УДК 517.5

Волков С.В.

[1] *старший викладач кафедри «Природничих наук», КІІ ДВНЗ «ДонНТУ»*

e-mail: sergey.v.volkov@mail.ru

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $\overline{\psi}$ ДИФЕРЕНЦІЙОВАНИХ ФУНКЦІЙ БІМАТРИЧНИМ МЕТОДОМ

Стаття присвячена дослідженню питань наближення лінійними методами підсумовування рядів Фур'є класів 2π-періодичних функцій, що задаються мультиплікаторами.

Ключові слова: *ряд Фур'є, лінійний (біматричний) метод наближення, задача Колмогорова-Нікольського, асимптотична рівність, $\overline{\psi}$-похідна, рівномірна збіжність.*

Вступ

Природним апаратом наближення періодичних функцій є частинні суми Фур'є. Але, як добре відомо, суми Фур'є не є рівномірно збіжними на всьому просторі неперервних функцій. Цей факт, у свій час, активізував розробку різноманітних тригонометричних сум, породжених лінійними методами підсумовування рядів Фур'є і позбавлених вказаного недоліку (суми Рогозинського, Стєклова, Фавара, Зигмунда, Фейєра, Рісса, Чезаро, Бернштейна-Рогозинського тощо). Вказані методи породжені застосуванням, так званого, матричного підсумовування, що використовує ідеї підсумовування розбіжних числових рядів.

Суть такого підсумовування полягає у встановленні відповідності між $f \in L\left(0, 2\pi\right)$ і рядом Фур'є

$$U_n\left(f; x; \Lambda\right) = \tfrac{a_0}{2}\lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(n)}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),$$

де $a_k = a_k\left(f\right)$ і $b_k = b_k\left(f\right)$, $k = 0, 1, ..., -$ коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$;

$$\Lambda = \left\|\lambda_k^{(n)}\right\|, n = 0, 1, ..., \quad k = 0, 1, ..., n,$$

– довільна нескінчена трикутна матриця чисел

До однієї з основних задач в теорії наближення функцій і підсумовування рядів Фур'є відносять задачу про знаходження асимптотичних при $n \to \infty$ рівностей для величин

$$\mathcal{E}\left(\mathfrak{N}; U_n(\Lambda)\right)_X := \sup_{f \in \mathfrak{N}} \left\|f(\cdot) - U_n\left(f; \cdot; \Lambda\right)\right\|$$

де $\mathfrak{N}$ – деякий фіксований клас 2π-періодичних функцій, $\mathfrak{N} \subset X$, X – лінійний нормований простір, а $U_n\left(f; \cdot; \Lambda\right)$ – тригонометричний поліном, породжений певним лінійним методом підсумовування рядів Фур'є.

Ця задача має багату історію, яка пов'язана з іменами таких відомих математиків, як А.Н. Колмогоров, С.М. Нікольський, Б. Надь, В.К. Дзядик, М.П. Корнєйчук, С.Б. Стєчкін, О.П. Тіман, М.П. Тіман, О.І. Степанець, О.В. Єфімов, С.О. Теляковський, та інші.

Якщо в явному вигляді знайдено функцію $\varphi(n) = \varphi\left(\mathfrak{N}; U_n(\Lambda); n\right)$ таку, що

$$\mathcal{E}\left(\mathfrak{N}; U_n(\Lambda)\right)_X = \varphi(n) + o\left(\varphi(n)\right), \quad n \to \infty$$

то, наслідуючи О.І. Степанця будемо казати, що розв'язана задача Колмогорова-Нікольського для методу $U_n\left(f; \cdot; \Lambda\right)$ на класі $\mathfrak{N}$ в метриці простору X .

Відомо, що швидкість наближення до нуля відхилення $\left|f(\cdot) - U_n\left(f; \cdot; \Lambda\right)\right|$ залежить від способу побудови $U_n\left(f; \cdot; \Lambda\right)$, вибору матриці Λ . У рамках розвитку ідеї узагальнення лінійних методів підсумовування, в 1991 році О.О. Новіковим був запроваджений більш загальний агрегат наближення, так званий «у-ен-фі-еф» метод (напр. [3]), частинним випадком якого є усі класичні методи. Принцип побудови таких методів оснований на введені мультиплікатора кожної гармоніки тригонометричного ряду, але вплив парної чи непарної складової гармоніки на підсумовування ряду може різнитися.

В роботі розв'язується задача Колмогорова-Нікольського для методу $U_n\left(f; \cdot; \Lambda_{1,2}\right)_,$ побудованого на основі біматриць, для періодичних функцій з класу $C_\infty^{\overline{\psi}}$ в рівномірній метриці. Класи $C_\infty^{\overline{\psi}}$ були введені у 1996 році О.І.Степанцем. Ці класи при фіксованих значеннях параметрів, що їх визначають, співпадають з відомими класами $C_{\beta,\infty}^{\psi}$.

Метою даної роботи є знаходження асимптотичних рівностей для точних верхніх меж відхилень узагальнених тригонометричних поліномів, що породжені новим методом, на класах $C_\infty^{\overline{\psi}}$ в рівномірній метриці.

Об'єктом дослідження є клас $C_\infty^{\overline{\psi}}$.

Предметом дослідження є швидкість наближення в рівномірній метриці функцій з класів $C_\infty^{\overline{\psi}}$ узагальненими тригонометричними поліномами, що породжені лінійним біматричним методом.

