждения работ [6], [8], получаем асимптотические формулы

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant 1}\left|\int\limits_1^{\infty}\psi_{i,1}(n_i x)\sin xtdx\right|dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_{n_i}^{\infty}\frac{\psi_{i,1}(x)}{x}dx+O(1)\psi_{i,1}(n_i),$$

для $i\in\mu_1$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant 1}\left|\int\limits_0^{\infty}\tau_{i,1}^{(\mu_1)}(x)\cos(xt+\frac{\beta_{i,1}\pi}{2})dx\right|dt=\frac{\pi}{6}\frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{n_i^2}\int\limits_1^{n_i}\psi_{i,1}(x)xdx+O(1)\psi_{i,1}(n_i),$$

$$A(\tau_{i,r}^{(\mu_1)})=$$

$$=O(1)\left(\sin\frac{\beta_{i,r}\pi}{2}\int\limits_{n_i}^{\infty}\frac{\psi_{i,r}(x)}{x}dx+\frac{\pi}{6}\frac{\sin\frac{\beta_{i,r}\pi}{2}}{n_i^2}\int\limits_1^{n_i}\psi_{i,r}(x)xdx+O(1)\psi_{i,r}(n_i)\right),$$

$$a(\tau_{i,1}^{(\mu_1)})=O(1)\psi_{i,1}(n_i),\int\limits_{|t|<1}\left|\int\limits_0^{\infty}\tau_{i,1}^{(\mu_1)}(v)\cos vtdv\right|dt=O(1)\psi_{i,1}(n_i),$$

для $i\in\mu_2$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant 1}\left|\int\limits_0^{\infty}\tau_{i,1}^{(\mu_2)}(x)\cos(xt+\frac{\beta_{i,1}\pi}{2})dx\right|dt=\frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{n_i}\int\limits_1^{n_i}\psi_{i,1}(x)dx+O(1)\psi_{i,1}(n_i),$$

$$A(\tau_{i,r}^{(\mu_2)})=O(1)\left(\sin\frac{\beta_{i,r}\pi}{2}\int\limits_{n_i}^{\infty}\frac{\psi_{i,r}(x)}{x}dx+\frac{\sin\frac{\beta_{i,r}\pi}{2}}{n_i}\int\limits_1^{n_i}\psi_{i,r}(x)dx+\psi_{i,r}(n_i)\right),$$

$$\int\limits_{|t|<1}\left|\int\limits_0^{\infty}\tau_{i,1}^{(\mu_2)}(v)\cos vtdv\right|dt=O(1)\psi_{i,1}(n_i),a(\tau_{i,1}^{(\mu_2)})=O(1)\psi_{i,1}(n_i),$$

$$\int\limits_{|t|\geqslant 1}\left|\int\limits_0^{\infty}\tau_{i,1}(x)\cos xtdx=O(1)\psi_{i,1}(n_i),\int\limits_{|t|\leqslant 1}\right|\int\limits_0^{1}\tau_{i,1}(x)\sin xtdx=O(1)\psi_{i,1}(n_i).$$

Подставляя эти соотношения в формулу (6), получаем асимптотическую формулу (4). □

Литература

[1] *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций / А.И. Степанец. — К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.

[2] *Задерей П.В.* Интегральные представления уклонений линейных средних рядов Фурье на классах дифференцируемых периодических функций двух переменных / П.В. Задерей // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций: сб. научн. трудов. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1985. — С. 16 – 28.

[3] *Степанец А.И.* Кратные суммы Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций / А.И. Степанец, Н.Л. Пачулиа // Укр. мат. журнал. — 1991. — 43, № 4. — С. 545 – 555.

[4] *Ласурия Р.А.* Кратные суммы Фурье на множествах $\overline{\psi}$-дифференцируемых функций / Р.А. Ласурия // Укр. мат. журнал. — 2003. — 55, № 7. — С. 911 – 918.

[5] *Рукасов В.И.* Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных прямоугольными линейными средними их рядов Фурье / В.И. Рукасов, О.А. Новиков, В.И. Бодрая // Укр. мат. журнал. — 2005. — 57, № 4. — С. 564 – 570.

[6] *Ключникова А.Р.* Приближение классов функций многих переменных прямоугольными линейными операторами / Ключникова А.Р., Леденева А.С., Качина Ю.М. [та ін.] // Зб. наук. праць фіз.-мат. факультету СДПУ. — Слов'янськ: СДПУ, 2012. — № 2. — С. 28 – 36.

[7] *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. — К.: Наук. думка, 1981. — 340 с.

[8] *Рукасов В.И.* Приближение функций с небольшой гладкостью из классов $C^{\overline{\psi}}_{\infty}$ линейными методами / В.И. Рукасов, О.А. Новиков // Теорія наближень та гармонічний аналіз: праці Українського математичного конгресу. — 2001. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. — С. 184 – 193.