Задачі дослідження:

1) ввести до розгляду більш загальний, біматричний, лінійний метод підсумовування рядів Фур'є;

2) встановити необхідні і достатні умови рівномірної збіжності послідовності поліномів, що породжені новим методом;

3) оцінити знизу відхилення поліному, побудованого на основі нового методу, від функції, що його породжує;

4) отримати асимптотичну рівність для верхніх меж відхилень узагальнених поліномів $U_n\left(f; x; \Lambda_{1,2}\right)$ на класах $C_\infty^{\overline{\psi}}$ в метриці простору C .

Основна частина

Нехай $f \in L(0, 2\pi)$ і

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right) \tag{1}$$

– ряд Фур'є цієї функції,

$$\begin{aligned} a_k = a_k(f) = \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ktdt, \\ b_k = b_k(f) = \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ktdt, \quad k = 0, 1, ..., \end{aligned} \tag{2}$$

– її коефіцієнти Фур'є.

В напрямку узагальнення лінійних методів підсумовування пропонується нова конструкція поліномів.

За допомогою нескінченних числових матриць $\Lambda_1 = \left\{\lambda_{k,1}^{(n)}\right\}, \Lambda_2 = \left\{\lambda_{k,2}^{(n)}\right\}$ таких, що $\forall n \in \mathrm{N}$ $\lambda_{0,i}^{n} = 1,\quad k \geqslant n,\quad \lambda_{k,i}^{n} = 0,\quad i = 1, 2$ кожній функції $f(x)$ на основі ряду (1) поставимо у відповідність послідовність тригонометричних поліномів $U_n(f; x; \Lambda_{1,2})$ виду

$$U_n(f; x; \Lambda_{1,2}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\lambda_{k,1}^{(n)} a_k(f)\cos kx + \lambda_{k,2}^{(n)} b_k(f)\sin kx\right). \tag{3}$$

Неважко переконатися у лінійності методу (3), який називатимемо біматричним методом, а отже, через визначення Λ_1, Λ_2 можна отримати відомі лінійні методи.

Якщо у (3) визначити $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 1$, то відповідний поліном, очевидно, співпадає з частинними сумами *Фур'є*

$$U_n(f; x; \Lambda_{1,2}) = S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx). \tag{4}$$

Метод середніх арифметичних (метод Фейєра) буде задано при $\Lambda_1 = \Lambda_2 = = \lambda_k^{(n)} = 1 - \frac{k}{n},\ k = 0, 1, .., n-1$, і (3), при цьому задають суми *Фейєра*:

$$U_n(f; x; \Lambda_{1,2}) = \sigma_n(f; x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f; x). \tag{5}$$

Якщо у (3) прийняти $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \begin{cases} 1, & k = 0,1,...,n-p \\ 1 - \frac{k-n+p}{p}, & k = n-p+1,...,n-1, \end{cases}$
то будуть задані суми *Валле-Пуссена*:

$$U_n\,(f;x;\Lambda_{1,2}) = V_{n,p}\,(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_{k+1}\,(f;x) \qquad (6)$$

Якщо у (3) прийняти $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \cos\frac{k\pi}{2n}$, $k = 0,1,...,n-1$, то будуть задані, так звані суми *Рогозинского*. Суми *Зигмунда* визначаються при

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^s,\ s > 0,\ k = 0,1,...,n-1.$$

Зрозуміло, що апроксимаційні властивості поліномів (3) визначаються матрицями Λ_1, Λ_2. Питання рівномірної збіжності поліномів (3) у випадку $\Lambda = \Lambda_1 = \Lambda_2 = \lambda_k^{(n)}$ на просторі C (простір неперервних на всій осі $2\pi-$ періодичних функцій з нормою $||f||_C = \max\limits_t|f(t)|$) розкрите у роботі [1]. Використовуючи викладену методику, встановимо умови рівномірної збіжності поліномів (3) у загальному випадку, при $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$.

Припустимо, що $U_n(f;x;\Lambda_{1,2})$ рівномірно збігаються на просторі C, то вони повинні збігатися і на підпросторі C утвореного тригонометричними поліномами $P_m(x)$ порядку не вище за m, рівномірно по всім $x \in [-\pi,\pi]$ і повинно виконуватися $\lim\limits_{n\to\infty}|U_n\,(P_m;x,\Lambda_{1,2}) - P_m| = 0$, що можливо, лише коли

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_{k,i}^{(n)} = 1, \quad i = 1,2. \qquad (7)$$

Оскільки

$$U_n(P_m;x;\Lambda_{1,2}) - P_m = \sum_{k=1}^{m}[(\lambda_{k,1}^{(n)}-1)a_k(f)\cos kx + (\lambda_{k,2}^{(n)}-1)b_k(f)\sin kx]. \quad (8)$$

Тобто система (7) є необхідною умовою рівномірної збіжності на просторі C поліномів $U_n(f;x;\Lambda_{1,2})$.

Згідно з теоремою Вейерштрасса довільну функцію з простру C можна наблизити, з будь-якою точністю, тригонометричним поліномом. Тобто, якщо $f(x) \in C$ то $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\ \ P_m^{(\varepsilon)}(f,x)\ \ :\ \ \left|\left|f(x) - P_m^{(\varepsilon)}(f,x)\right|\right|_C \leqslant \varepsilon$.

Отже, $\forall\ \Lambda_{1,2}$

$$||f(x) - U_n(f;x;\Lambda_{1,2})||_C =$$
$$= \left|\left|f(x) - P_m^{(\varepsilon)}(f,x) + P_m^{(\varepsilon)}(f,x) - U_n(f;x;\Lambda_{1,2})\right|\right|_C \leqslant$$
$$\leqslant \left|\left|f(x) - P_m^{(\varepsilon)}(f,x)\right|\right|_C + \left|\left|P_m^{(\varepsilon)}(f,x) - U_n(f;x;\Lambda_{1,2})\right|\right|_C \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + \left|\left|P_m^{(\varepsilon)}(f,x) - U_n(P_m^{(\varepsilon)};x;\Lambda_{1,2})\right|\right|_C + \left|\left|U_n((P_m^{(\varepsilon)} - f);x;\Lambda_{1,2})\right|\right|_C$$

Розглянемо

$$\left\|U_n\left((P_m^{(\varepsilon)}-f);x,\Lambda_{1,2}\right)\right\|_C=\max_x\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[P_m^{(\varepsilon)}(x+t)-f(x+t)]U_n^{(1)}(t;\Lambda_{1,2})dt+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[P_m^{(\varepsilon)}(t-x)-f(t-x)]U_n^{(2)}(t;\Lambda_{1,2})dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2\varepsilon}{\pi}\left[\int\limits_0^{\pi}\left|U_n^{(1)}(t;\Lambda_{1,2})\right|dt+\int\limits_0^{\pi}\left|U_n^{(2)}(t;\Lambda_{1,2})\right|dt\right],$$

де $U_n^{(1)}(t;\Lambda_{1,2})=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\lambda_{k,1}^{(n)}+\lambda_{k,2}^{(n)}}{2}\cos kt,\quad U_n^{(2)}(t;\Lambda_{1,2})=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\lambda_{k,1}^{(n)}-\lambda_{k,2}^{(n)}}{2}\cos kt\,.$

Значить

$$\|f(x)-U_n(f;x,\Lambda_{1,2})\|_C\leqslant\varepsilon\left(1+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\left|U_n^{(1)}(t;\Lambda_{1,2})\right|+\left|U_n^{(2)}(t;\Lambda_{1,2})\right|\right]dt\right)+$$

$$+\left\|P-m^{(\varepsilon)}(f,x)-U_n\left(P_m^{(\varepsilon)};x,\Lambda_{1,2}\right)\right\|_C.\qquad(9)$$

Послідовність чисел

$$L_n\left(\Lambda_{1,2};i\right)=\sup_{|f|<1}\left|\left|U_n^{(i)}(f;x;\Lambda_{1,2})\right|\right|_C=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left|U_n^{(i)}(t;\Lambda_{1,2})\right|dt\quad i=1,2$$

є аналогами констант Лебега даного метода.

Обмеженість $L_n\left(\Lambda_{1,2};i\right)$ будемо позначати класично:

$$L_n\left(\Lambda_{1,2};i\right)=O\left(1\right),\quad n\to\infty\ \ i=1,2.\qquad(10)$$

Отже (9), (8), (10) свідчать про рівномірну збіжність $U_n(f;x;\Lambda_{1,2})$ до $f(x)$ на C завжди, коли виконано (7).

Таким чином, умови (7), (10) є достатніми умовами рівномірної збіжності $U_n(f;x;\Lambda_{1,2})$ до $f(x)$ на C. Необхідність (7) вже встановлена, необхідність умови (10) слідує з теореми Банаха:
для того, щоб послідовність лінійних операторів $U_n(f)$, що відображають повний лінійний нормований простір C у свою частину, володіла властивістю

$$\lim_{n\to\infty}||f-U_n(f)||_c=0,$$

необхідно і достатньо, щоб $\forall\ \ f(x)\in C$ виконувалась умова

$$\sup\left\{||U_n(f)||_c:||f||\leqslant1\right\}=O(1),\quad n\to\infty.$$

Виходячи з (10) можна стверджувати, що поліноми $U_n(f;x,\Lambda_{1,2})$ будуть рівномірно збігатися кожного разу, коли будуть рівномірно збігатися $U_n(f;x;\Lambda_1)$ і $U_n(f;x;\Lambda_2)$, але не навпаки.

В умові (10) можна вимагати лише $L_n(\Lambda_{1,2};1)=O(1)$, при $n\to\infty$ оскільки $L_n\left(\Lambda_{1,2};2\right)=O\left(1\right)$, при $n\to\infty$ випливає із ознаки збіжності рядів, ознаки Дирихле:

ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ буде збігатися, якщо ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ обмежений, а послідовність чисел $\{a_k,\ k=1,2..\}$ монотонно прямує до нуля.

Оскільки $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\sin \frac{nt}{2} \cos \frac{n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}}, \quad t \neq 2\pi k \quad k \in Z$, є обмеженою при $n \to \infty$, а монотонне зменшення до нуля $a_k = \frac{\lambda_{k,1}^{(n)} - \lambda_{k,2}^{(n)}}{2}$ забезпечується монотонним виконанням (7), то $\frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \left| \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k,1}^{(n)} - \lambda_{k,2}^{(n)}}{2} \cos kt \right| dt = O(1)$, при $n \to \infty$.

Теорема 1. *Для рівномірної збіжності послідовності поліномів $U_n(f; x; \Lambda_{1,2})$ до функції $f(x)$ на всьому просторі C, необхідно і достатньо виконання умов:*

$$1) \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_{k,i}^{(n)} = 1, \quad i = 1,2$$

$$2) \quad L_n(\Lambda_{1,2}) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k,1}^{(n)} + \lambda_{k,2}^{(n)}}{2} \cos kt \right| dt = O(1), \quad n \to \infty$$

Встановимо нижню межу відхилення поліномів (3) від функції $f(x)$, що їх породжує. Для цього розглянемо величину

$I = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x) - U_n(f; x; \Lambda_{1,2})]\, e^{imx} dx$, $m < n$, яку з урахуванням (1), (2), (3) подамо у вигляді

$$I = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \left[(1 - \lambda_{k,1}^{(n)}) a_k(f) \cos kx + (1 - \lambda_{k,2}^{(n)}) b_k(f) \sin kx \right] + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=n}^{\infty} [a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx] \right] e^{imx} dx.$$

Застосовуючи формулу Ейлера $\cos mx + i \sin mx = e^{mxi}$ та виконавши ряд елементарних перетворень, отримаємо

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \left[(1 - \lambda_{k,1}^{(n)}) a_k(f) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx (\cos mx + i \sin mx) dx + \right. \\ &+ \left. (1 - \lambda_{k,2}^{(n)}) b_k(f) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx (\cos mx + i \sin mx) dx \right] + \\ &+ \sum_{k=n}^{\infty} \left[a_k(f) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx (\cos mx + i \sin mx) dx + \right. \\ &+ \left. b_k(f) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx (\cos mx + i \sin mx) dx \right]. \end{aligned}$$

Виходячи з ортогональності тригонометричної системи

$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx dx = 0 \quad \forall k, m, \qquad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx dx = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ \pi, & k = m \end{cases}$

і $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx dx = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ \pi, & k = m, \end{cases}$ маємо

$I = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x) - U_n(f;x;\Lambda_{1,2})]\, e^{imx}dx = (1-\lambda_{k,1}^{(n)})a_k(f) + i(1-\lambda_{k,2}^{(n)})b_k(f).$

Очевидно,

$$|I| = \left|(1-\lambda_{k,1}^{(n)})a_k(f) + i(1-\lambda_{k,2}^{(n)})b_k(f)\right| = \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x) - U_n(f;x;\Lambda_{1,2})]\, e^{imx}dx\right|,$$

і тому має місце

Теорема 2. *Швидкості збіжності будь-якого полінома побудованого лінійним біматричним методом* (3)*, до функції що його породжує, не може бути кращою за величину* $\min\limits_{k\in N}\frac{\sqrt{\left[\left(1-\lambda_{k,1}^{(n)}\right)a_k\right]^2+\left[\left(1-\lambda_{k,2}^{(n)}\right)b_k\right]^2}}{2}$*, тобто*

$$\min_{k\in N}\frac{\sqrt{\left[\left(1-\lambda_{k,1}^{(n)}\right)a_k\right]^2+\left[\left(1-\lambda_{k,2}^{(n)}\right)b_k\right]^2}}{2} \leqslant ||f\,(x) - U_n\,(f;x;\Lambda_{1,2})||_C. \quad (11)$$

Дослідимо величину $\sup\limits_{f\in C_\infty^{\overline{\psi}}} \|f(x) - U_n(f;x;\Lambda_{1,2})\|$, а саме асимптотичну її поведінку при $n\to\infty$.

В роботах О.І. Степанця [1, 2] класи функцій $f \in C_\infty^{\overline{\psi}}$ визначаються наступним чином. Нехай (1) ряд Фур'є функції $f \in L\,(0,2\pi)$ і $\overline{\psi}(k) = (\psi_1(k),\psi_2(k))$ пара довільних фіксованих систем чисел, що задовольняють умову

$$\overline{\psi}^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0, \quad k\in \mathrm{N}.$$

Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_1(k)}{\overline{\psi}^2(k)}A_k(f,x) + \frac{\psi_2(k)}{\overline{\psi}^2(k)}\overline{A}_k(f,x), \quad \text{де}$$

$A_k(f,x) = a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx$, $\overline{A}_k(f,x) = -a_k(f)\sin kx + b_k(f)\cos kx$ є рядом Фур'є деякої функції, то назвемо її $\overline{\psi}$ похідною функції $f(x)$ і позначимо $f^{\overline{\psi}}(x)$.

Нехай $C_\infty^{\overline{\psi}}$ клас функцій $f\in C$, які мають обмежену $\overline{\psi}$ похідну.

Представимо $f(x) - U_n(f;x;\Lambda_{1,2})$ в інтегральному виді. Згідно означення

$$f^{\overline{\psi}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_1(k)}{\overline{\psi}^2(k)}A_k(f,x) + \frac{\psi_2(k)}{\overline{\psi}^2(k)}\overline{A}_k(f,x) =$$

$$= A_k(f,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f^{\overline{\psi}})\cos kx + b_k(f^{\overline{\psi}})\sin kx,$$

де $\begin{cases} a_k(f^{\overline{\psi}}) = \frac{1}{\overline{\psi}^2(k)}(\psi_1(k)a_k(f) + \psi_2(k)b_k(f)) \\ b_k(f^{\overline{\psi}}) = \frac{1}{\overline{\psi}^2(k)}(\psi_1(k)b_k(f) - \psi_2(k)a_k(f)). \end{cases}$

$$A_k(f,x)=\psi_1(k)\Big[a_k(f^{\overline{\psi}})\cos kx+b_k(f^{\overline{\psi}})\sin kx\Big]-$$
$$-\psi_2(k)\Big[b_k(f^{\overline{\psi}})\cos kx-a_k(f^{\overline{\psi}})\sin kx\Big]=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}}(t)[\psi_1(k)\cos k(t-x)-\psi_2(k)\sin k(t-x)]dt=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}}(x-t)[\psi_1(k)\cos kt+\psi_2(k)\sin kt]dt$$

Неважко переконатися в тому, що (3) можна записати у вигляді

$$U_n(f;x;\Lambda_{1,2})=\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{\lambda_{k,1}^{(n)}-\lambda_{k,2}^{(n)}}{2}\left(a_k(f)\cos kx-b_k(f)\sin kx\right)\right]+$$
$$+\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{\lambda_{k,1}^{(n)}+\lambda_{k,2}^{(n)}}{2}\left(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx\right)\right].$$

Нехай можливе представлення:

$$\begin{cases}\lambda_{n,1}(x)=1-\frac{\varphi_n(nx)}{\varphi_n(n)}F_n(x)\\ \lambda_{n,2}(x)=1-\frac{g_n(nx)}{g_n(n)}H_n(x)\end{cases},\quad \lambda_{n,i}\left(\tfrac{k}{n}\right)=\lambda_{k,i}^{n},\quad i=1,2,$$

де $\varphi_n(x),g_n(x)$ послідовність неперервних, додатніх, не спадаючих при $x>0$ функцій таких, що $\varphi_n(0)=g_n(0)=0$; $F_n(x),H_n(x)$ послідовність двічі диференційованих і неперервних функцій, обмежених разом із другою похідною при $x\in[0;1]$ таких, що $F_n(0)\neq 0$, $H_n(0)\neq 0$ і $F_n(1)=H_n(1)$.

Тоді вважатимемо $U_n(f;x,\Lambda_{1,2})\equiv U_n(f;x;\{\varphi,F\};\{g,H\})$, і відхилення запишемо у вигляді

$$\Delta_n\left(f,x,\Lambda_{1,2}\right)=f\left(x\right)-U_n\left(f;x;\{\varphi,F\};\{g,H\}\right)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}}\left(-x-t\right)\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(\nu_{k,1}^{(n)}\left(t\right)\cos kt+\nu_{k,2}^{(n)}\left(t\right)\sin kt\right)\right)dt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}}\left(x-t\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tau_{k,1}^{(n)}\left(t\right)\cos kt+\tau_{k,2}^{(n)}\left(t\right)\sin kt\right)\right)dt,$$

де $\nu_{k,i}^{(n)}(t)=\left\{\left(\lambda_{k,2}^{(n)}(t)-\lambda_{k,1}^{(n)}(t)\right)\psi_i(k),\quad i=1,2\right.$;

$$\tau_{k,i}^{(n)}(t)=\begin{cases}\left(1-\frac{\lambda_{k,2}^{(n)}(t)+\lambda_{k,1}^{(n)}(t)}{2}\right)\psi_i(k), & k<n,\\ \psi_i(k), & k\geqslant n,\end{cases}\qquad i=1,2.$$

Відомо, що за умови коли $\psi_1(v),\psi_2(v)$ неперервні, додатні і випукли вниз при $v\geqslant 1$, і $\lim\limits_{v\to\infty}\psi_i(v)=0,\quad i=1,2$ та $\int\limits_1^{\infty}\frac{\psi_i(v)}{v}dv<\infty$, то можливе інтегральне представлення

$$\Delta_n\left(f,x,\Lambda_{1,2}\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f^{\overline{\psi}}\left(-x-\frac{t}{n}\right)\int\limits_0^1\left(\nu_{n,1}\left(v\right)\cos vt+\nu_{n,2}\left(v\right)\sin vt\right)dvdt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f^{\overline{\psi}}\left(x-\frac{t}{n}\right)\int\limits_0^{\infty}\left(\tau_{n,1}\left(v\right)\cos vt+\tau_{n,2}\left(v\right)\sin vt\right)dvdt=I_1+I_2,$$

де $\nu_{n,i}(v) = \left\{ (\lambda_{n,2}(v) - \lambda_{n,1}(v))\, \psi_i(nv)\,, \quad \frac{1}{n} \leqslant v \leqslant 1, \quad i = 1, 2; \right.$

$$\tau_{n,i}(v) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda_{n,2}(v)+\lambda_{n,1}(v)}{2}\right) \psi_i(nv)\,, & \frac{1}{n} \leqslant v \leqslant 1, \\ \psi_i(nv), & v \geqslant 1, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Для випадків $0 \leqslant v \leqslant \frac{1}{n}$ функції $\nu_{n,i}(v)$ і $\tau_{n,i}(v)$ довизначаються довільно з урахуванням неперервності.

При вивченні асимптотичних поведінок $\Delta_n(f, x, \Lambda_{1,2}) = I_1 + I_2$ доданок I_2 завжди присутній та достатньо вивчений і оцінений. Новим є перший доданок, вивчимо його, $I_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\overline{\psi}}(-x - \frac{t}{n})\int\limits_0^1 (\nu_{n,1}(v)\cos vt + \nu_{n,2}(v)\sin vt)dvdt\,.$

Для його оцінки використаємо *лему Теляковського.*
Якщо: 1) $\nu_{n,i}(v)$ абсолютно неперервні при $v > 0\,;$ 2) $\nu_{n,i}(0) = \nu_{n,i}(1) = 0\,;$ 3) для точок, в яких не існує $\nu_{n,i}(v)$ її можна довизначити так, що інтеграл $\int\limits_0^1 v(1-v)\left|d\nu'_{n,i}(v)\right|$ існує, то $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_0^1 (\nu_{n,1}(v)\cos vt + \nu_{n,2}(v)\sin vt)dv\right|dt =$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{|\nu_{n,2}(v)|}{v}dv + O(1)\left(\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{\nu_{n,1}^2+\nu_{n,2}^2}}{1-v}dv + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^1 v(1-v)\left|d\nu'_{n,i}(v)\right|\right).$$

Для I_1 має місце нерівність

$$|I_1| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_0^1 (\nu_{n,1}(v)\cos vt + \nu_{n,2}(v)\sin vt)dv\right|dt\,,$$

у якій інтеграл в правій частині задовольняє всім умовам леми Теляковського, якщо $\nu_{n,i}(v)$ довизначити на проміжку $0 \leqslant v \leqslant \frac{1}{n}$ аналогічно проміжку $\frac{1}{n} \leqslant v \leqslant 1$, тобто $\nu_{n,i}(v) = \{(\lambda_{n,2}(v) - \lambda_{n,1}(v))\,\psi_i(nv) \quad 0 \leqslant v \leqslant 1, \quad i = 1, 2.$

Перевірка умов леми для таких $\nu_{n,i}(v)$ не є складною. Виконання першої і третьої умови слідує з визначення $\nu_{n,i}(v)$. З визначення випливає виконання і другої умови, згідно представлення $\lambda_{n,i}(v)$

$$\nu_{n,i}(v) = \left\{\left(\frac{\varphi_n(nv)}{\varphi_n(n)}F_n(v) - \frac{g_n(nv)}{g_n(n)}H_n(v)\right)\psi_i(nv), \qquad 0 \leqslant v \leqslant 1, \quad i = 1, 2;\right.$$

звідки

$$\nu_{n,i}(0) = \left\{\left(\frac{\varphi_n(0)}{\varphi_n(n)}F_n(0) - \frac{g_n(0)}{g_n(n)}H_n(0)\right)\psi_i(0) = \right.$$
$$= \left(\frac{0}{\varphi_n(n)}\cdot F_n(0) - \frac{0}{g_n(n)}\cdot F_n(0)\right)\psi_i(0) = 0, \quad 0 \leqslant v \leqslant 1, \quad i = 1, 2;$$

$$\nu_{n,i}(1) = \left\{\left(\frac{\varphi_n(n)}{\varphi_n(n)}F_n(1) - \frac{g_n(n)}{g_n(n)}H_n(1)\right)\psi_i(1) = \right.$$
$$= (1\cdot F_n(1) - 1\cdot H_n(1))\,\psi_i(n) = 0, \quad 0 \leqslant v \leqslant 1, \quad i = 1, 2.$$

Це свідчить про те, що $\nu_{n,i}(0) = \nu_{n,i}(1) = 0$. Вивчимо головну частину.

$$\int\limits_0^1 \frac{|\nu_{n,2}(v)|}{v}dv = \int\limits_0^1 \frac{|(\lambda_{n,2}(v)-\lambda_{n,1}(v))\psi_2(nv)|}{v}dv = \int\limits_0^1 \frac{\left|\left(\frac{\varphi_n(nv)}{\varphi_n(n)}F_n(v) - \frac{g_n(nv)}{g_n(n)}H_n(v)\right)\right|}{v}|\psi_2(nv)|dv =$$

$$= \frac{1}{\varphi_n(n)g_n(n)}\int\limits_0^1 \frac{|(\varphi_n(nv)g_n(n)F_n(v)-g_n(nv)\varphi_n(n)H_n(v))|}{v}|\psi_2(nv)|dv \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\varphi_n(n)g_n(n)}\int\limits_0^1 \frac{|(\varphi_n(nv)g_n(n)(F_n(v)-F_n(0))-g_n(nv)\varphi_n(n)(H_n(v)-H_n(0)))|}{v}|\psi_2(nv)|dv+$$
$$+\frac{1}{\varphi_n(n)g_n(n)}\int\limits_0^1 \frac{|(\varphi_n(nv)g_n(n)F_n(0)-g_n(nv)\varphi_n(n)H_n(0))|}{v}|\psi_2(nv)|dv = A_1 + A_2.$$

Розглянемо перший доданок $A_1 = \frac{1}{\varphi_n(n)g_n(n)}\times$
$$\times\int\limits_0^1 \frac{|(\varphi_n(nv)g_n(n)(F_n(v)-F_n(0))-g_n(nv)\varphi_n(n)(H_n(v)-H_n(0)))|}{v}|\psi_2(v)|dv\,.$$

Враховуючи визначення $\lambda_{n,i}(v)$ і теорему Лагранжа $F_n(v)-F_n(0) = = F'_n(\xi_F)(v-0)$, $H_n(v)-H_n(0) = H_n(\xi_H)(v-0)$, де $\xi_F, \xi_H \in (0;v)$, маємо
$$A_1 = \frac{1}{\varphi_n(n)g_n(n)}\int\limits_0^1 |(\varphi_n(nv)g_n(n)F'_n(\xi_F) - g_n(nv)\varphi_n(n)H'_n(\xi_H))||\psi_2(nv)|dv =$$
$$= \frac{O(1)}{\varphi_n(n)g_n(n)} \max_{0\leqslant v\leqslant 1}\{|\varphi_n(nv)g_n(n)\psi_2(nv)| + |g_n(nv)\varphi_n(n)\psi_2(nv)|\}.$$

У випадку зростання $\varphi_n(nv)\psi_i(nv)$ і $g_n(nv)\psi_i(nv)$ отримаємо, що $A_1 = O(1)\overline{\psi}(n)$, а отже
$$\int\limits_0^1 \frac{|\nu_{n,2}(v)|}{v}dv = \int\limits_0^n \left|\left(\frac{\varphi_n(v)}{\varphi_n(n)}F_n(0) - \frac{g_n(v)}{g_n(n)}H_n(0)\right)\right|\frac{|\psi_2(v)|}{v}dv + O(1)\overline{\psi}(n).$$

Для оцінки першого доданка більшого порядку малості $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{\nu_{n,1}^2+\nu_{n,2}^2}}{1-v}dv$,

врахуємо нерівність $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{\nu_{n,1}^2+\nu_{n,2}^2}}{1-v}dv \leqslant \sum\limits_{i=1}^2\int\limits_0^1 \frac{|\nu_{n,i}(v)|}{1-v}dv$ та отримаємо
$$\int\limits_0^1 \frac{|\nu_{n,i}(v)|}{1-v}dv = \int\limits_0^1 \frac{\left|\left(\frac{\varphi_n(nv)}{\varphi_n(n)}F_n(v)-\frac{g_n(nv)}{g_n(n)}H_n(v)\right)\right|}{1-v}|\psi_i(nv)|dv \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^1 \frac{\left|\left(\frac{\varphi_n(nv)}{\varphi_n(n)}(F_n(v)-1)-\frac{g_n(nv)}{g_n(n)}(H_n(v)-1)\right)\right|}{1-v}|\psi_i(nv)|dv + \int\limits_0^1 \frac{\left|\left(\frac{\varphi_n(nv)}{\varphi_n(n)}-\frac{g_n(nv)}{g_n(n)}\right)\right|}{1-v}|\psi_i(nv)|dv =$$
$$= B_1 + B_2\,.$$

Згідно визначення $\lambda_{n,i}(v)$ і теореми Лагранжа запишемо:
для B_1, $F_n(v)-F_n(1) = F'_n(\xi_F)(v-1)$,
а $H_n(v)-H_n(1) = H'_n(\xi_H)(v-1)$ де $\xi_F, \xi_H \in (v;1)$,
для B_2, $\varphi_n(nv)\psi_i(nv)-\varphi_n(n)\psi_i(n) = (\varphi_n(n\xi_\varphi)\psi_i(n\xi_\varphi))'\,n(v-1)$; при $i=1,2$
$g_n(nv)\psi_i(nv)-g_n(n)\psi_i(n) = (g_n(n\xi_g)\psi_i(n\xi_g))'\,n(v-1)$ де $\xi_g, \xi_\varphi \in (nv;n)$

Тоді у випадку зростання $\varphi_n(nv)\psi_i(nv)$ і $g_n(nv)\psi_i(nv)$ отримаємо, що
$$B_1 = \int\limits_0^1 \left|\left(\frac{\varphi_n(nv)}{\varphi_n(n)}F'_n(\xi_F) - \frac{g_n(nv)}{g_n(n)}H'_n(\xi_H)\right)\right||\psi_i(nv)|dv \leqslant$$
$$\leqslant O(1)\max_{0\leqslant v\leqslant 1}\left\{\left|\frac{\varphi_n(nv)}{\varphi_n(n)}\psi_i(nv)\right| + \left|\frac{g_n(nv)}{g_n(n)}\psi_i(nv)\right|\right\},$$

а значить $B_1 = O(1)\overline{\psi}(n)$. Для другого інтегралу $B_2 = \frac{1}{\varphi_n(n)g_n(n)}\cdot$
$\cdot\int\limits_0^1 \left|(\varphi_n(nv)\psi_i(nv) - \varphi_n(n)\psi_i(n))\, g_n(n) - (g_n(nv)\psi_i(nv) - g_n(n)\psi_i(n))\, \varphi_n(n)\right| \frac{dv}{1-v}$

$$B_2 \leqslant \frac{1}{\varphi_n}(n)g_n(n) \int\limits_0^1 |\, (\varphi_n(nv)\psi_i(nv))'_{\xi_\varphi} n(v-1)g_n(n) -$$

$$- (g_n(nv)\psi_i(nv))'_{\xi_g} n(v-1)\varphi_n(n)| \frac{dv}{1-v} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varphi_n(n)g_n(n)} \int\limits_0^1 \left|(\varphi_n(nv)\psi_i(nv))'_{\xi_\varphi} n g_n(n)\right| dv +$$

$$+ \frac{1}{\varphi_n(n)g_n(n)} \int\limits_0^1 \left|(g_n(nv)\psi_i(nv))'_{\xi_g} n\varphi_n(n)\right| dv =$$

$$= \frac{1}{\varphi_n(n)g_n(n)} \left(|\varphi_n(nv)\psi_i(nv)|g_n(n) + |g_n(nv)\psi_i(nv)|\varphi_n(n)\right)\Big|_0^1 = O(1)\overline{\psi}(n)\,.$$

Враховуючи оцінки B_1 та B_2 отримуємо, що
$\int\limits_0^1 \frac{|\nu_{n,i}(v)|}{1-v} dv = O(1)\overline{\psi}(n)$, і як наслідок $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{\nu_{n,1}^2 + \nu_{n,2}^2}}{1-v} dv = O(1)\overline{\psi}(n).$

Для оцінки другого доданка більшого порядку малості, вивчимо рівність

$$\int\limits_0^1 v(1-v)\left|d\nu'_{n,i}(v)\right| =$$

$$= \int\limits_0^1 v(1-v)\left| d\left(\left(\frac{\varphi_n(nv)}{\varphi_n(n)} F_n(v)\psi_i(nv) \right)' - \left(\frac{g_n(nv)}{g_n(n)} H_n(v)\psi_i(nv) \right)' \right) \right| =$$

$$= O(1) \int\limits_0^1 v(1-v)\left| d\left(\left(\frac{\varphi_n(nv)}{\varphi_n(n)} F_n(v)\psi_i(nv) \right)' \right) \right| +$$

$$+ O(1) \int\limits_0^1 v(1-v)\left| d\left(\frac{g_n(nv)}{g_n(n)} H_n(v)\psi_i(nv) \right)' \right| = O(1)C_1 + O(1)C_2.$$

Оцінимо C_1. Позначимо $\dfrac{\varphi_n(nv)}{\varphi_n(n)}\psi_i(nv) = Z_i(nv)$ і розглянемо

$$C_1 = \int\limits_0^1 v(1-v)\left| d\left((Z_i(nv)F_n(v))' \right) \right|,$$

де $\quad (Z_i(nv)F_n(v))' = nZ_i'(nv)F_n(v) + Z_i(nv)F_n'(v)$, і

$$d\left((Z_i(nv)F_n(v))'\right) = (nZ_i'(nv)F_n(v) + Z_i(nv)F_n'(v))'\,dv = \\ = \left(n^2 Z_i''(nv)F_n(v) + 2Z_i'(nv)F_n'(v) + Z_i(nv)F_n''(v)\right)dv\,.$$

Тоді $\quad C_1 = \int\limits_0^1 v(1-v)\left|d\left((Z_i(nv)F_n(v))'\right)\right| =$

$$= O(1)\left(\left|\int\limits_0^1 v(1-v)n^2 Z_i''(nv)dv\right| + 2\left|\int\limits_0^1 v(1-v)nZ_i'(nv)dv\right| + \right. \\ \left. + \left|\int\limits_0^1 v(1-v)Z_i(nv)dv\right|\right)$$

$$C_1 = O(1)\left(\left|v(1-v)nZ_i'(nv)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 (1-2v)dZ_i(nv)\right| + \right. \\ \left. +2\left|v(1-v)Z_i(nv)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 (1-2v)Z_i(nv)dv\right| + O(1)\max_{0\leqslant v\leqslant 1}\{v(1-v)Z_i(nv)\}\right) =$$

$$= O(1)\left(\left|\int\limits_0^1 (1-2v)dZ_i(nv)\right| + 2\max_{0\leqslant v\leqslant 1}\{|(1-2v)Z_i(nv)|\} + O(1)\overline{\psi}(n)\right) =$$

$$= O(1)\left(\left|(1-2v)Z_i(nv)\Big|_0^1 + 2\int\limits_0^1 Z_i(nv)dv\right| + O(1)\overline{\psi}(n)\right) =$$

$$= O(1)\left(Z_i(n) + O(1)\max_{0\leqslant v\leqslant 1}\{|Z_i(nv)|\} + O(1)\overline{\psi}(n)\right) = O(1)\overline{\psi}(n).$$

Аналогічно, позначивши $\dfrac{g_n(nv)}{g_n(n)}\psi_i(nv) = Z_i(nv)$, можна показати, що $C_2 = O(1)\overline{\psi}(n)$.

Враховуючи оцінки C_1 і C_2, отримали, що $\int\limits_0^1 v(1-v)\left|d\nu_{n,i}'(v)\right| = O(1)\overline{\psi}(n)$.

Теорема 3. *Якщо функції $\varphi_n(nv)\psi_i(nv)$ і $g_n(nv)\psi_i(nv)$ $\quad i = 1,2$ зростають, випуклі вгору або вниз, то при $n \to \infty$ має місто рівність*

$$\sup_{f\in C_\infty^{\overline{\psi}}} \|f(x) - U_n(f;x;\Lambda_{1,2})\| = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_0^{\infty}(\tau_{n,1}(v)\cos vt + \tau_{n,2}(v)\sin vt)\,dv\right|dt + \\ + \int\limits_0^n \left|\left(\frac{\varphi_n(v)}{\varphi_n(n)}F_n(0) - \frac{g_n(v)}{g_n(n)}H_n(0)\right)\right|\frac{|\psi_2(v)|}{v}dv + O(1)\overline{\psi}(n).$$

Висновки

Узагальнено лінійний метод підсумовування рядів Фур'є, шляхом введення біматриць, матриці для кожного доданку гармоніки;

Встановлено необхідні і достатні умови рівномірної збіжності послідовності поліномів, що породжені новим, біматричним, методом;

Знайдено оцінку знизу відхилення поліному, побудованого на основі нового методу, від функції, що його породжує;

Одержано асимптотичну рівності, в інтегральному виді, для точних верхніх меж наближень узагальненими тригонометричними поліномами $\underline{U}_n\left(f;x;\Lambda_{1,2}\right)$ в метриці простору C неперервних 2π-періодичних функцій, $\overline{\psi}$-похідні яких обмежені.

Література

[1] *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций / А.И. Степанец. — К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.

[2] *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. — Киев: Наук. думка, 1981. — 340 с.

[3] *Рукасов В.И.* Приближение непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами / В.И. Рукасов, О.А. Новиков // Учебное пособие для студ. физ. мат. специальностей пед. институтов и университетов. — Славянск, 1995. — 80 с.